УДК 539.3

Е. А. Звездочкина, В. А. Толок

СМЕШАННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ*

Для полуплоскости существуют некоторые решения статических задач, такие как задача о штампе [3], концентрация напряжения в сферической области [1] и т. п. Обычно, если появляется многосвязность, то задача решается численными методами, где бесконечная область заменяется большой конечной, чтобы снизить граничный эффект. В настоящей работе предлагается численный алгоритм, который позволяет это искусственное ограничение избежать.

Рассмотрим задачу о вдавливании штампа в упругую полуплоскость. Эта задача известна как смешанная краевая задача, когда на границе заданы следующие условия.

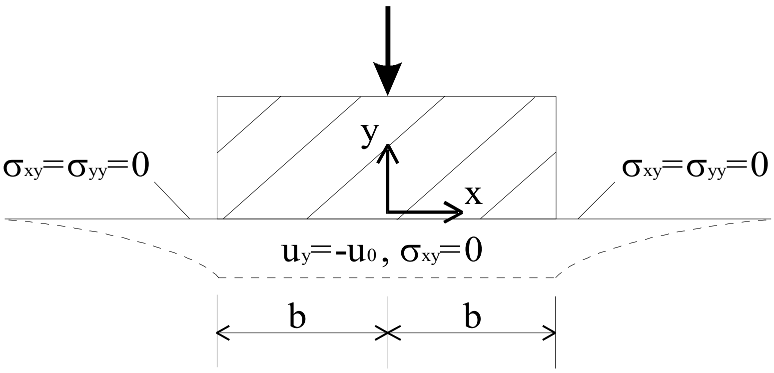


Рис. 1 Вдавливание жесткого штампа со смазкой

$$u_y = -u_0, \quad |x| \le b, \quad y=0,$$
$$\sigma_{xy} = 0, \quad |x| < \infty, \quad y=0,$$
$$\sigma_{yy} = 0, \quad |x| > b, \quad y=0.$$

Эти условия требуют, чтобы смещения u_y непосредственно под штампом, $|x| \le b$, y=0, были постоянными и равными $-u_0$ (u_0>0). Кроме того, касательные напряжения σ_{xy} равны нулю на всей границе, включая область $|x| \le b$ под штампом (предполагается, что смазка обеспечивает условия, при которых на контакте штампа с полуплоскостью не возникают касательные усилия). И нормальные напряжения σ_{yy} равны нулю при y=0 для $|x| > b$, т. е. в точках, где не заданы смещения u_y. Под штампом ($|x| \le b$, *y=0*) нормальные напряжения неизвестны.

Для решения подобных смешанных задач имеется аналитический аппарат. Например, можно применить методы, основанные на комплексных переменных [4] или на интегральных преобразованиях [5]. Здесь будет описана численная процедура решения задачи.

Задача о сосредоточенной силе, приложенной перпендикулярно к поверхности уп-ругой изотропной полуплоскости, известна как задача Фламана [5].

Как известно [2], в случае непрерывного распределения нагрузки на границе полуплоскости решение будет иметь следующий вид:

$$u_y = \frac{1}{2\pi G}\int_{b_1}^{b_2}\left\{-2(1-\upsilon)\left[\ln\sqrt{(x-\xi)^2+y^2} - \ln|L-\xi|\right] + \frac{y^2}{(x-\xi)^2+y^2}\right\}p_y(\xi)d\xi, \qquad (1)$$

---

* Работа представлена академиком АН ВШ Украины Грищаком В. З.

где L – произвольная постоянная, G,υ – коэффициенты деформации, $p_y(\xi)$ – нагрузка, заданная на границе.

Аналогичные выражения получены и для u_x, σ_{xx}, σ_{yy} и σ_{xy}.

