

В.Р. Кулинченко, доктор техн. наук
В.Л.Завьялов, кандидат технических наук, **Т.Г.Мисюра**, асп.
Національний університет харчових технологій
V.R. Kulintchenko, doctor of tecn science
V.L. Zavialov, cand. of tecn science **T.G.Misiura**, asp.
National university of food technologies

Вплив поверхнево-активних речовин (ПАР) на динаміку спливаючої бульбашки
Influence of exterior-aktive matters (EAM) is on dynamics of
Pop-up bubble

Виконано аналіз експериментальних і теоретичних робіт з гідродинаміки спливаючої бульбашки. Представлено відповідні дані про її форму, швидкість спливання в гідродинамічному полі при різному стані її поверхні й числах Рейнольдса. Аналізується вплив ПАР на названі характеристики.

Ключові слова: бульбашка, спливання, гідродинаміка, поверхнево-активні речовини.

Fulfil analyze of experimental and theoretical studies of the hydrodynamics of a floating up bubble are presented. The data on the bubble shape, rate of ascension and hydrodynamic field in relation to the states of its surface and Reynolds numbers are given. An effect of surfactants on the mentioned characteristics is analyzed.

Key words: bubble, floating up, hydrodynamics, surfactants.

Выполнен анализ экспериментальных и теоретических работ из гидродинамики всплывающего пузырька. Представлены соответствующие данные о ее форме, скорость всплытия в гидродинамическом поле при разном состоянии ее поверхности и числах Рейнольдса. Анализируется влияние ПАВ на названные характеристики.

Ключевые слова: пузырек, всплытие, гидродинамика, поверхностно-активные вещества.

Теоретичний розгляд багатьох технологічних процесів неможливий без необхідної інформації щодо швидкості спливання й гідродинамічного поля бульбашки. Перша із цих величин може бути порівняно легко знайдена експериментально, у той час як для знаходження поля швидкостей рідини навколо бульбашки такий спосіб неприйнятний по двох причинах: по-перше, це досить складно, особливо у випадку дуже малих бульбашок; по-друге, отримані таким способом дані неможливо використати в подальших аналітичних розрахунках, що значно ускладнює рішення всієї задачі. У зв'язку із цим для знаходження гідродинамічного поля бульбашки використовується рівняння Нав'є-Стокса [1, 2], рішення якого повинно задовольняти відповідній граничній умові на поверхні бульбашки. При цьому виникають дві основних труднощі. Перша з них полягає в тому, що назване вище рівняння не допускає аналітичного рішення в загальному виді. Цю трудність можна подолати у двох крайніх випадках, коли бульбашка спливає при малих числах Рейнольдса ($Re < 1$, стоксовський режим) або при великих ($Re \gg 1$, потенціальний режим). Звичайно число Рейнольдса для сфери визначається по формулі

$$Re = \frac{2RU\rho}{\eta}, \quad (1)$$

де R – радіус бульбашки; U – швидкість спливання; ρ – густина рідини, η – її динамічна в'язкість.

У першому випадку з рівняння Нав'є-Стокса може бути вилучений інерційний член, а в другому – в'язкий. На жаль, отримані таким способом рішення не охоплюють всі

практично важливі випадки, для проміжних значень Re доводиться прибгати до чисельних або емпіричних методів рішення.

Другі труднощі теоретичного розрахунку гідродинамічного поля бульбашки пов'язані з конкретизацією граничних умов на її поверхні, тому що остання може бути в тому або іншому ступені загальмована адсорбційним шаром ПАР [4], які практично завжди присутні в рідині. Незважаючи на те що питання про будову динамічного адсорбційного шару бульбашки й розподіл швидкості на її поверхні й поблизу неї був підданий глибокому аналізу [3], все-таки досліджені далеко не всі можливі комбінації значень чисел Рейнольдса, концентрації ПАР і їх активностей. У цьому зв'язку не завжди можна апіорі судити про стан поверхні бульбашки, особливо в області великих чисел Рейнольдса. Значну ясність у це питання можуть внести експериментальні дані по швидкості спливання бульбашок.

