УДК 517.537

ЛОКАЛЬНЫЕ МОДУЛИ НЕПРЕРЫВНОСТИ И СВОЙСТВА ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОБЛАСТЯХ С УГЛАМИ

В.А.Бородин

I. Пусть G – односвязная область, ограниченная спрямляемой кривой и $u(z)$ – функция, гармоническая в G. Гармоническим полиномом порядка n называется действительная часть алгебраического многочлена степени n, вообще говоря, с комплексными коэффициентами. Задача о приближении в G гармонических функций классов $H^s\ (0<s<1)$ гармоническими полиномами, в случае области, ограниченной аналитической кривой, решена в 1949 г. Уолшем, Сьюэллом, Эллиотом [8]. Оценка приближения на областях с гладкой границей, а также оценка приближения потенциалов двойного слоя с плотностью класса H^s гармоническими полиномами в областях с углами получена В.К.Дзядыком [4].

В настоящей работе задача о приближении гармонических функций гармоническими полиномами рассматривается для областей с кусочно-гладкой границей. Точная формулировка дана в параграфе 4.

В § 2 рассматривается некоторый специальный локальный модуль непрерывности и исследуются свойства функции с таким модулем непрерывности. В § 3 теорема И.И.Привалова о сопряженных гармонических функциях переносится на области с углами.

2. Пусть $f(\theta)$ – 2π-периодическая непрерывная функция. Локальным модулем непрерывности в точке θ_1 будем называть величину

$$\omega_{\theta_1}(f,h)=\sup_{|\theta-\theta_1|\le h}|f(\theta)-f(\theta_1)| . \qquad (I)$$

О п р е д е л е н и е I. Будем говорить, что $f(\theta)\in H^{\omega_{\theta_1}}$ если $\omega_{\theta_1}(f,h)\le A\,\omega_{\theta_1}(h)$, где постоянная A не зависит от θ_1 и h, а $\omega_{\theta_1}(h)$ – некоторая неотрицательная функция переменных θ_1 и h.

В дальнейшем будем рассматривать специальный локальный модуль непрерывности вида

$$\omega_{\theta_1}(h) = \frac{h^{\gamma}}{(|\theta_1 - \theta^*| + h)^{\delta}}, \quad 0 \le \delta < \gamma < 1, \qquad (2)$$

где θ^* – фиксированное число. Функции, принадлежащие классу $H^{\omega_{\theta_1}}$, удовлетворяют неравномерному условию Липшица. Такой класс функций с необходимостью возникает при обобщении теоремы И.И.Привалова о сопряженных функциях для круга на области с кусочно-гладкой границей.

Функцию, тригонометрически сопряженную с $f(\theta)$, будем обозначать через $\bar{f}(\theta)$. Следующая теорема является уточнением теоремы И.И.Привалова о сопряженных функциях [1].

Т е о р е м а I. Пусть $\omega_{\theta_1}(h)$ имеет вид (2). Если 2π -периодическая непрерывная функция $f(\theta)$ удовлетворяет условию $f(\theta) \in H^{\omega_{\theta_1}}$, то и сопряженная функция $\bar{f}(\theta) \in H^{\omega_{\theta_1}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f(\theta) \in H^{\gamma-\delta}$, то сопряжённую функцию всюду можно представить несобственным интегралом

$$\bar{f}(\theta_1) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(\theta_1+t) - f(\theta_1-t)}{2\, tg \frac{t}{2}}\, dt. \qquad (3)$$

Учитывая, что написанные ниже несобственные интегралы имеют смысл получаем в силу нечетности $tg \frac{t}{2}$:

$$\bar{f}(\theta) = -\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \frac{f(\theta+t) - f(\theta)}{2\, tg \frac{t}{2}}\, dt + \int_0^{\pi} \frac{f(\theta) - f(\theta-t)}{2\, tg \frac{t}{2}}\, dt\right] = \qquad (4)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\theta_1+t) - f(\theta_1)}{2\, tg \frac{t}{2}}\, dt.$$

