# 54. АПРОКСИМАЦІЯ ОБМЕЖЕНОГО НА Z РОЗВ'ЯЗКУ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ, ЩО ВІДПОВІДАЄ РІВНЯННЮ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ, РОЗВ'ЯЗКАМИ ВІДПОВІДНИХ РІЗНИЦЕВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

**Вікторія Романенко**
*Національний університет харчових технологій*

**Вступ.** Нехай $\mathbf{B}$ – комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\overline{0}$, $L(\mathbf{B})$ – банахів простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють з $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}$, $I-$одиничний, $O-$нульовий оператори в $\mathbf{B}$. Розглянемо $A: D(A) \to \mathbf{B}$ – замкнений оператор з областю визначення $D(A) \subset \mathbf{B}$.

**Теорема 1.** Якщо відрізок $[-2,2]$ міститься в резольвентній множині оператора $A$ то знайдуться такі залежні тільки від оператора $A$ сталі $M>0,\ R>1$, що для довільної обмеженої в $\mathbf{B}$ послідовності $\{y(n): n \in \mathbf{Z}\}$, відповідного їй єдиного розв'язку $\{x(n): n \in \mathbf{Z}\}$ різницевого рівняння

$$x(n+1)+x(n-1)=Ax(n)+y(n),\ n \in \mathbf{Z}, \tag{1}$$

довільних $\{p,q\} \subset \mathbf{N}$ та відповідного набору $\{a,b; y(-p+1),\ldots,y(q-1)\}$ єдиного розв'язку $\{u(n): -p \le n \le q\}$ крайової різницевої задачі

$$\begin{cases} u(n+1)+u(n-1)=Au(n)+y(n), & -p+1 \le n \le q-1, \\ u(-p)=a, \quad u(q)=b. \end{cases} \tag{2}$$

довільного натурального числа $k,\ 1 \le k \le p+q-1$, справджується нерівність

$$\|x(-p+k)-u(-p+k)\| \le M\left(\frac{\|x(q)-b\|}{R^{p+q-k}}+\frac{\|x(-p)-a\|}{R^k}\right).$$

**Основні результати.** Розглянемо рівняння теплопровідності відносно комплекснозначних функцій при деякому $\varepsilon>0$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t,s)=\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}(t,s)-\varepsilon z(t,s)+f(t,s),\ s \in [0,2\pi],\ t \in \mathbf{R},$$

що є аналогом різницево-диференціального рівняння

$$\frac{z(n+1,s)-z(n-1,s)}{2\tau}=\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}(n,s)-\varepsilon z(n,s)+f(n,s),\ s \in [0,2\pi],\ n \in \mathbf{Z},$$

де $\tau>0$ - крок дискретизації. Покладемо $\mathbf{B}=L_2([0,2\pi])$ і перепишемо наше рівняння у вигляді

$$x(n+1)+x(n-1)=Ax(n)+y(n),\ n\in\mathbf{Z},$$

позначивши

$$x(n)(s):=i^n z(n,s),\ n\in\mathbf{Z},\ s\in[0,2\pi],$$

$$(Au)(s)=2\tau i\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s)-2\tau\varepsilon iu(s),\ s\in[0,2\pi],$$

$$y(n)(s):=i^{n+1}f(n,s),\ s\in[0,2\pi],\ n\in\mathbf{Z}.$$

Спектр оператора $A$ є зсуненим і домноженим на сталу спектром оператора другої похідної в $L_2([0,2\pi])$ і рівний

$$\sigma(A)=\{iz\mid z\in(-\infty,-2\tau\varepsilon]\}.$$

Застосуємо теорему 1: включення відрізка $[-2,2]$ у резольвентну множину оператора $A$ виконується, бо спектр оператора $A$ лежить на уявній осі на додатній відстані від початку координат. Згідно з теоремою, існують такі сталі $M_1>0,\ R_1>1$, що для довільної послідовності визначених на $[0,2\pi]$ вимірних функцій $\{y(n):n\in\mathbf{Z}\}$,що задовольняє умову

$$\sup_{k\in\mathbf{Z}}\int_0^{2\pi}|y(k,s)|^2\,ds<+\infty,$$

відповідного їй єдиного розв'язку $\{x(n):n\in\mathbf{Z}\}\subset L_2([0,2\pi])$ різницевого рівняння (2), довільних $\{p,q\}\subset\mathbf{N}$ та відповідного $\{a,b;y(-p+1),...,y(q-1)\}\subset L_2([0,2\pi])$ єдиного розв'язку $\{u(n):-p\le n\le q\}$ крайової різницевої задачі (3), довільного $k,\ 1\le k\le p+q-1$, справджується нерівність

$$\int_0^{2\pi}|x(-p+k,t)-u(-p+k,t)|^2\,dt\le M\left(\frac{1}{R^{p+q-k}}\left(\int_0^{2\pi}|b(t)|^2\,dt+\sup_{k\in\mathbf{Z}}\int_0^{2\pi}|y(k,t)|^2\,dt\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{R^k}\left(\int_0^{2\pi}|a(t)|^2\,dt+\sup_{k\in\mathbf{Z}}\int_0^{2\pi}|y(k,t)|^2\,dt\right)\right).$$

Таким чином, при довільних функціях $a,b\in L_2([0,2\pi])$, які за нормою не перевищують норми $y(k)$ при деякому $k$, точність наближення на деякому відрізку всередині $[-p,q]$, що знаходився на достатньо великій відстані $l$ від його країв, буде обернено пропорційна величині $\sup_{k\in\mathbf{Z}}\int_0^{2\pi}|y(k,s)|^2\,ds$ і прямо пропорційна $R^l$.

**Висновки.** Показана можливість наближення обмеженого на $Z$ розв'язку різницевого рівняння, що відповідає рівнянню теплопровідності, розв'язками відповідних різницевих крайових задач та знайдено оцінку точності наближення. Наведений результат є продовженням досліджень роботи [1]

## ЛІТЕРАТУРА

1. Романенко, В. М. Апроксимація обмежених розв'язків лінійних різницевих рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами / В. М. Романенко // Вісник Київського університету, серія фізико-математичні науки. – 2011. – Вип.4. – С. 103–106.