Національна академія наук України

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача

Математичні проблеми механіки неоднорідних структур

Том 1

Львів 2000

УДК 539.3

ПРО ТЕРМОМЕХАНІЧНУ ПОВЕДІНКУ ОБОЛОНКОВИХ ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ З НЕЛІНІЙНОГО В'ЯЗКОПРУЖНОГО МАТЕРІАЛУ

Іван Киричок, Наталія Обізюк

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, вул. Нестерова, 3, Київ, 03057

Український державний університет харчових технологій, вул. Володимирська, 68, Київ, 01033

Розглянуто задачу про взаємодію термомеханічної спряженості і фізичної нелінійності в коливальних процесах тонкостінних в'язкопружних нескінченно довгої циліндричної та замкнутої сферичної оболонок.

Розглянемо радіальні коливання та вібророзігрів замкнутої сферичної та нескінченно довгої циліндричної (плоска деформація) оболонок, або кільця (плоский напружений стан) товщиною h і радіуса серединної поверхні R, виготовлених з фізично нелінійного в'язкопружного матеріалу. Поверхня розглядуваних елементів знаходиться під дією навантаження, що гармонічно змінюється в часі, $Z(t) = \sigma_0 \sin \omega t$ ($\sigma_0 > 0$ відповідає зовнішньому а $\sigma_0 < 0$ внутрішньому тиску; ω – частота; t – час). На поверхнях $\gamma = \pm h/2$ відбувається теплообмін за законом Ньютона з оточуючим середовищем, температура якого становить T_c. Механічна поведінка матеріалу, параметри якого залежать від температури, відповідає моделі Фойгта з нелінійним пружним елементом і лінійною в'язкістю. Температура розігріву вважається однорідною по товщині.

Внаслідок простоти геометрії і характеру навантаження напружений стан розглядуваних об'єктів вважаємо безмоментним і їх термомеханічна поведінка в одномодовому наближенні може бути описана рівняннями

$$\rho h \frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{\alpha}{R} N_\theta - Z(t); \tag{1}$$

$$\sigma_\theta = \alpha_1 E(T)\left(\varepsilon_\theta + d_0 \varepsilon_\theta^3\right) + \eta(T)\frac{d\varepsilon_0}{dt}; \tag{2}$$

$$c_v h \frac{dT}{dt} = -2\alpha_1^c \left(T - T_c\right) + h\eta(T)\left(\frac{d\varepsilon_0}{dt}\right)^2; \tag{3}$$

де $\varepsilon_\theta = w/R$ – деформація; w – радіальне переміщення; $N_\theta = \sigma_\theta h$, σ_θ – кругове напруження; α_1^c і λ – коефіцієнти тепловіддачі та теплопровідності; c_v – теплоємність одиниці об'єму; d_0 – постійна нелінійності; ρ – густина матеріалу; $\alpha = 2$, $\alpha_1 = 1/(1-\nu)$ – для сферичної і $\alpha = 1$, $\alpha_1 = 1/(1-\nu^2)$ – для циліндричної оболонок; $\alpha = \alpha_1 = 1$ – для кільця; ν – коефіцієнт Пуассона.

Приймемо температурні залежності модулів Юнга E та в'язкості η у вигляді

$$E = E_0\left[1-\varphi_1(\theta)\right]; \quad \eta = \eta_0\varphi_2(\theta); \quad \varphi_1(T_c) = 0; \quad \varphi_2(T_c) = 1 \tag{4}$$

та введемо безрозмірні параметри

$$\omega_0^2 = \frac{\tilde{E}_0}{\rho h R}; \quad \theta = \frac{T-T_c}{T_c-T_r}; \quad \tilde{E}_0 = \alpha\alpha_1 E_0; \quad \tilde{\eta}_0 = \alpha\eta_0; \quad \tau = \omega_0 t; \tag{5}$$

$$\omega_1 = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad \delta_0 = \frac{\omega_0\tilde{\eta}_0 h}{\tilde{E}_0 R}; \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{\tilde{E}_0}; \quad x = \frac{2\alpha_1^c}{c_v h\omega_0}; \quad x_0 = \frac{\omega_0 R\tilde{E}_0}{2\alpha_1^c\alpha\left(T_c-T_r\right)},$$

де T_r – деяка характерна температура.

Тоді з (1)–(3) приходимо до наступної системи нелінійних рівнянь:

$$\frac{d^2\varepsilon_\theta}{d\tau^2} = -\varepsilon_\theta + \varphi_1\varepsilon_\theta - \varphi_3 d_0\varepsilon_\theta^3 + \delta_0\frac{d\varepsilon_\theta}{d\tau} + \varepsilon_0\sin\omega_1\tau,$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = x\left[-\theta + \delta_0 x_0\varphi_2\left(\frac{d\varepsilon_\theta}{d\tau}\right)^2\right], \tag{6}$$

при початкових умовах

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_0; \quad \frac{d\varepsilon_\theta}{d\tau} = \frac{d\varepsilon_0}{d\tau}; \quad \theta = \theta_0 \quad (\tau = 0). \tag{7}$$

Для розв'язання нелінійної задачі (6), (7) скористаємося методом Крилова – Боголюбова – Митропольського [1], згідно з яким її розв'язки в першому наближенні виберемо у вигляді

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon'(\tau)\cos\omega_1\tau - \varepsilon''(\tau)\sin\omega_1\tau + \ldots; \quad \bar{\theta} = \theta(\tau), \tag{8}$$

де $\bar{\theta}$ – усереднена за період температура.