Отсюда

$$\bar{f}(\theta_1+h) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\theta_1+h+t) - f(\theta_1+h)}{2\, tg \frac{t}{2}}\, dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\theta_1+t) - f(\theta_1+h)}{2\, tg \frac{t-h}{2}}\, dt.$$

(5)

В дальнейшем считаем, что $h>0$. Случай $h<0$ рассматривается аналогично:

$$\left|\bar{f}(\theta_1)-\bar{f}(\theta_1+h)\right|=\frac{1}{\pi}\left|\int_{-2h}^{2h}\frac{f(\theta_1+t)-f(\theta_1)}{2\,tg\,\frac{t}{2}}dt-\int_{-2h}^{2h}\frac{f(\theta_1+t)-f(\theta_1+h)}{2\,tg\,\frac{t-h}{2}}dt+\right.$$

$$\left.+\left(\int_{-\pi}^{-2h}+\int_{2\pi}^{\pi}\right)\left[\frac{f(\theta_1+t)-f(\theta)}{2\,tg\,\frac{t}{2}}dt-\frac{f(\theta_1+t)-f(\theta_1+h)}{2\,tg\,\frac{t-h}{2}}dt\right]\right|=J_1+J_2+J_3 \quad (6)$$

Оценим интеграл J_2 .

$$|J_2|\leqslant\left|\int_{-2h}^{2h}\frac{f(\theta_1+t)-f(\theta_1+h)}{2\,tg\,\frac{t-h}{2}}dt\right|\leqslant\int_0^h\frac{t^\gamma}{t[|\theta_1+h-\theta^*|+t]^\delta}dt\leqslant\frac{h^\gamma}{[|\theta_1-\theta^*|+h]^\delta}. \quad (7)$$

Первое порядковое неравенство очевидно, второе докажем. По существу необходимо доказать

$$\int_0^h\frac{t^\gamma}{t[|a-h|+t]^\delta}dt\leqslant A\,\frac{h^\gamma}{[|a|+h]^\delta}, \quad (8)$$

где A не зависит от h и a .

Рассмотрим два случая:

1) Пусть $|a|\leqslant 2h$, тогда

$$\int_0^h\frac{t^\gamma}{t[|a-h|+t]^\delta}dt\asymp\int_0^h t^{\gamma-\delta-1}dt\asymp h^{\gamma-\delta}\asymp\frac{h^\gamma}{[|a|+h]^\delta}, \quad (8')$$

поскольку $|a|+h\asymp h$.

2) Пусть $|a|>2h$, тогда

$$\int_0^h\frac{t^\gamma}{t[|a-h|+t]^\delta}dt\leqslant\frac{1}{|a-h|^\delta}\int_0^h t^{\gamma-1}dt\asymp\frac{h^\gamma}{|a|^\delta}\asymp\frac{h^\gamma}{[|a|+h]^\delta}. \quad (8'')$$

Так как (8) доказано, то (7) верно. Интеграл J_1 оценивается аналогично интегралу J_2 . Для оценки интеграла J_3 заметим, что

$$\frac{f(\theta_1+t)-f(\theta_1)}{2\,tg\frac{t}{2}}-\frac{f(\theta_1+t)-f(\theta_1+h)}{2\,tg\frac{t-h}{2}}=$$

$$=\left[f(\theta_1+t)-f(\theta_1)\right]\left[\frac{1}{2tg\frac{t}{2}}-\frac{1}{2\,tg\frac{t-h}{2}}\right]+\left[f(\theta_1+h)-f(\theta_1)\right]\frac{1}{2tg\frac{t-h}{2}},$$

