В.В.Листопад
Академія праці та соціальних відносин (м. Київ)

РЕАЛІЗАЦІЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ З ДОПОМОГОЮ MICROSOFT EXCEL

Одним із головних методів лінійного програмування є симплекс-метод. Запропоновано покрокову реалізацію цього методу при розв'язанні економічних задач оптимізації засобами MS Excel.

Ключові слова: симплекс-метод, лінійне програмування, економічні задачі.

Задачі оптимізації у економічних процесах займають одне з основних місць і являються важливими завданнями практичного характеру. Процес розв'язання вказаних задач з допомогою сиплекс-методу можна реалізувати за лічені хвилини використовуючи ЕОМ.

Серед вагомих характеристик реалізації симплекс-методу з допомогою MS Excel слід виділити:

- економію аудиторного часу на практичному занятті, дефіцит якого відчувається з переходом на Болонську систему;
- отримана повна таблиця-результат та альтернативні розв'язки дають можливість провести повний економічний аналіз;
- реалізована можливість паралельного засвоєння теоретичного матеріалу цієї теми;
- зв'язок із темою "Метод Жордана-Гаусса" для розв'язування систем лінійних рівнянь та вдосконалення навичків роботи з MS Excel;
- значно спрощується механізм здійснення контролю виконання задачі викладачем;
- простота і доступність у роботі;

- можливість використовувати даний метод для підготовки системи вправ.

Симплекс-метод для розв'язання економічних задач оптимізації був розроблений американським математиком Дж. Данцігом в 1949 році. Суть сиплекс-методу полягає в переході від одного опорного розв'язку до іншого з допомогою методу Жордана-Гаусса [3], при якому значення цільової функції збільшується (якщо кожний опорний розв'язок не є виродженим). За скінчену кількість кроків, які називаються ітераціями, знаходиться оптимальний розв'язок задачі та максимальне (мінімальне) значення цільової функції [1], або встановлюється, що задача лінійного програмування не має розв'язку. Отже, симплекс-метод – це ітераційно-алгоритмічна обчислювальна процедура, яка дає змогу, починаючи з певного опорного плану, за скінченну кількість кроків отримати оптимальний план задачі лінійного програмування.

Розв'язувати оптимізаційні задачі лінійного програмування можна з допомогою пакетів програм MATHCAD, ПОИСК РЕШЕНИЯ (MS Excel), SPSS, SAS та ін. Але ці програми дають нам лише результат (без альтернативних розв'язків та результату останньої ітерації), а хід розв'язку пропонуємо реалізувати з допомогою MS Excel.

Оскільки перехід від однієї симплекс-таблиці до іншої є алгоритмічним процесом, то його можна запрограмувати в MS Excel (створюючи формули для першого стовпця та розповсюдивши їх на всі комірки нової таблиці). Таким чином реалізація кроку симплекс-методу займає лічені хвилини, а не щонайменше годину (рахуючи вручну) та виключає здійснення помилки при обчисленнях.

Розглянемо реалізацію методу на прикладі.

Приклад . Задача оптимального виробничого планування. Фірма випускає чотири види продукції A, B, C і D, на виробництво якої витрачає три види ресурсів (наприклад: працю, сировину та обладнання), які вона має в обмеженій кількості. Норми витрат продукції на одиницю продукції, їх наявні запаси, а також ціна реалізації одиниці продукції наведені в таблиці:

Ресурси	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції				Запаси ресурсів
	A	B	C	D	
1	4	2	2	3	210
2	1	1	2	3	180
3	3	1	2	1	240
Ціна	15	10	15	11	

Математична модель нашої задачі в канонічній формі має вигляд:

$$F = 15x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 11x_4 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 210, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_6 = 180, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_7 = 240 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \text{ (j=1,7).}$$

Економічна інтерпретація прямої задачі.

Для виробництва чотирьох видів продукції A, B, C, та D використовують три види ресурсів. Відомі наявні запаси ресурсів 210, 180 та 240 од. для 1, 2 та 3-го ресурсу відповідно, а також норми витрат кожного ресурсу для виготовлення продукції A, B, C, та D та ціна реалізації (в останній строчці) відповідно. Необхідно знайти такий план випуску продукції $X^*=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)$, при якому виручка від реалізації продукції буде максимальною, а витрати ресурсів не перевищуватимуть їх наявних запасів.