В результаті стандартних перетворень із співвідношень (6)–(8) для першого наближення одержимо

$$\frac{dy_1}{dz} = -\varphi_2 y_1 - \frac{1}{\delta_0\omega_1}\left[1-\omega_1^2-\varphi_1+\frac{3}{4}d\left(1-\varphi_1\right)A^2\right]y_2 - \frac{1}{\delta_1\omega_1};$$

$$\frac{dy_2}{dz} = \frac{1}{\delta_0\omega_1}\left[1-\omega_1^2-\varphi_1+\frac{3}{4}d\left(1-\varphi_1\right)A^2\right]y_1 - \varphi_2 y_2; \tag{9}$$

$$\frac{d\overline{\theta}}{dz} = x_*\left(-\overline{\theta} - \frac{1}{2}\delta_0 x_0 \varepsilon_0^2 \omega_1 A^2 \varphi_2\right);$$

$$y_1(0) = y_{01}; \quad y_2(0) = y_{02}; \quad \overline{\theta}(0) = \theta_0 .$$

Тут введені такі позначення:

$$y_1 = \varepsilon' / \varepsilon_0;\ y_2 = \varepsilon'' / \varepsilon_0;\ A^2 = y_1^2 + y_2^2;\ z = \frac{1}{2}\delta_0\tau;\ d = \varepsilon_0^2 d_0;\ x_* = 2x / \delta_0 .$$

Для відшукання стаціонарних розв'язків ($\tau \to \infty$) покладемо нулю ліві частини рівнянь (9). При цьому одержана система зводиться до одного трансцендентного рівняння відносно безрозмірного параметра температури $\overline{\theta}$.

$$\left[1 - \omega_1^2 - \varphi_1 + \frac{3}{4}d\left(1 - \varphi_1\right)A_0^2\right]^2 + \left(\omega_1\delta_0\varphi_2\right)^2 - A_0^2 = 0, \tag{10}$$

де

$$A_0^2 = 2\overline{\theta} / \left(\omega_1^2 \varepsilon_0^2 \delta_0 x_0 \varphi_2\right). \tag{11}$$

Відзначимо, що до співвідношення (10) приходимо також при застосуванні до рівнянь (6) методу Бубнова – Гальоркіна, вибираючи розв'язок у вигляді (8) при умові, що $\varepsilon' = \text{const}$, $\varepsilon'' = \text{const}$. Дослідження асимптотичної стійкості та типу особливих точок розглядуваної термомеханічної системи зводиться до аналізу спектру власних значень матриці лінеаризованої задачі (9). Ця задача, що повністю співпадає з задачею про термомеханічну поведінку нелінійного осцилятора, детально повно досліджена в статті [2].

Для виявлення деяких особливостей взаємодії термомеханічної спряженості, що проявляється в залежності механічних властивостей матеріалу від температури, та фізичної нелінійності розглянемо модельний матеріал характеристики якого приведені в [2].

На рис. 1 а, б показані розраховані на основі співвідношень (10), (11) криві залежності амплітуди коливань від частоти навантаження. Аналіз кривих на рис. 1а показує, що з ростом параметра β_1 (при посиленні температурної залежності жорсткості системи) амплітудно-частотна характеристика із «жорсткої» перетворюється в «м'яку». При зменшенні параметра β_2 $(\beta_2 < 0)$, що характеризує температурну залежність в'язкості, в амплітудно-частотних характеристиках можуть з'являтися області неоднозначності, які подавляються великою в'язкістю в ізотермічному стані (рис. 1 б).

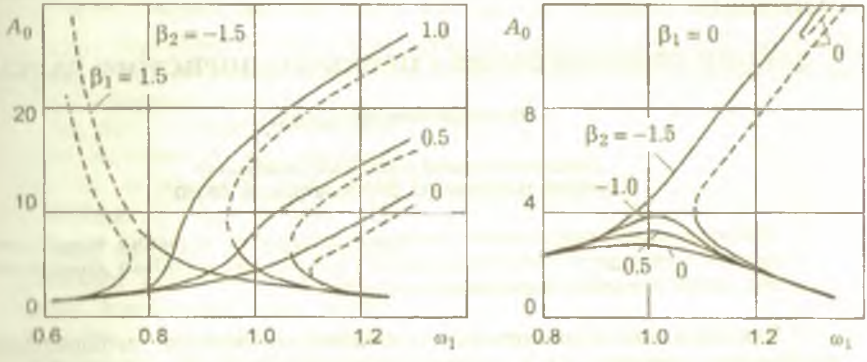

Рис. 1. Криві залежності амплітуди коливань від частоти навантаження.

1. *Боголюбов Н. И., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
2. *Сенченков И. К.* Динамическое поведение стержня с учетом зависимости свойств материала от температуры // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 2. – С. 85–92.

ON THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF THIN-WALLED SHELL ELEMENTS FROM NONLINEAR VISCOUSLY-ELASTIC MATERIAL

Considered the task of the interaction of thermomechanical mating and physical nonlinearity in the vibration processes of the thin-walled viscously – elastic infinity long cylindrical and closed spherical shells.

О ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ОБОЛОЧЕЧНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ НЕЛИНЕЙНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Рассмотрено задачу о взаимодействии термомеханической сопряженности и физической нелинейности в колебательных процессах тонкостенных вязкоупругих бесконечно длинной цилиндрической и замкнутой сферической оболочек.