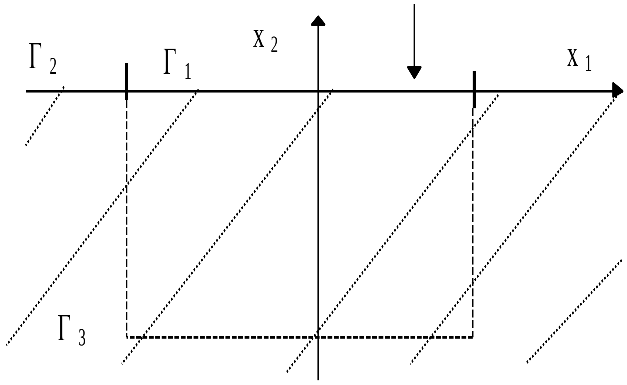


Рис. 2

Для построения алгоритма ограничим прямоугольником нашу полуплоскость, одной из сторон которого будет контур Γ_1, где заданы граничные условия (рис. 2). Разбиваем полученную границу. Для решения задачи в новой области используем МГЭ. Однако, для решения задачи методом граничных элементов не хватает граничных условий на трех сторонах новой области. Их выражаем с помощью решения задачи Фламана через неизвестные нормальные напряжения (1) на Γ_1. После этого записываем интегральное представление для данной задачи по методу граничных элементов [1]:

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi)+\int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi,x)u_j(x)d\Gamma(x)=\int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi,x)p_j(x)d\Gamma(x), \qquad (2)$$

где интегрирование выполняется по всему контуру Γ.

Подставляя конкретные точки каждого элемента в интегральное представление (2) получаем систему алгебраических уравнений, причем число неизвестных и число уравнений совпадает благодаря тому, что лишние неизвестные выражены через другие неизвестные этой системы по решению задачи Фламана (1).

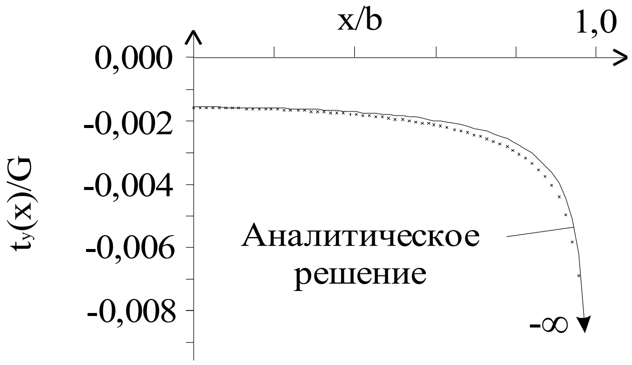


Рис. 3 Численное и аналитическое решения для напряжения под штампом со смазкой.

При решении смешанным мето-дом задачи о штампе использовалось дискретное представление прямоуголь-ника $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ с помощью постоянных граничных элементов одинаковых раз-меров. При этом каждая сторона разби-валась на одинаковое количество эле-ментов. Численное решение задачи приведено для случая, когда $u_0/b=0{,}001$ и ν=0,1, результаты представлены в безразмерном виде.

Контактные напряжения на представленной в дискретном виде гра-нице на рис. 3 сравнивается с аналитическим решением [3]. Аппроксимация была найдена путем разбиения штампа по ширине и ограничивающего контура Γ_3, начиная с 21 элемента до 161 элемента. Сходимость при этом наблюдалась хорошая. В данном случае взято разбиение по 161 элементу. Следовательно, эта аппроксимация включала решение системы из 1932 уравнения. Как видно численные результаты находятся в хорошем согласии с аналитическим решением , за исключением точек непосредственно у края штампа, где теоретически напряжение бесконечно.