Швидкість спливання бульбашок розміром до 100 мкм показала, що вони поводяться, як тверді кульки, тобто їхня поверхня нерухома, а швидкість виражається формулою

$$U_s = \frac{2}{9} \frac{R_s^2 g \rho}{\eta}, \quad (2)$$

де індекс S означає стоксівський (в'язкий) режим спливання; g – прискорення сили тяжіння.

Цей результат підтверджений у ряді робіт, де на ряду з бульбашками розглядалися краплі різних рідин, виявився в суперечності з теоретичною формулою Адамара - Рыбчинского, відповідно до якої

$$U_s = \frac{2(\rho - \rho') R_s^2 g}{\eta} \frac{\eta + \eta'}{2\eta + 3\eta'}, \quad (3)$$

де ρ' і η' – відповідно густина і в'язкість речовини краплі.

З огляду на те, що густина і в'язкість газу значно менші, ніж у рідини, на підставі формули (3) можна отримати:

$$U_s = \frac{1}{3} \frac{R_s^2 g \rho}{\eta}. \quad (4)$$

Таким чином, формула (2), що може бути отримана з (3) у випадку, коли $\eta' \gg \eta$, відрізняється від (4) співмножником $2/3$.

Для усунення виниклого протиріччя було висунуто кілька теорій. Згідно Бонду й Ньютона, гальмування поверхні досить дрібних бульбашок обумовлене тим, що при радіусі останніх менше деякого критичного значення R_{kr} , в'язкі напруги на границі розділу фаз урівноважуються градієнтом поверхневого натягу. Останній викликаний градієнтом температури міжфазної поверхні, що виникає в результаті того, що верхня півсфера бульбашки розтягується, а нижня стискується в'язкими шарами. Ґрунтуючись на міркуваннях симетрії й дослідних даних, для R_{kr} запропонована наступна формула

$$R_{kr} = \sqrt{\frac{\sigma}{\Delta \rho g}}, \quad (5)$$

де σ – поверхневий натяг; $\Delta \rho$ – різниця густин краплі (бульбашки) і середовища.

Експериментальна перевірка не підтвердила абсолютну справедливість формули (5). Так, циркуляція газу всередині бульбашки, викликана рухом його поверхні, спостерігалася безпосередньо завдяки введенню в атмосферу бульбашки туману хлориду амонію. Визначені таким способом значення R_{kr} і обчислені по (5) представлені в табл.1.

Таблиця 1

Критичний радіус крапель для різних систем

| Система | R_{kr} (дослід), мм | R_{kr} (5), мм | Автори |
|----------------------------|-----------------------|------------------|----------------------|
| Повітря у воді | 1,1 | 2,5 | W.N.Bond, D.A.Newton |
| Повітря в цукровому сиропі | 1,1 | 2,5 | W.N.Bond, D.A.Newton |
| Ртуть у цукровому сиропі | 1,2 | 3,0 | W.N.Bond, D.A.Newton |

| | | | |
|---|--------------|------------|-------------------------|
| Вода в касторовому маслі | 7,7 | 7,0 | W.N.Bond, D.A.Newton |
| Повітря в білому маслі | менше 0,006 | 1,2 | F.H.Garner, D.Hammerton |
| Повітря в гліцерині | 1,25 | 2,25 | F.H.Garner, D.Hammerton |
| Повітря у воді + 2% гідроксилату целюлози | 2,5 | 2,5 | F.H.Garner, D.Hammerton |
| Повітря в аніліні | більше 0,005 | 4,2 | H.D.Arnold |
| Повітря в маслиновому маслі | 0,004 | 1,73 | A.A.Лебедев |

Як видно табл.1, тільки у двох випадках з дев'яти спостерігається узгодження теорії з дослідними даними, в іншому ж розбіжність досягає значних величин.

Для пояснення «твердіння» дрібних бульбашок Бусинеск висунув гіпотезу про існування тонкого, макроскопічного шару рідини підвищеної в'язкості поблизу поверхні розділу фаз. Відповідно до цієї гіпотези, швидкість спливання бульбашок при $Re < 1$

$$U_s = \frac{2R_s^2 g \rho \eta + 2e / (3R_s)}{3\eta \quad 2\eta + 2e / R_s}, \quad (6)$$

де e – так званий коефіцієнт поверхневої в'язкості, що виражає відношення поверхневого натягу до швидкості відновлення поверхні рідини. З формули (6) видно, що для великих бульбашок поверхневою в'язкістю e можна знехтувати в порівнянні з об'ємною η , однак для дрібних, може виявитися, що $e/R_s \gg \eta$. Таким чином, у теорії Бусінеска феноменологічний параметр e залежить тільки від властивостей поверхневого шару й не залежить від властивостей об'ємної фази.

