Цыганкова А.А.

О ПРОЦЕССЕ РАЗВИТИЯ НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ.

Показано возникновение и развитие таких математических понятий как функция, производная, интеграл из потребностей практики, торговли, механики, что привело к формированию новых областей математики, таких как дифференциальное и интегральное исчисления, аналитическая геометрия.

Ключевые слова: математика, функция, интеграл.

Математика как наука развивалась на основе практических потребностей человека, производства. Она проходит все те же этапы развития, как и все природоведение. Логика процесса развития математики в основном совпадает с историей ее развития. Логический метод исследования позволяет не только осмыслить историю математики, но и глубже понять внутреннюю связь ее понятий, категорий, разделов [1].

Одним из важных вопросов, которые изучаются в курсе высшей математики, есть понятие интеграла. Изучение его в историческом развитии ярко подтверждает положения диалектической логики о текучести, изменчивости, подвижности понятий [2].

Формирование понятия интеграла происходило в древней Греции, главным образом в трудах Евдокса и Архимеда. Древние греки создали цельную и стройную структуру классической геометрии, разработали методы геометрических доказательств; им были известны основные свойства кривых второго порядка. Разрабатывая стройную систему геометрических знаний, которые были отражением практики своего времени, они натолкнулись на ряд задач, которые нельзя решить методом классической геометрии. Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел возможно только на основе теории пределов, бесконечно малых величин и понятия определенного интеграла. К формулировке этих понятий и подошли чрезвычайно близко Эвдокс, Архимед и их современники.

Евдокс Книдский – древнегреческий математик, механик, астроном. Научная школа Евдокса сыграла большую роль в развитии античной математики и астрономии. Евдокс разработал «метод исчерпывания», неявно включающий в себя понятие предела. Выдающийся последователь Евдокса математик и инженер из Сиракуз Архимед усовершенствовал и виртуозно применял метод исчерпывания для вычисления площадей и объемов фигур. В своей работе «Послание к Эратосфену о методе» он использовал бесконечно малые для вычисления объемов. Этот метод фактически определил начало формирования качественно новых понятий в математике, которые относятся к теории пределов.

Главные математические достижения Архимеда касаются проблем, которые сейчас мы бы отнесли к области математического анализа. Архимед не только решил одну из задач (площадь сегмента параболы), путем вычисления предела интегральной суммы, но и выделил целый класс задач, которые решаются подобным способом. Его идеи впоследствии легли в основу дифференциального и интегрального исчислений.

Однако, эти понятия не нашли дальнейшего развития в древнегреческой математике. Главной причиной этого была практика, которая хоть и является движущей, определяющей силой науки, но в то время была слишком недостаточной и узкой для выработки понятий и методов, позже приведших к дифференциальному и интегральному исчислениям.

Потребности торговли, мореплавания, военного строительства, применение машин в производстве в XVI – XVII в.в. обусловили скачок в развитии науки, выработке точных экспериментальных и математических методов исследований. Изучение неравномерных движений, потребности в механике и астрономии и т. д. дали математикам необходимый материал для создания вышеназванных понятий. Развитие производства, практики стали определяющими факторами для формирования таких основных понятий дифференциального и интегрального исчисления, как функция, производная, интеграл и установления связей между ними. Анализ бесконечно малых возник, прежде всего, как математический способ для отображения механических процессов, механического движения. Вместе с тем, возникновение этих понятий стало закономерным логическим этапом в развитии математики.

Математика до XVII в. оперировала только постоянными, неизменными величинами. Позже (с возникновением дифференциального и интегрального исчислений) стала пользоваться понятиями переменных величин. Таким образом, дифференциальное исчисление позволило математическими методами изображать не только состояния, но и процессы.