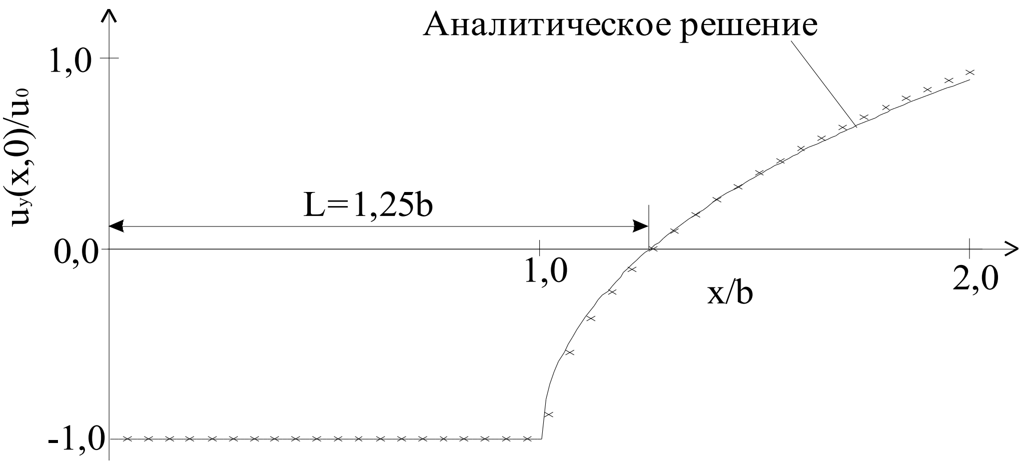
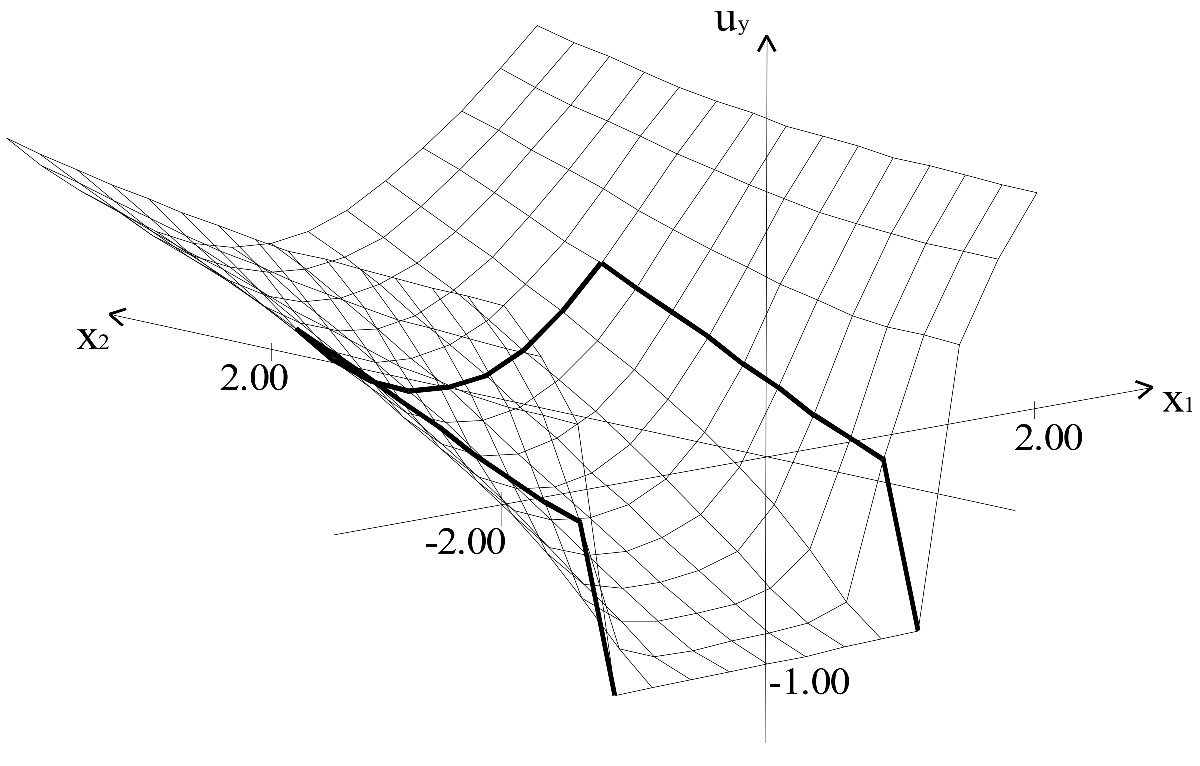