Грунтуючись на тім, що швидкість руху крапель й бульбашок істотно залежить від наявності й концентрації ПАР, які завжди присутні в реальних системах, Фрумкіним запропонована теорія адсорбційного гальмування поверхні. Відповідно до цієї теорії в'язки напруги на поверхні бульбашки врівноважуються градієнтом поверхневого натягу, що виникає внаслідок градієнта адсорбції ПАР. Останній же обумовлений особливостями формування бульбашки залежно від режиму спливання останньої, швидкості адсорбції й швидкості об'ємної й поверхневої дифузії молекул ПАР. Згідно [3]

$$U_s = \frac{2R_s^2 g \rho \eta + \gamma}{3\eta \quad 2\eta + 3\gamma}, \quad (7)$$

де γ - коефіцієнт гальмування.

Таблиця 2

Коефіцієнт гальмування поверхні бульбашки шаром ПАР

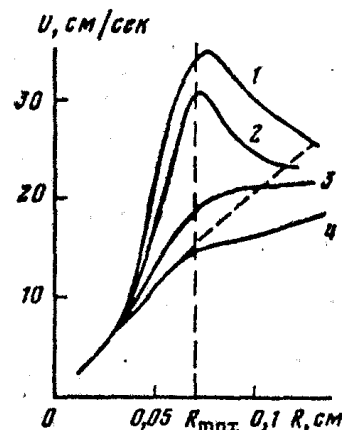
| Характеристика ПАР | γ | Позначення |
|--|--|---|
| Швидкість адсорбції лімітує подачу ПАР на поверхню бульбашки, поверхневою дифузиею можна знехтувати | $\frac{2\Gamma_0}{3R_s \alpha} \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma}$ | σ – поверхневий натяг; Γ – адсорбція; Γ_0 – рівноважна адсорбція на нерухомій поверхні; $\alpha = -j/(\Gamma - \Gamma_0)$; j – потік адсорбції-десорбції; c_0 – концентрація ПАР; T – абсолютна температура; D – коефіцієнт об'ємної дифузії; R – газова стала; δ – товщина дифузійного шару; D_s – коефіцієнт поверхневої дифузії |
| Швидкість подачі ПАР на поверхню бульбашки лімітується швидкістю об'ємної дифузії, поверхневою дифузиею можна знехтувати | $\frac{2RT\Gamma_0^2 \delta}{3DR_s c_0}$ | |
| Погано розчинне ПАР, вирівнювання концентрацій відбувається за рахунок поверхневої дифузії | $\frac{2\Gamma_0 R}{D_s} \left \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} \right $ | |

У табл.2 представлені вирази для γ , що відповідають різним комбінаціям зазначених вище властивостей ПАР, отримані в припущенні, що $\Gamma - \Gamma_0 \ll \Gamma_0$ [3]. Як видно, при досить високій величині адсорбції Γ_0 або при досить малому радіусі бульбашки R_s , або коефіцієнта поверхневої дифузії D_s (у випадку нерозчинних ПАР) може виконуватися нерівність $\gamma \gg \eta$. У цьому випадку формула (7) переходить в (2). Зовнішня подібність формул (6) і (7) чисто

випадкова, тому що перша отримана в припущенні про те, що гальмування визначається лише властивостями граничного шару, тоді як друга виводиться з урахуванням властивостей об'ємної фази.

Експериментально вплив ПАР на швидкість спливання бульбашок вивчалася багатьма дослідниками. Особливо сильно їхня дія проявляється на порівняно великих бульбашках, що спливають при $Re \gg 1$, тому що дрібні бульбашки навіть у ретельно очищеній рідині спливають як тверді кульки. Останнє може мати двояке пояснення. Або незначні сліди забруднень, які завжди залишаються в рідині, все-таки здатні гальмувати поверхню бульбашки, або це гальмування відбувається внаслідок іншого, невідомого поки механізму (наприклад, через структурування рідини на поверхні досить дрібної бульбашки й утворення нерухомої оболонки чи в'язкої еластичної плівки).