Розв’яжемо нашу задачу симплекс-методом користуючись засобами MS Excel. Запишемо всі дані в симплекс-таблицю та виконаємо перехід до наступної таблиці з допомогою кроку симплекс-методом.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1				15	10	15	11	0	0	0	
2	БАЗИС	Сiбаз	Хiбаз	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	θi
3	←X5	0	210	4	2	2	3	1	0	0	52,5
4	X6	0	180	1	1	2	3	0	1	0	180
5	X7	0	240	3	1	2	1	0	0	1	80
6	Δj=Zj-Cj		0	↑-15	-10	-15	-11	0	0	0	

Максимальне по модулю |Δj|=|Zj-Cj|=15, тому до базису включимо змінну X_1 (можна включати X_3). Отже перший стовбець є напрямним. В комірці К3 задамо формулу для обчислення $\theta_1 := C3/D3$. Отримаємо $\theta_1 = 52{,}5$. Розповсюдимо дану формулу на комірки К4 та К5. Отримаємо min{52,5;180;80}=52,5, тому напрямним є перший рядок, а розв’язний елемент таблиці $a_{11}=4$. Переходимо до наступної таблиці. Для цього задаємо формули для визначення елементів стовпця $X_{iбаз}$ таким чином, щоб розповсюдити їх на всі комірки нової таблиці. В комірці С7 створюємо формулу $a_{01}^{(1)} = C3/\$D\$3$. Елемент комірки D3 зафіксували клавішею F4. Отримали 52,5. Нагадаємо, що перехід здійснюється за формулою:

$a_{ij}^{(n)}=\frac{a_{lk}\cdot a_{ij}-a_{lj}\cdot a_{ik}}{a_{lk}}$, де a_{lk} – розв’язний елемент попередньої таблиці (в нашому випадку це $a_{11}=4$), n – крок ітерації. Для комірки С8 формула переходу матиме вигляд:

$a_{02}^{(1)}=\frac{a_{11}\cdot a_{02}-a_{21}\cdot a_{01}}{a_{11}}$, а для комп"ютерної реазації

C8=($D$3*C4-$D$4*C3)/$D$3.

Створюємо формулу для елемента $a_{03}^{(1)}$ нової таблиці C9=($D$3*C5-$D$5*C3)/$D$3.

Виділяємо утворений стовпець та розповсюджуємо формулу (вправо) на всю таблицю. Таким чином перехід до нової таблиці з допомогою симплекс-методу виконано. Якщо перехід виконано правильно то в напрямному стовпці нової таблиці отримаємо базисний вектор $a_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Знайдемо елементи останнього рядка. Створимо формулу у комірці C10. C10=СУММПРОИЗВ($B$7:$B$9;C7:C9). Розповсюдимо її на комірку D10 та доповнимо -D1. Отримали формулу, яку розповсюдимо на всі комірки і цим завершено перший крок та отримаємо нову таблицю:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
				15	10	15	11	0	0	0	
	БАЗИС	Сіbaз	Хіbaз	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	θі
7	X1	15	52,5	1	0,5	0,5	0,75	0,25	0	0	105
8	← X6	0	127,5	0	0,5	1,5	2,25	-0,25	1	0	85
9	X7	0	82,5	0	-0,5	0,5	-1,25	-0,75	0	1	165
10	Δj=Zj-Cj		787,5	0	-2,5	↑-7,5	0,25	3,75	0	0	

З останньої таблиці, оскільки $max\{|-2{,}5|;|-7{,}5|\} = 7{,}5$ то стовпчик із змінною X_3 є напрямним і X_3 піде в базис замість X_6. Знаходимо θ_1: K7:=C7/F7. Розповсюдимо формулу (вниз) на інші дві комірки. Оскільки θ_2=min$\{105,85,165\}$=85 то другий рядок є напрямним, а розв'язний елемент $a_{23}^{(1)}$=1,5. Створюємо формули для переходу у стовпці С:

C11=$a_{01}^{(2)}$=($F$8*C7-$F$7*C8)/$F$8; C12=$a_{02}^{(2)}$ =C8/$F$8;

C13=$a_{03}^{(2)}$=($F$8*C9-$F$9*C8)/$F$8.

Виділяємо утворені в стовпці С формули та розповсюджуємо їх на всі комірки таблиці і завершуємо перехід створенням формули в останньому рядку. В результаті отримаємо таблицю:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
				15	10	15	11	0	0	0	
	БАЗИС	Сібаз	Хібаз	Х1	Х2	Х3	Х4	Х5	Х6	Х7	θі
11	←Х1	15	10	1	1/3	0	0	1/3	- 1/3	0	30
12	Х3	15	85	0	1/3	1	1,5	- 1/6	2/3	0	255
13	Х7	0	40	0	- 2/3	0	-2	- 2/3	- 1/3	1	
14	Δj=Zj-Cj		1425	0	↑ 0	0	11,5	2,5	5	0	

Оскільки всі оцінки в останньому рядку третьої таблиці невід'ємні, то це означає, що отриманий розв'язок оптимальний F_{max}=1425 і $X_{опт}^{(1)}$=(10;0;85;0;0;0;40). Оскільки оцінка в останній строчці для змінної X_2 дорівнює нулю та їй відповідає небазисний стовбець, то це означає, що існує альтернативний розв'язок. Знайдемо θ_i користуючись напрямним стовпцем X_2. $\theta_1 = 30$, θ_2=255. θ_1 min тому напрямним буде перший рядок (розв'язний елемент $a_{12}^{(2)}$=1/3).