поэтому

$$\left|J_3\right|\leq\frac{1}{\pi}\left|\left(\int_{-\pi}^{-2h}+\int_{2h}^{\pi}\right)\left[f(\theta_1+t)-f(\theta_1)\right]\left[\frac{1}{2tg\frac{t}{2}}-\frac{1}{2\,tg\frac{t-h}{2}}\right]dt\right|+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left|\left[f(\theta_1+h)-f(\theta_1)\right]\left(\int_{-\pi}^{-2h}+\int_{2h}^{\pi}\right)\frac{1}{2tg\frac{t-h}{2}}dt\right|=\left|J_3'\right|+\left|J_3''\right|. \quad (9)$$

Оценим J_3'. Учитывая

$$\frac{1}{tg\frac{t}{2}}-\frac{1}{tg\frac{t-h}{2}}=-\frac{\sin\frac{h}{2}}{\sin\frac{t}{2}\,\sin\frac{t-h}{2}}$$

при $2h<|t|<\pi$ имеем

$$\left|\frac{1}{tg\frac{t}{2}}-\frac{1}{tg\frac{t-h}{2}}\right|\asymp\frac{h}{t^2},$$

$$\left|J_3'\right|\leq h\int_{2h}^{\pi}\frac{t^{\delta-2}}{[|\theta_1-\theta^*+t]^{\delta}}dt\leq\frac{h}{[|\theta_1-\theta^*|+h]^{\delta}}\int_{2h}^{\pi}t^{\delta-2}dt\leq\frac{h^{\delta}}{[|\theta_1-\theta^*|+h]^{\delta}}. \quad (10)$$

Для оценки J_3'' заметим, что

$$\left(\int_{-\pi}^{-2h}+\int_{2h}^{\pi}\right)\frac{1}{tg\frac{t-h}{2}}dt=\int_{2h}^{\pi}\frac{1}{tg\frac{t-h}{2}}dt-\int_{2h}^{\pi}\frac{1}{tg\frac{t+h}{2}}dt=$$

$$=\int_{2h}^{\pi}\frac{\sin h}{\sin\frac{t-h}{2}\,\sin\frac{t+h}{2}}dt\leq h\int_{2h}^{\pi}\frac{dt}{t^2}\asymp O(1).$$

Поэтому

$$\left|J_3''\right| \leqslant \frac{h^{\delta}}{[|\theta_1-\theta^*|+h]^{\delta}}\,. \tag{11}$$

Собирая промежуточные оценки, получаем

$$\left|\bar{f}(\theta_1+h)-\bar{f}(\theta_1)\right| \leqslant A\,\frac{|h|^{\delta}}{[|\theta_1-\theta^*|+|h|]^{\delta}}\,, \tag{12}$$

где постоянная A не зависит от θ_1 и h. Теорема доказана.

На локальные модули непрерывности вида (2) можно перенести и некоторые другие теоремы, доказанные для классов Липшица. Теорема 2 является уточнением теоремы Харди и Литтльвуда [2], а теорема 3 – теоремы Племеля-Привалова [7].

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы функция $f(\zeta)$, регулярная в $|\zeta|<1$ была непрерывна в $|\zeta|\leqslant 1$ и на $|\zeta|=1$ удовлетворяла условию

$$\left|f(e^{i\theta})-f(e^{i\theta_1})\right| \leqslant \frac{|\theta-\theta_1|^{\delta}}{(|\theta_1-\theta^*|+|\theta-\theta_1|)^{\delta}}\,,\quad 0\leqslant\delta\leqslant\gamma<1, \tag{13}$$

необходимо и достаточно, чтобы в $|\zeta|<1$ выполнялось неравенство

$$\left|f'(re^{i\theta_1})\right| \leqslant A\,\frac{1}{(1-r)^{1-\delta}}\;\frac{1}{[|\theta_1-\theta^*|+(1-r)]^{\delta}}\,, \tag{14}$$

где постоянная A не зависит от θ_1 и r.