Рис.1. Швидкість спливання бульбашок у водяних розчинах додецилсульфату натрію: 1 – дистильована вода; 2 – 10^{-6} моль/л; 3 – $1,2 \cdot 10^{-5}$ моль/л; 4 – $10^{-3} \dots 10^{-4}$ моль/л. Пунктирна крива відповідає твердим бульбашкам в дистильованій воді чи в мілімолярному розчині (скляні кульки з густиною 2370 кг/м^3)



З рис.1 видно, що при деякому $R = R_{\max} \approx 0,7 \text{ мм}$ функція $U(R)$ досягає максимуму, а потім більш-менш різко убуває. Аналогічний результат отриманий при використанні в якості ПАР ізоамілового спирту, терпинолу, а також інших речовин. Таке поведіння кривих $U(R)$ обумовлено винятково порушенням сферичності бульбашки при збільшенні її розмірів, а дія ПАР виражається в зсуві точки максимуму вліво й зменшенні його абсолютної величини.

Аналіз кривих на рис.1 показує, що аж до $R = 0,3 \text{ мм}$ ($Re = 36$) бульбашки спливають як тверді сфери навіть у дистильованій воді, а при концентрації ПАР $c \geq 10^{-3}$ моль/л – аж до $R = 0,65 \text{ мм}$ ($Re = 182$). Характерно, що навіть при настільки малих концентраціях, як 10^{-6} моль/л, швидкість бульбашки істотно падає. Розрахунок швидкостей спливання бульбашки при числах Рейнольдса $50 \dots 1500$, у припущенні збереження сферичної форми й виключенням гальмування наявністю ПАР (тензор в'язких напруг на поверхні бульбашки перетворюється в нуль), показав, що гідродинамічне поле такої бульбашки дуже слабо відрізняється від поля ідеальної рідини, а швидкість спливання може бути виражена формулою:

$$U_p = \frac{R_p \rho g}{9\eta}, \quad (8)$$

де індекс P означає потенціальний ($Re \gg 1$) режим спливання.

Ця формула дає трохи завищені (до 30 %) у порівнянні з дослідними значеннями U_p (рис.1, крива 1). Однак якщо врахувати, що при виводі (8) не враховувався опір форми, а також порушення сферичності бульбашками, що настає при $Re \approx 400$, то можна прийти до висновку, що поверхня таких бульбашок дійсно незагальмована (при відсутності ПАР), а їхнє гідродинамічне поле всюди може бути представлено як поле ідеальної рідини.

Механізм дії ПАР може бути представлений у такий спосіб [3]. На поверхні спливаючої бульбашки формується динамічний адсорбційний шар ПАР, який через значні конвективні потоки зосереджується у кормовій зоні бульбашки й утворює більш-менш широку «тверду» чашечку. Поява такої чашечки повинне неминуче привести до розширення турбулентної зони за бульбашкою, а отже, і до збільшення сили опору, обумовленою турбулентністю, тому що остання $F_T \sim U_p^2 S$, де S – площа бульбашки, покрита турбулентним слідом. Природно, це приводить до зниження швидкості бульбашки. Якщо концентрація ПАР і її активність досить великі, то внесок турбулентної сили опору може набагато перевищувати в'язкісну складову, яка згідно (9) пропорційна U . При русі у воді бульбашки радіусом приблизно 0,5 мм, досить 2 % покриття її площі моношаром ПАР, щоб виник

квадратичний закон опору від швидкості [3]. При цьому частина поверхні бульбашки виявиться повністю загальмованою, а інша буде рухливою.

Той факт, що крива 4 на рис.1 збігається із кривою для твердої сфери аж до R_{\max} , вимагає визнати, що починаючи з деяких досить високих концентрацій ПАР поверхня бульбашки виявляється практично повністю загальмованою. Цьому може бути дане наступне пояснення. Розширення адсорбційного шару й викликане цим зменшення швидкості бульбашки приводить до зменшення конвективних потоків біля її поверхні й тим самим створює ще більш сприятливі умови для розширення адсорбційного шару. Якщо концентрація й активність ПАР досить великі, то це може зрештою привести до повного покриття його поверхні адсорбційним шаром і відповідним гальмуванням. На жаль, далеко не завжди, і при тій досить приблизно можна вказати, яка частина поверхні бульбашки, що спливає при $Re \gg 1$, повністю загальмована адсорбційним шаром ПАР.