Задамо формули для елементів першого стовпця та перейдемо до наступної симплекс-таблиці:

C15=$a_{01}^{(3)}$=C11/$E$11;   C16=$a_{02}^{(3)}$=($E$11*C12-$E$12*C11)/$E$11;

C17=$a_{03}^{(3)}$=($E$11*C13-$E$13*C11)/$E$11;

C18=СУММПРОИЗВ($B$15:$B$17;C15:C17).

Отримаємо:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
				15	10	15	11	0	0	0
	БАЗИС	Сібаз	Хібаз	Х1	Х2	Х3	Х4	Х5	Х6	Х7
15	Х2	10	30	3	1	0	0	1	-1	0
16	Х3	15	75	-1	0	1	5,5	-0,5	1	0
17	Х7	0	60	2	0	0	-2	0	-1	1
18	Δj=Zj-Cj		1425	0	0	0	11,5	2,5	5	0

З цієї таблиці отримаємо другий оптимальний розв'язок : $X_{опт}^{(2)}$=(0;30;75;0;0;0;60), В нижніх строчках останніх двох таблиць (стопці

X_5, X_6, X_7) оптимальний розв'язок двоїстої задачі $Y_{опт}$=(2,5;5;0) і $Y_{min}=F_{max}$=1425, за першою теоремою двоїстості.

Проведемо економічний аналіз першого оптимального плану (Для другого аналогічно).

X_1=10 – означає, що продукція А випускається в кількості 10 одиниць;

X_2=0 – означає, що продукція В не випускається;

X_3=85 – означає, що продукція С випускається в кількості 85 одиниць;

X_4=0 – означає, що продукція D не випускається;

X_5=0 – означає, що ресурс 1 використовується повністю;

X_6=0 – означає, що ресурс 2 використовується повністю;

X_7=40 – означає, що ресурс 3 використовується частково, утворюючи залишок у розмірі 40од..

Отже з допомогою засобів Microsoft Excel можна отримати повний покроковий розв'язок оптимізаційної задачі лінійного програмування, а також двоїстої задачі, що дає змогу проводити економічний аналіз та шукати додаткові характеристики. При цьому для переходу до наступної симплекс-таблиці потрібно створювати формули переходу фіксуючи в них елементи напрямного стовпця. Запропонована методика може бути розповсюджена на метод штучного базису, двоїстий симплекс-метод та метод Гоморі (із застосуванням додаткових функцій).

Запропонований метод можна використовувати для підготовки варіантів завдань, а також для отримання розв'язків. Наприклад (див. умову прикладу):

Номер варіанта N=10k-8, де k=1,2,3,…,10

Ресурси	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції				Запаси ресурсів
	A	B	C	D	
1	3	1	3	2	59k
2	4	3	3	1	67k
3	3	5	1	2	75k
Ціна	20k	12k	17k	10k	

Ця умова підходить для номерів у списку N={2,12,22,…,92}(значення яких закінчуються на 2). Для N і k виділити окремі комірки. Першу симплекс-таблицю формувати враховуючи формули для запасів ресурсів та ціни. Отримавши розв'язок для N=2 (k=1) та змінюючи в заданій комірці N, отримуємо всі інші розв'язки. Аналогічно потрібно попрацювати з іншими дев'ятьма таблицями, отримавши таким чином 100 варіантів завдань (із розв'язками) протягом однієї години.

Використана література:

1. Гетманцев В.Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування.:Навчальний посібник.-К.:Либідь,2001.-256с.
2. Івченко І.Ю. Математичне програмування.:Навчальний посібник.-К.:Центр учбової літератури,2007-232с.
3. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування.:Навчальний посібник.-К.:КНЕУ,2005-452с.

Аннотация

Одним из главных методов линейного программирования является симплекс. В статье предложена пошаговая реализация этого метода при решении экономических задач оптимизации средствами MS Excel.

Ключевые слова: симплекс-метод, линейное программирование, экономические задачи.

Annotation
One of the main methods of linear programming is a simplex. In the article incremental realization of this method is offered at the decision of economic tasks of optimization facilities MS Excel.
Key words: simplex-method, linear programming, economic tasks.