Для формулировки теоремы 3 введем дополнительные понятия [7]. Пусть L кусочно-гладкая линия и пусть $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условию $H^{\omega_{\zeta_1}}$ на части L' линии L, то-есть

$$|\varphi(\zeta)-\varphi(\zeta_1)| \leqslant A\,\frac{|\zeta-\zeta_1|^{\delta}}{[|\zeta_1-\zeta^*|+|\zeta-\zeta_1|]^{\delta}} = A\omega_{\zeta_1}(|\zeta-\zeta_1|), \tag{15}$$

где A – постоянная, не зависящая от ζ и ζ_1, $\zeta^*\in L$ фиксированная точка, $\zeta,\zeta_1\in L'$. При этих условиях хорошо известно, что функция

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \tag{16}$$

непрерывно продолжима слева и справа на часть L', за исключением, может быть, ее концов. Относительно граничных значений можно утверждать несколько больше.

Теорема 3. Если $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условию (15) на L', то граничные значения $\Phi^+(\zeta)$, $\Phi^-(\zeta)$ принадлежат на L' кроме, может быть, сколь угодно малых окрестностей концов L', классу $H^{\omega_{\zeta_1}}$.

Замечание I. Теоремы I и 3 имеют место для более широкого класса локальных модулей. По ходу доказательства теоремы I видно, что она справедлива для локальных модулей непрерывности, которые удовлетворяют условиям:

$$\text{а)} \quad h\int_h^{\pi} \frac{\omega_{\theta_1}(h)}{t^2}\,dt \le \omega_{\theta_1}(h);$$

$$\text{б)} \quad \int_0^h \frac{\omega_{\theta_1}(t)}{t}\,dt \le \omega_{\theta_1}(h); \tag{17}$$

$$\text{в)} \quad A\omega_{\theta_1'}(h) \le \omega_{\theta_1}(h) \le A'\omega_{\theta_1'}(h)$$

для любого h и любых θ_1, θ_1' : $|\theta_1-\theta_1'|<B$, где B – произвольная постоянная; постоянные A, A' зависят только от постоянной B.

3. Пусть $\overline{G}$ – замкнутое множество точек комплексной плоскости (z), содержащее не менее двух точек, дополнение G^1 которого есть односвязная область, содержащая точку ∞. G – множество внутренних точек множества G; $z = \Psi(w) = \gamma w + \gamma_0 + \gamma w^{-1} + \ldots$, $\gamma>0$, функция, регулярная в области $1<|w|<\infty$, однолистно отображающая эту область на G^1; $w = \Phi(z)$ – функция, обратная для $z=\Psi(w)$. $\Gamma=\Gamma_1=\Gamma(G)$ – граница $\overline{G}$; $\Gamma_R = \Gamma_R(\overline{G}) = \{z:|\Phi(z)|=R\}$, $R>1$; R – линия уровня $\overline{G}$; $\rho_R(z)=\rho(z,\Gamma_R)$ – расстояние от точки z до линии уровня Γ_R.

Пусть $w_j = e^{it_j^*}$, $-\pi<t_j^*\le\pi$, $j=1,\ldots,\ell$, $\ell=0,1,\ldots$ – различные точки окружности $|w|=1$, $z_j=\Psi(w_j)$; α_j, $0<\alpha_j<2$, $\alpha_j\ne 1$, $j=1,\ldots,\ell$ – фиксированные числа; h, $0<h<h_0=$

$= \frac{1}{2} \min (|t_j^* - t_{j'}^*|, \frac{1}{2})$, $j \neq j'$, $j, j' = 1, \ldots, \ell$, $U_j = \{w : |\arg \frac{w_j}{w}| < h, |w| > 1\}$, U – дополнение $\bigcup_{j=1}^{\ell} U_j$ до области $|w| > 1$. Будем говорить, что G принадлежит классу $(\mathcal{L}_\ell)(z_1, \alpha_1, \ldots, z_\ell, \alpha_\ell)$, если существуют две постоянные C_1 и C_2, $0 < C_1 < C_2 < \infty$ такие, что

$$C_1 \left|1 - \frac{w_j}{w}\right|^{\alpha_j - 1} \leq |\Psi'(w)| \leq C_2 \left|1 - \frac{w_j}{w}\right|^{\alpha_j - 1}, \quad w \in U_j, \ j = 1, \ldots, \ell,$$

$$C_1 \leq |\Psi'(w)| \leq C_2, \qquad w \in U, \tag{18$_\ell$}$$

$$\Psi(w) = \Psi(w_j) + A_j(w)\left(1 - \frac{w_j}{w}\right)^{\alpha_j}, \quad w \in U_j, \ j = 1, \ldots, \ell,$$