На доказ того, що гальмування бульбашки викликане зміною стану його поверхні, а не фізичними властивостями розчину, підтверджуються вимірюваннями значення густини, стисливості, в'язкості й поверхневого натягу дистильованої води й 10^{-5} молярного розчину додецилсульфату натрію. При цьому виявилось, що зазначені вище величини практично не міняють своїх значень.

Нарешті, на підставі даних, наведених на рис.1, варто визнати, що у воді, аж до числа Рейнольдса 40, бульбашки завжди спливають як тверді кульки. З огляду на те, що при настільки низьких значеннях Re в'язкі сили роблять основний внесок в опір руху, можна прийти до висновку, що поверхня бульбашок радіусом $R \leq 0,3$ мм у силу тих чи інших причин практично повністю загальмована.

Як відзначалося вище, швидкість спливання як і гідродинамічне поле бульбашки значною мірою залежить від форми бульбашки. Тому що надалі будемо припускати, що форма бульбашки незначно відрізняється від сферичної, має сенс заздалегідь визначити границі застосовності цього допущення. Найбільш проста умова сферичності може бути отримане шляхом порівняння капілярних сил, які намагаються надати бульбашці сферичної форми, і сил гідродинамічного тиску, що прагнуть його сплюснути. У цьому випадку умову сферичності можна представити у такому вигляді [3]

$$R \ll \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}. \quad (10)$$

Для бульбашок, які спливають при малих числах Рейнольдса, їхню форму можна описати наступним рівнянням:

$$\bar{R}(\theta) = 1 - 0,21WeP_L(\cos\theta), \quad (11)$$

де $\bar{R}(\theta)$ – радіус-вектор, проведений із центра тяжіння бульбашки, віднесений до радіуса абсолютно сферичної бульбашки еквівалентного об'єму; P_L – поліном Лажандра; θ – кут, відлічуваний від верхнього полюса бульбашки; We – число Вебера, розраховане по формулі

$$We = \frac{\rho R U_s^2}{\sigma}. \quad (12)$$

З формули (11) слідує, що відхиленням від сферичності можна знехтувати при виконанні умови

$$0,21We \ll 1. \quad (13)$$

Підставляючи в (12) U_s з формули (2) на підставі (13), отримаємо

$$R \ll \sqrt[5]{\frac{100\eta^2\sigma}{g^2\rho^3}}, \quad (14)$$

що для води дає $R \ll 0,6$ мм.

Отримані дані при використанні в якості ПАР терпинолу і його вплив на форму бульбашки, що рухається, представлені в табл.3. Наведені значення R і Re , а також

концентрації терпинолу у воді, при яких бульбашка починає втрачати свою форму й сильно сплющуватися.

Таблиця 3

Залежність границі деформації бульбашки від числа Рейнольдса

| Концентрація терпинолу, мг/л | Умови стискання бульбашки в сфероїд | | Умови утворення спотвореного сфероїда | |
|------------------------------|-------------------------------------|------|---------------------------------------|------|
| | R , мм | Re | R , мм | Re |
| 0,0 | 0,65 | 400 | 2,0 | 950 |
| 3,7 | 0,65 | 300 | 2,0 | 800 |
| 7,3 | 1,2 | 400 | 2,9 | 800 |
| 22,0 | 2,0 | 500 | 2,9 | 1100 |