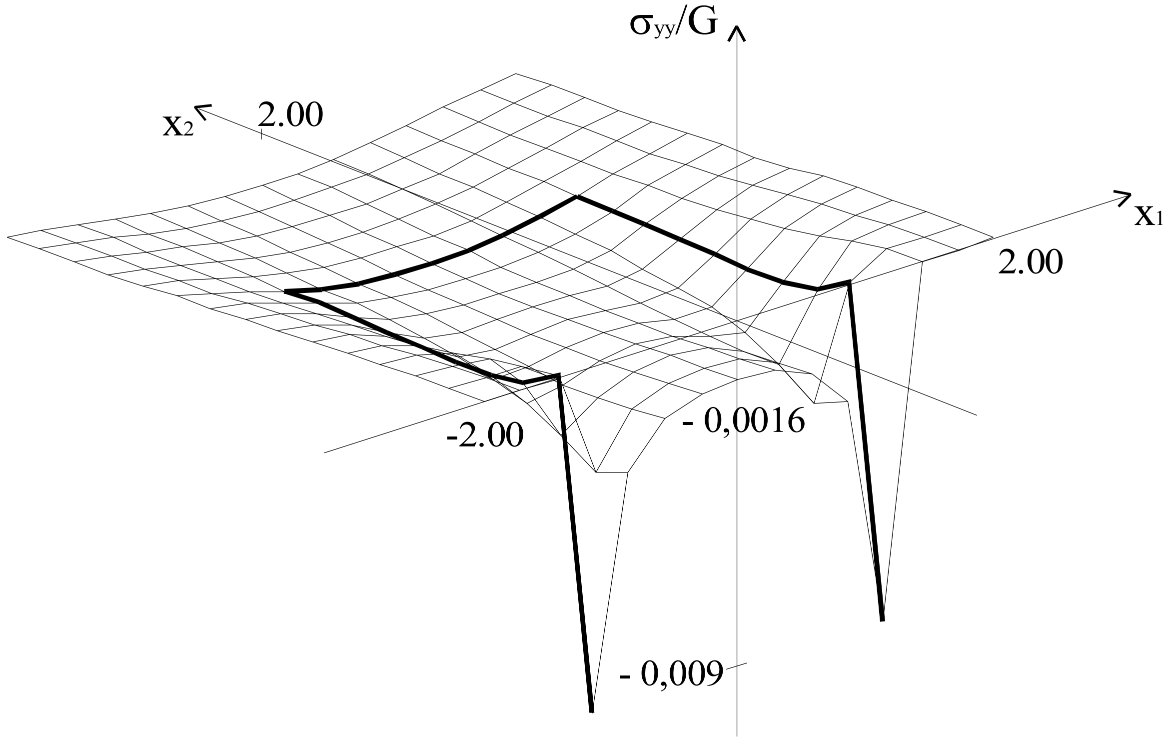
Рис. 4 Численное и аналитическое решения для смещений границы полуплоскости в задаче о штампе.

Значения для $u_y(x,0)$, рассчитанные таким способом, сопоставляются на рис. 4 с аналитическим решением. Результаты вновь даны в безразмерной форме и пригодны для любых значениях u_0 и b.

Смещения и напряжения в любой точке полуплоскости $y \leq 0$ выражаются в середине прямоугольника по методу граничных элементов, в остальной части полуплоскости через решение задачи Фламана (1).



а)



b)

Рис. 5 Численное решение a) для смещений и b) для напряжений в полуплоскости под штампом со смазкой

На рис. 5 a) и b) приведены графики распределения смещений по оси Oy и нормальных напряжений для части полуплоскости, с обозначенным на них контуром Γ_3. Как видно из рисунков при переходе через контур Γ_3 нет скачков и решение довольно гладкое.

Используя постановку вышеприведенной задачи, рассмотрим задачу о вдавливании штампа в полуплоскость с включением, на границе которого задано нормальное давление. Под включениями мы понимаем наличие многосвязности с заданными граничными условиями.

Пусть в упругой области, ограниченной прямой, с включениями различной геометрической формы, происходит упругая деформация под воздействием внешней силы.