где $A_j(w)$ функции регулярные в $1 < |w| < \infty$, непрерывные в точке w_j, $A_j(w_j) \neq 0$ и выбрана та ветвь функции $\left(1 - \frac{w_j}{w}\right)^{\alpha_j}$, которая обращается в единицу при $w = \infty$. Точки z_j будем называть внешними угловыми точками с внешним углом α_j.

Пусть $z = \psi(\tau) = \gamma_0' + \gamma_1' \tau + \gamma_2' \tau^2 + \ldots$, $\gamma_1' > 0$, функция регулярная в $|\tau| < 1$, однолистно отображающая единичный круг на G, так что $\psi(0) = z_0 \in G$; $\tau = \varphi(z)$ обратная функция, Пусть $\tau_j = e^{i\theta_j^*}$, $-\pi < \theta_j^* \leq \pi$, $j = 1, \ldots, k$, $k = 0, 1, \ldots$ – различные точки окружности $|\tau| = 1$, $z_j = \psi(\tau_j)$; β_j, $0 < \beta_j < 2$, $\beta_j \neq 1$, $j = 1, \ldots, k$, фиксированные числа; h', $0 < h' < h_0' =$

$$= \frac{1}{2} \min \left(|\theta_j^* - \theta_{j'}^*|, \frac{1}{2}\right), \quad j \neq j', \quad j, j' = 1, \ldots, k,$$

$U_j' = \{\tau : |\arg \frac{\tau_j}{\tau}| < h, |\tau| < 1\}$, U' – дополнение $\bigcup_{j=1}^{k} U_j'$ до области $|\tau| < 1$. Будем говорить, что G – принадлежит классу $(\mathcal{L}_i)(z_1, \beta_1, \ldots, z_k, \beta_k)$, если существуют две постоянные C_1' и C_2', $0 < C_1' < C_2' < \infty$ такие, что

$$C_1' |\tau - \tau_j|^{\beta_j - 1} \leq |\psi'(\tau)| \leq C_2' |\tau - \tau_j|^{\beta_j - 1}, \quad \tau \in U_j', \ j = 1, \ldots, k,$$

$$C_1' \leq |\psi'(\tau)| \leq C_2', \quad \tau \in \mathcal{U}',$$

$$\psi(\tau) = \psi(\tau_j) + A_j'(\tau)(\tau - \tau_j)^{\beta_j}, \quad \tau \in \mathcal{U}_j', \; j = 1, \ldots, k, \tag{18$_i$}$$

где $A_j'(\tau)$ – функции регулярные в $|\tau|<1$, непрерывные в точке τ_j, $A_j'(\tau_j) \neq 0$ и выбрана некоторая ветвь функции $(\tau-\tau_j)^{\beta_j}$. Точки z_j будем называть внутренними угловыми точками с внутренним углом β_j.

Такие области рассмотрены в работе Н.А.Лебедева и Н.А.Широкова [6].

Класс областей, у которых внешние угловые точки и внутренние угловые точки совпадают, а величины углов удовлетворяют равенству $\alpha_j + \beta_j = 2$, $j = 1, 2, \ldots, k = \ell$, будем обозначать через $(\mathcal{L}) = (\mathcal{L})(z_1 \beta_1, \ldots, z_k, \beta_k)$. Заметим, что в обозначении используется величина внутреннего угла. Класс $(\mathcal{L})$ – содержит в себе области, ограниченные кусочно-аналитическими кривыми, если углы в точках стыка отличны от 0 и 2.

В дальнейшем потребуется следующая лемма.