Таблиця 4

Вплив різних речовин на швидкість спливання й форму бульбашок

| Водяний розчин | Форма бульбашки ($R = 0,85$ мм) | Швидкість спливання, мм/с |
|--|----------------------------------|---------------------------|
| Дистильована вода | Сплющений сфероїд | 310 |
| КОН, 7мг/л | Сплющений сфероїд | 290 |
| КОН, 20...60 мг/л | Сплющений сфероїд | 270 |
| КСІ, 9 мг/л | Сплющений сфероїд | 300 |
| КСІ, 15...40 мг/л | Сплющений сфероїд | 270 |
| Терпинол, 3,7 мг/л | Злегка сплющений сфероїд | 180 |
| Терпинол, 7...88 мг/л | Сфероїд | 140 |
| Етилксантат калію, 20 мг/л | Сплющений сфероїд | 270 |
| Амілксантат калію, 25 мг/л | Сплющений сфероїд | 210 |
| 20 мг/л етилксантат калію + 3,7 мг/л терпинолу | Злегка сплющений сфероїд | 160 |
| 25 мг/л амілксантат калію + 3,7 мг/л терпинолу | Сфероїд | 140 |

У табл.4 представлені результати досліджень по впливу різних реагентів на форму й швидкість спливання бульбашок з еквівалентним радіусом 0,82 мм, звідки видно, що зі збільшенням концентрації ПАР розмір бульбашок, при якому вони перетворюються в сфероїди, росте. Останнє може здатися трохи дивним, якщо врахувати, що зі збільшенням концентрації ПАР росте величина адсорбції, а отже, зменшується поверхневий натяг бульбашки, який намагається надати йому сферичну форму [див. формули (10) і (14)]. При цьому необхідно врахувати, що ПАР, загальмовуючи поверхню бульбашки, істотно знижують його швидкість, і тем сильніше, чим більше його активність і концентрація (рис.1, табл.4). Останнє приводить до істотного зменшення деформуючого гідродинамічного тиску, що, відповідно до закону Бернуллі, пропорційно U^2 . Таким чином, на підставі отриманих даних можна судити, що при наявності достатньої кількості ПАР бульбашки зберігають у воді сферичну форму аж до радіусів порядку 1 мм.

Варто зауважити, що поверхня навіть настільки дрібних бульбашок знаходиться в коливному русі. Однак амплітуда цих коливань настільки мала, що форму бульбашки і її гідродинамічне поле в першому наближенні можна вважати стаціонарними.

Розглядаючи гідродинамічне поле бульбашки, доцільно як основний параметр використовувати не радіус бульбашки R , а число Рейнольдса Re , яке однозначно пов'язане з радіусом за допомогою співвідношення (1). При цьому доцільно виділити три основних гідродинамічних режими спливання й відповідні їм області зміни Re : стоксівський ($Re \leq 0,5$); перехідний ($0,5 < Re < 80$); потенціальний ($80 < Re < 500$). Випадки, коли числа Рейнольдса перевищують 500 не розглядаються у зв'язку з тим, що більшість практичних задач охоплюється названою областю значень Re .

Згідно [3], гідродинамічне поле стоксівських бульбашок описується розподілом типу Адамара-Рибчинського

$$\begin{aligned} u_r &= -U_s \left[1 - \frac{2\eta + 3\gamma}{2(\eta + \gamma)} \frac{R_s}{r} + \frac{\gamma}{2(\eta + \gamma)} \frac{R_s^3}{r^3} \right] \cos \theta; \\ u_\theta &= U_s \left[1 - \frac{2\eta + 3\gamma}{4(\eta + \gamma)} \frac{R_s}{r} - \frac{\gamma}{4(\eta + \gamma)} \frac{R_s^3}{r^3} \right] \sin \theta, \end{aligned} \quad (15)$$

де u_r , u_θ – відповідно радіальна і тангенціальна компоненти поля швидкостей у сферичних координатах (r, θ) , центр яких розташований у центрі бульбашки, а ось z спрямована назустріч потоку рідини. При цьому величина γ характеризує ступінь загальмованості поверхні бульбашки адсорбційним шаром ПАР (табл.2). Якщо $\gamma \gg \eta$, як це завжди має місце, то (15) набуває наступного вигляду:

$$\begin{aligned} u_r &= -U_s \left[1 - \frac{3}{2} \frac{R_s}{r} + \frac{1}{2} \frac{R_s^3}{r^3} \right] \cos \theta; \\ u_\theta &= U_s \left[1 - \frac{3}{4} \frac{R_s}{r} - \frac{1}{4} \frac{R_s^3}{r^3} \right] \sin \theta. \end{aligned}$$

