

Застосування диференціальних рівнянь в електротехніці

Ілля Чорний, Володимир Листопад

Національний університет харчових технологій, Київ,

Україна

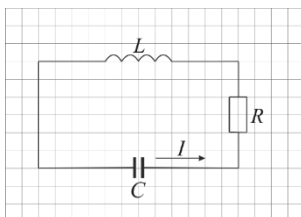
Володимир Шоха

Коледж технологій та дизайну КНУТД, Київ, Україна

Вступ. Створення математичних моделей електричних кіл, зокрема у вигляді диференціальних рівнянь другого порядку, є однією із актуальних сучасних задач електротехніки.

Матеріали і методи. Під час дослідження коливань струму в електричних колах в переважній більшості випадків розв'язання змодельованої ситуації зводиться до вирішення задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Побудуємо модель дослідження вільного коливання струму в замкненому електричному контурі. Подамо математичний опис у вигляді диференціального рівняння з готовим загальним розв'язком.

Результати. Задача. Дослідити малі вільні коливання струму I в замкненому електричному контурі, складеного з послідовно з'єднаних елементів: конденсатора ємності C , котушки індуктивності L і активного опору R (див. мал. 1), якщо, $I(0) = 0$ $I'(0) = I_0$.



Малюнок 1

За законом Кірхгофа алгебраїчна сума електрорушійних сил в замкненому контурі дорівнює нулю: $u_L + u_R + u_C = 0$.

Оскільки $u_L = -Ld^2q/dt^2$, $u_C = -q/C$, $u_R R dq/dt$, $I = dq/dt$, отримаємо

диференціальне рівняння другого порядку: $I'' + \frac{R}{L}I' + \frac{1}{LC}I = 0$.

Загальний розв'язок рівняння: $I = e^{-\frac{Rt}{2L}}(C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t)$, де

$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ - частота коливань струму в контурі. Враховуючи

початкові умови, остаточно отримаємо: $I = \frac{I_0}{\omega} e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin \omega t$.

В контурах із слабким затуханням, які застосовуються в радіотехніці, за цей час відбувається велика кількість N коливань. Це число N служить характеристикою якості контуру: $N = \tau/T = L\omega/\pi R = Q/\pi$. Множник $Q = L\omega/R$ називається добротністю коливального контуру.

Висновки. Затухання коливань струму в контурі тим менше, чим повільніше зменшується амплітуда струму I . За проміжок часу $\tau = 2L/R$ амплітуда зменшується в e разів.

Запропонована математична модель може бути використана на практичних заняттях з електротехніки.