Математически этот процесс описывается следующим образом (рис. 6):

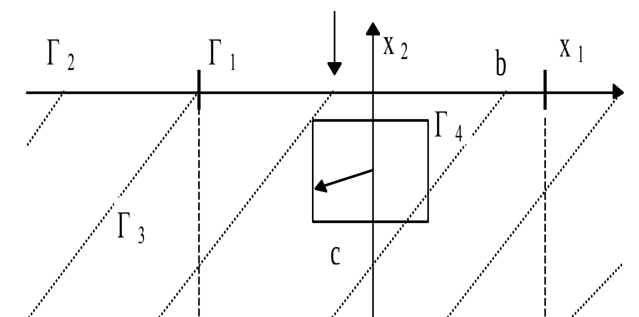


Рис. 6

$$u_y = -u_0, \quad |x| \le b, \quad y=0,$$

$$\sigma_{xy} = 0, \quad |x| < \infty, \quad y=0,$$

$$\sigma_{yy} = 0, \quad |x| > b, \quad y=0.$$

В отличии от предыдущей постановки задачи, на контуре Γ_4 за-дано давление, в данном случае нормальное напряжение. Решение задачи строится по тому же принципу, что и предыдущее. Только в связи с новой границей добавятся уравнения в систему.

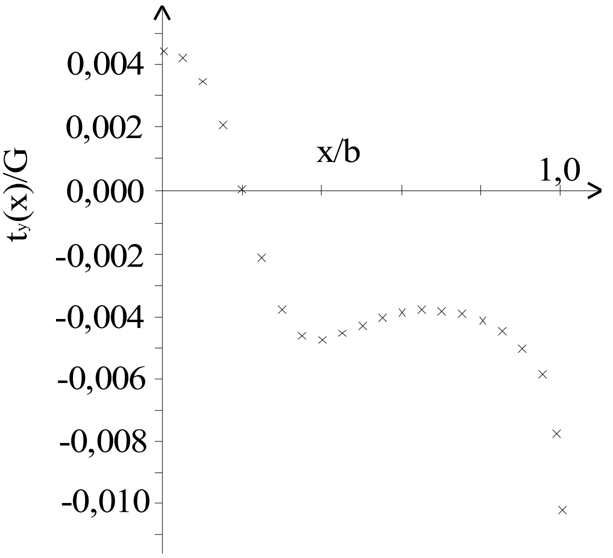
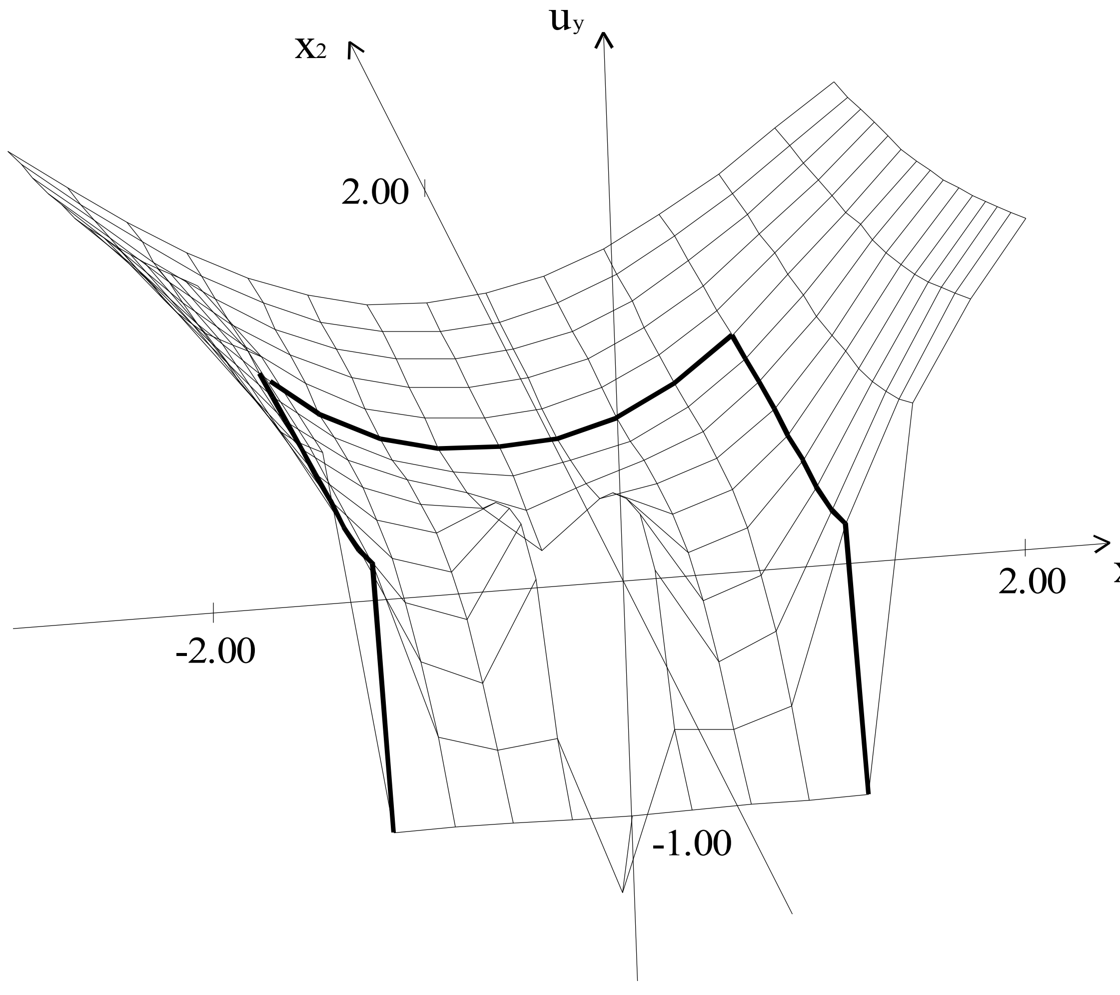