Якщо ж в'язкість середовища досить велика, тобто $\eta \gg \gamma$ і поверхня рухається, то система (15) перетворюється до наступної форми:

$$\begin{aligned} u_r &= -U_s \left[1 - \frac{R_s}{r} \right] \cos \theta; \\ u_\theta &= U_s \left[1 - \frac{1}{2} \frac{R_s}{r} \right] \sin \theta. \end{aligned}$$

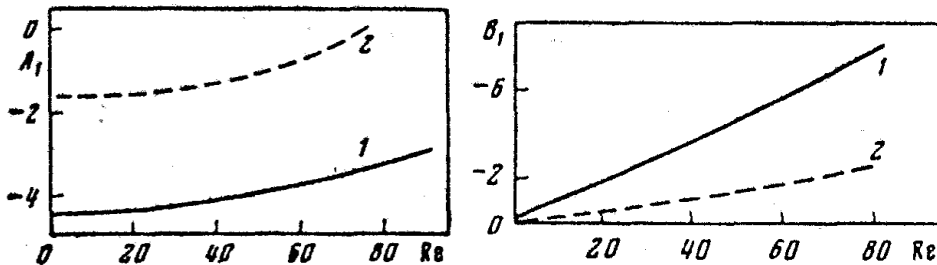
Для перехідної й потенціальної областей гідродинамічне поле бульбашки з повністю загальмованою поверхнею може бути виражене за допомогою залежностей:

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad u_\theta = \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (16)$$

де функція току описується залежністю

$$\begin{aligned} \psi &= UR^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 + A_1 \left(\frac{R}{r} \right) + A_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 + A_3 \left(\frac{R}{r} \right)^3 + A_4 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] \sin^2 \theta + \right. \\ &\quad \left. + \left[B_1 \left(\frac{R}{r} \right) + B_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 + B_3 \left(\frac{R}{r} \right)^3 + B_4 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] \sin^2 \theta \cos \theta \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

у якій коефіцієнти A_{i+1} і B_{i+1} зв'язані відповідно з A_1 і B_1 у такий спосіб $A_2 = -(4,14 + 2,59A_1)$; $A_3 = 5,28 + 2,17A_1$; $A_4 = -(1,64 + 0,59A_1)$; $B_2 = -2,56B_1$; $B_3 = -2,1B_1$; $B_4 = -0,56B_1$.



↑Рис.2. Коефіцієнт $A_1(\text{Re})$: 1 – загальмована поверхня; 2 – вільна поверхня

Рис.3. Коефіцієнт $B_1(\text{Re})$: 1 – загальмована поверхня; 2 – вільна поверхня ↑

Коефіцієнти A_1 і B_1 представлені на рис.2 і 3 (криві 1) як функції від числа Рейнольдса. У випадку, коли поверхня повністю вільна коефіцієнти A_i і B_i визначаються по формулах $A_2 = -(1,25 + 1,75A_1)$; $A_3 = 0,75(1 + A_1)$; $A_4 = 0$; $B_2 = -1,75B_1$; $B_3 = 0,75B_1$; $B_4 = 0$.

Коефіцієнти A_1 і B_1 для цього випадку представлені на рис.2 і 3 (криві 2). Розраховані швидкості спливання, коефіцієнти опору, кути відриву потоку по рівняннях (16), (17) добре погоджуються з дослідними даними.

Складніше складається справа, коли поверхня бульбашки загальмована тільки частково. У цьому випадку використовують такий спосіб. Уведемо деяку величину η_0 , яку визначимо як в'язкість краплі, що спливає при тій же числі Рейнольдса й коефіцієнті опору C , що й дана бульбашка із частково загальмованою поверхнею. Інакше кажучи, припишемо бульбашці певну ефективну в'язкість η_0 . Це, однак, можливо тільки в тому випадку, коли поверхня бульбашки загальмована рівномірно й задовольняє нерівність $\Gamma_0/c_0 \ll 10^{-4}$ см, де Γ_0 і c_0 – відповідно рівноважні адсорбція й концентрація ПАР. Тоді, відповідно до визначення, коефіцієнт опору

$$C = \frac{F}{0,5U^2\rho\pi R^2}, \quad (18)$$

де F – сила опору, що у стаціонарному режимі спливання дорівнює архімедовій силі:

$$F = \frac{4}{3}\pi R^3\rho g. \quad (19)$$

Підставляючи (19) в (18), отримаємо

$$C = \frac{8Rg}{3U^2}. \quad (20)$$

Поряд з формулою (20) групою канадських учених запропонована емпірична залежність

$$C = 3,05 \left[\frac{783X^2 + 2142X + 1080}{(60 + 29X)(4 + 3X)} \right] \text{Re}, \quad (21)$$

де $X = \eta_0/\eta$.

