Застосування визначеного інтеграла до обчислення об'єму тіла обертання

Кужинівська Олександра, Володимир Листопад
Національний університет харчових технологій, Київ, Україна

Вступ. В задачах практичного змісту досить часто потрібно користуватися методами інтегрального числення функції одної незалежної змінної для обчислення об'єму тіла обертання.

Матеріал та методи. Розглянемо одну із таких задач. Визначити Об'єм резервуара (діжки) за розмірами перерізу, вказаного на рис. 1, де верхня і нижня криві – параболи $y=\mp px^2\pm q$. Обчислити цей об'єм при $r=0,75м, R=1м$ та $l=3м$.

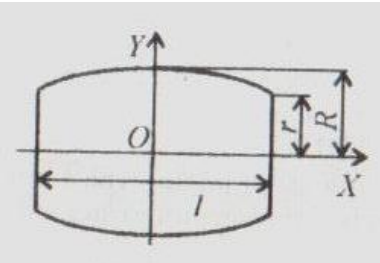

Рис. 1

Скористаємося формулою $V=\int_a^b f^2(x)dx$ де $f(x)=-px^2+q$ - рівняння верхньої параболи, $a=-l/2, b=l/2$. Спочатку знайдемо загальну формулу для обчислення об'єму резервуара, враховуючи її симетричність відносно осі OY.

Маємо

$$\frac{1}{2}V=\pi\int_0^{l/2}\left(-px^2+q\right)^2dx=\pi\int_0^{l/2}\left(p^2x^4-2pqx^2+q^2\right)^2dx=\frac{\pi}{15}\left(\frac{3}{32}p^2l^5-\frac{5}{4}pql^3+\frac{15}{2}q^2l\right)$$

Тоді $V=\frac{\pi}{15\cdot 16}\left(3p^2l^5-40pql^3+15\cdot 16q^2l\right)$. Оскільки $y=R$ при $x=0$ і $y=r$ при $x=\frac{l}{2}$, то $q=R$ і $p=\frac{4\left(R-r\right)}{l^2}$, тобто рівняння верхньої параболи має вигляд $y=\frac{4\left(r-R\right)}{l^2}x^2+R$. Отже ,

$$V=\frac{\pi l}{15}\left(8R^2+4Rr+3r^2\right).$$

При заданих значеннях $r = 0,75, R = 1$ та $l = 3$, отримаємо $V = 2,54\pi \approx 8$ м^3.

Висновок. Таким чином, задача практичного змісту звелася до задачі про обчислення об'єму фігури обертання, яка розв'язується методами інтегрального числення.