Рис. 7 Численное решение для напряжения в полуплоскости с включением под действием штампа.

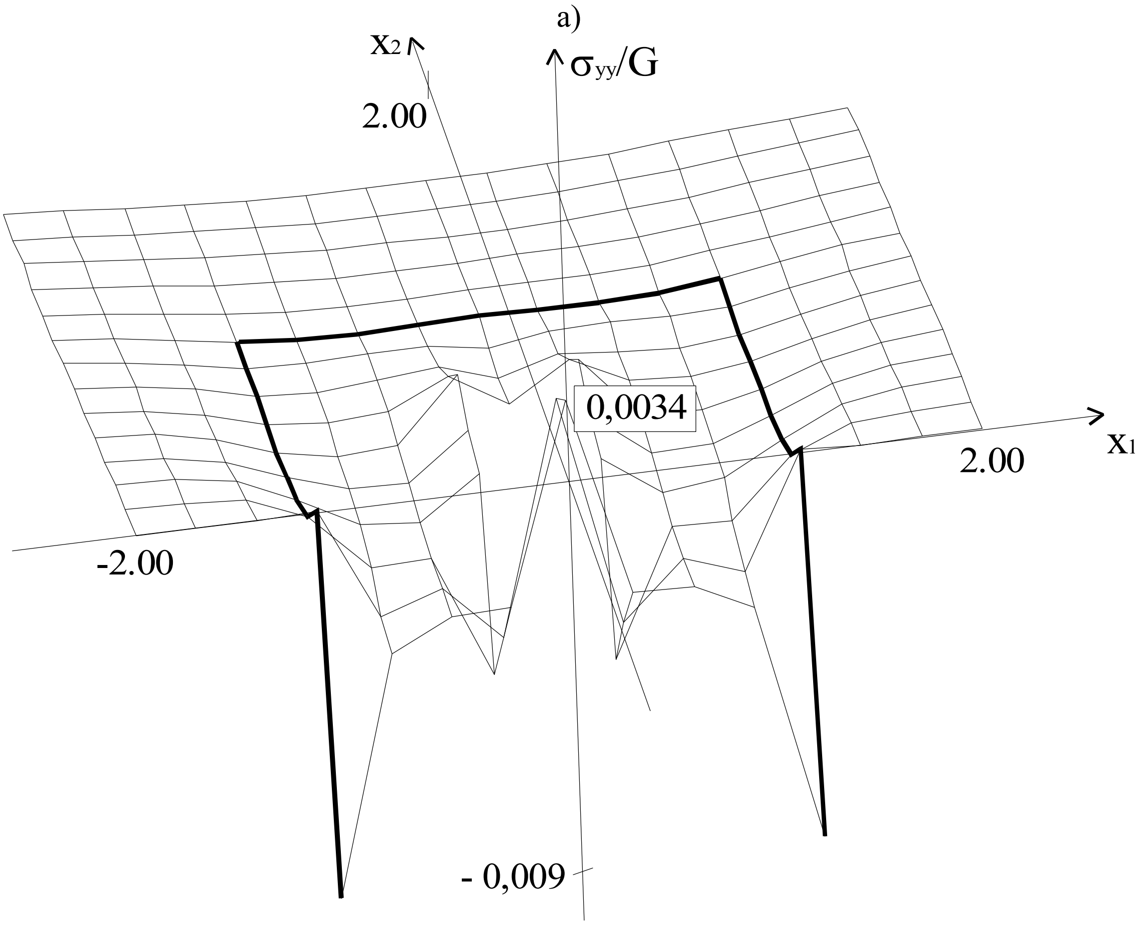
На рис. 7 представлено распределение нормальных напряжений в зоне контакта штампа и полуплоскости. Результаты даны для удобства в безразмерной форме, для тех же упругих постоянных, что и в предыдущей задаче.