Формула (21) добре погоджується з дослідними даними в області $\text{Re} = 10 \dots 100$ і дає максимальну похибку в 20 % для твердої сфери при $\text{Re} = 10$. Розрахувавши згідно дослідних даних стосовно U і R значення C и Re по формулах (1) і (20) і підставивши в (21), отримаємо рівняння для X и Re , коефіцієнти A_i і B_i розраховуємо по вище наведеним формулам або приймаємо згідно даних рис.2 і 3.

При досить високих числах Рейнольдса гідродинамічне поле бульбашки з незагальмованою поверхнею надійно описується потенціальним рухом ідеальної рідини. При цьому компоненти швидкості в системі координат центра бульбашки мають вигляд:

$$u_r = -U_P \left(1 - \frac{R_P^3}{r^3} \right) \cos\theta; \quad u_\theta = U_P \left(1 + \frac{R_P^3}{r^3} \right) \sin\theta, \quad (22)$$

де індекс P означає потенційний режим обтікання при $\text{Re} \geq 80$.

Рівняння (22) не можуть бути використані тільки у вузькій турбулентній зоні, ширина якої в радіанній мері становить $\theta_T \approx \text{Re}^{-0,5}$.

Таблиця 5

Константи гідродинамічного поля бульбашок, що спливають у перехідному режимі

| Re | A_1 | B_1 | Re | A_1 | B_1 |
|-----|--------|---------|-----|-------|---------|
| 80 | -3,224 | -7,950 | 300 | 1,628 | -26,822 |
| 90 | -2,923 | -9,082 | 400 | 2,385 | -30,324 |
| 100 | -2,608 | -10,236 | 500 | 2,838 | -32,532 |
| 200 | 0,183 | -20,680 | 600 | 3,139 | -34,042 |

Якщо поверхня бульбашки повністю загальмована, то її гідродинамічний опір може бути розрахованим по формулам (16), (17) і коефіцієнтам A_1 і B_1 , представленим у табл.5. Якщо ж поверхня бульбашки загальмована лише частково, то може бути використана вищенаведена методика.

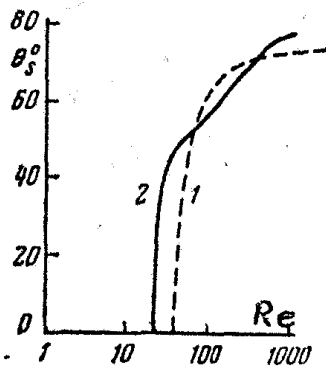


Рис.4. Кут відриву $\theta(Re)$, відлічуваний від нижнього полюса твердої сфери, отриманий теоретично (1) і експериментально (2)

Тому що в багатьох розрахунках необхідно знати величину кута, при якому відбувається відрив потоку від поверхні сфери, на рис.4 представлена залежність цього кута від числа Рейнольдса для твердої сфери, обчислена теоретично й отримана експериментально. Видно, що найкраще узгодження теорії з експериментом досягається при $Re \geq 80$.

Висновок. Для правильного вибору гідродинамічного поля бульбашки необхідно враховувати гідродинамічний режим обтікання (Re), можливість гальмування поверхні адсорбційним шаром ПАР, а також відхилення від сферичності. При цьому доцільно користуватися експериментально отриманими значеннями швидкості U , радіуса R , динамічної в'язкості η і густини середовища ρ , а також таблицями й графіками, наведеними в даній роботі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Духин С.С. Диффузионно-електрическа́я теорія неравновесных електроповерхностных сил и електрокинетических явлений: Дис...докт. техн. наук.– М.-К.: 1965.– 435 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред.–1944, М.: Гостехиздат.398 с.
3. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика.– М.: 1959.– 324 с.
4. Прандтль Л. Гідродинаміка.–1951, М.: Иностран. лит.– 296 с.