Понятие «определенный интеграл», которое встречалось у Архимеда, охватывало только небольшой круг явлений и представляло собой лишь отдельный метод решения небольшого круга задач. После XVII в. оно превратилось в общее понятие. Сейчас понятие интеграла еще больше обобщено и применяется для все большего круга явлений (интеграл Лебаго, интеграл Стилтьеса и др.). Таким образом проявляется движение от одинокого, отдельного к особенному и общему. Эволюция понятия «интеграл» происходила в тесной и неразрывной связи с развитием понятия «функция». Древним грекам не было известно понятие «функция». И.Ньютон – английский физик, математик, механик и астроном - придавал понятию функции только механический смысл; аргументом произвольной переменной величины (флюэнты по его терминологии), есть некая равномерно текучая величина, аналогичная времени. Позднее существенное значение в увеличении классов функций имело составление таблиц логарифмов, совершенствование таблиц тригонометрических функций, обусловленное, в частности, потребностями геодезии и навигации. Расширение объема, в свою очередь приводило к углублению понятия функции. Уже на рубеже XVII и XVIII в.в. возникла необходимость формулирования понятия функции, не связанного с механической или геометрической интерпретацией. Первый значительный шаг сделал в этом направлении И.Бернулли, потом дополнил Леонард Эйлер – выдающийся немецкий и российский математик и механик. Он рассматривал в качестве аргумента не только целые и дробные, а и рациональные, иррациональные, трансцендентные и даже мнимые числа. Эйлер определил понятие функциональной зависимости с возможностью вычисления значения функции с помощью произвольного количества арифметических действий и других операций (решения алгебраических уравнений, вычисления суммы рядов и др.). Он сделал большой шаг в обобщении понятия «функция», рассматривая ее как функцию комплексной переменной [3]. Благодаря Эйлеру в математику вошли общая теория рядов, полная теория непрерывных дробей, многочисленные приемы интегрирования и решения дифференциальных уравнений, число e, обозначение i для мнимой единицы, гамма-функция и многое другое. По существу, именно он создал несколько новых математических дисциплин – теорию чисел, вариационное исчисление, теорию комплексных функций, специальные функции, ввел двойные интегралы. В дальнейшем изучение свойств рядов Фурье потребовало дальнейшего обогащения понятия «функция» и показало возможность аналитического представления функций намного более широкого класса, чем те, которые рассматривал Эйлер.

На начальном этапе развития науки алгебра и геометрия изучались раздельно друг от друга. До XVII в. эти разделы математики не были связаны один с другим. Зачатки алгебры были еще у египтян и вавилонян. Однако, в Древней Греции развивалась преимущественно геометрия и техника алгебраических вычислений была невысокой. Значительное преобладание геометрии не давало возможности развиваться алгебраическим обозначениям. Алгебра начала интенсивно развиваться только в XVI в. Выдающийся французский математик Франсуа Виет начал впервые обозначать числа буквами. И только в XVII в. в трудах Исаака Ньютона алгебраические записи приобрели современный вид. Огромная заслуга основоположника аналитической геометрии и создателя современной алгебраической символики Рене Декарта состоит в том, что он установил самую тесную, по сути диалектическую, связь между понятиями алгебры и геометрии. Введением системы координат, он показал, что каждой точке плоскости соответствует пара чисел, каждому геометрическому месту точек плоскости (некоторой кривой) соответствуют определенные уравнения и наоборот. Новый способ задания кривой – с помощью уравнения – был решающим шагом к понятию функции.

Как углубление и расширение понятия «функция» возникло понятие функционала как функции, значениями аргумента которой уже являются не числа, а функции. Дальше возникло понятие оператора, который отображает одни множества в другие. Теперь функционалы являются частным случаем оператора, а именно функционал можно рассматривать как оператор, заданный на некотором множестве, областью значений которого есть множество действительных или комплексных чисел. Таким образом, понятие «функция» углублялось, наполнялось новым смыслом, что вело к расширению его объема и более глубокого проникновения в его суть.
Параллельно с эволюцией понятий интеграла, функции и др. формировалась новая область математики – аналитическая геометрия.

Будучи синтезом по отношению к предыдущим этапам, аналитическая геометрия является началом нового витка развития математики. Развитие дифференциального и интегрального исчислений, аналитической геометрии, которые рассматривались ранее изолированно друг от друга, выявило связь между этими областями знаний. Теперь возникла новая наука –

дифференциальная геометрия. Позднее классический математический анализ, алгебра и дифференциальные уравнения объединились в функциональный анализ, а разные виды геометрии и теории групп объединяются топологией.

Таким образом, возникновение аналитической, дифференциальной геометрии и т.д. стало закономерным, логическим этапом развития математики и синтезом предыдущих этапов.

Литература

1. Бурбаки Н. Очерки по истории математики, т.38, М., 1936.
2. Улановська М.О., Фелікс Ю.М. «До питання про логічний аналіз розвитку деяких математичних понять.», Філософські проблеми сучасного природознавства. Вип. 21., Вид-во КДУ, 1970.
3. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых, т.1, М.-Л., 1936.