Аппроксимация была найдена путем разбиения всех контуров на 31 элемент. Следовательно, эта аппроксимация включала решение системы из 1100 уравнений. Как видно, включение с заданным нулевым нормальным напряжением повлияло на распределение контактных напряжений под штампом. В районе включения возникло нормальное напряжение в зоне контакта с обратным знаком, так как давление на включении равно нулю.

На рис. 8 a) и b) представлены графики смещений u_y и нормальных напряжений в полуплоскости с заданным нулевым нормальным напряжением на включении.



a)



b)

Рис. 8 Численное решение a) для смещений и b) для напряжений
в полуплоскости с включением под штампом со смазкой

Сопоставляя решения задач для штампа в полуплоскости с включением и без можно сделать вывод, что нулевое давление, заданное на включении, существенно ослабляет сопротивление штампу.

Работа выполнялась в соответствии с проектом 77/97 Министерства образования Украины.

Литература: 1.Бреббия К., Теллес Ж. Вроубелл Л. Методы граничных элементов – М.: Мир, 1987. – 524 с. 2. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела –М.: Мир, 1987, – 328 с. 3. Снеддон И. Н. Преобразование Фурье – М.: ИЛ, 1955. 4. Sokolnikoff I. S. Mathematical theory of elasticity, 1956, 2nd edn. – Hew York: McGraw-Hill, 1956. 5. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости – М.: Наука, 1975.

О. А. Звьоздочкіна, В. О. Толок

ЗМІШАНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ’ЯЗАННЯ СТАЦІОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВПЛОЩИНИ З ВКЛЮЧЕННЯМ.

В роботі запропонован алгоритм розв’язання стаціонарних задач теорії пружності для багатозв’язних областей, створений на базі метода крайових елементів та аналітичного розв’язку задачи Фламана для півплощини. Проведен порівняльний аналіз розв’зків задачи про штамп та представлен розв’язок змішаної задачи для півплощини з включенням, на якому задано нормальне напруження.

Ye. A. Zvyozdochkina, V. A. Tolok

THE MIXED ALGORITHM OF THE SOLVING OF A STATIONARY TASK OF ELASTICITY FOR A HALF-PLANE WITH INCLUSIONS.

In work the algorithm of the solving of stationary tasks of the theory of elasticity for multicoherent areas created on the basis of a method of boundary elements and the analytical decision of a Flaman’s task for a half-plane is offered. The comparative analysis of the solutions of a task about a stamp is carried out and the solution of the mixed task for a half-plane with inclusion is submitted, on which the normal pressure is given.