Л е м м а I. Пусть $G \in (\mathcal{L}_i)(z_1, \beta_1, \ldots, z_k, \beta_k)$. Пусть $\zeta_1 = \psi(\tau_1) = \psi(e^{i\theta_1})$ и $\zeta_2 = \psi(\tau_2) = \psi(e^{i\theta_2})$ – две точки на границе области G. Тогда

$$|\zeta_1 - \zeta_2| \asymp |\theta_1 - \theta_2| \cdot \left[|\theta_1 - \theta_j^*| + |\theta_1 - \theta_2| \right]^{\beta_j - 1}, \tag{19}$$

где $e^{i\theta_j^*}$ – ближайший образ угловой точки к точке ζ_1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. см.В.К.Дзядык [3] и Н.А.Лебедев и Н.А.Широков [6].

Теорему Н.И.Привалова о сопряженных функциях в терминах гармонических функций можно сформулировать следующим образом: Если гармоническая в единичном круге функция $u(z) \in H^s (0<s<1)$, $|z|<1$, то и сопряженная гармоническая функция $v(z) \in H^s$, $|z|<1$.

Будем говорить, что непрерывная в области G функция $u(z) \in H^s(G)$ $(0<s<1)$, если

$$|u(z) - u(z_1)| \leq A |z - z_1|^s, \tag{20}$$

где $z, z_1 \in G$, A не зависит от z и z_1.

Теорема 4. Пусть G область класса $(\mathcal{L}_i)(z_1,\beta_1,\dots,z_k,\beta_k)$, $0<\beta_j<1$, $j=1,\dots,k$. Если гармоническая в области функция $u(z)\in H^s(G)$ $(0<s<1)$, то и сопряженная функция $v(z)\in H^s(G)$.

Доказательство. Для простоты доказательства будем предполагать, что область G - имеет только одну угловую точку $z^*=\varphi(e^{i\theta^*})$ и величина внутреннего угла равна β. Так как $u(z)$ и $v(z)$ являются сопряженными гармоническими функциями в области G, то $u^*(\tau)=u(\varphi(\tau))$, и $v^*(\tau)=v(\varphi(\tau))$ будут сопряженными гармоническими функциями в единичном круге. Пусть $\zeta_1=\psi(\tau_1)=\psi(e^{i\theta_1})$ и $\zeta_2=\psi(\tau_2)=\psi(e^{i\theta_2})$ - точки на границе области G. Используя лемму I и условия теоремы получаем

$$|u^*(\tau_1)-u^*(\tau_2)|=|u(\psi(\tau_1))-u(\psi(\tau_2))|\le$$

$$\le|\psi(\tau_1)-\psi(\tau_2)|^s\le\frac{|\theta_1-\theta_2|^s}{\left[|\theta_1-\theta^*|+|\theta_1-\theta_2|\right]^{s(1-\beta)}}. \qquad (21)$$

Это означает, что 2π-периодическая функция

$$u^*(e^{i\theta})\in H^{\omega_{\theta_1}}, \qquad (22)$$

где

$$\omega_{\theta_1}(h)=\frac{h^s}{\left[|\theta_1-\theta^*|+h\right]^{s(1-\beta)}}.$$

Из теоремы I следует, что $v^*(e^{i\theta})\in H^{\omega_{\theta_1}}$.

Поэтому

$$|v^*(\tau_1)-v^*(\tau_2)|\le\frac{|\theta_1-\theta_2|^s}{\left[|\theta_1-\theta^*|+|\theta_1-\theta_2|\right]^{s(1-\beta)}}\asymp|\psi(\tau_1)-\psi(\tau_2)|^s. \qquad (23)$$

Следовательно $v(z)\in H^s(G)$, $0<s<1$. Теорема доказана.

Замечание 2. Область G, ограниченную кусочно-аналитической кривой, внутренние углы которой β_j удовлетворяют условиям $0<\beta_j<2$, можно представить в виде объединения областей G_ℓ, каждая из которых ограничена кусочно-аналитической кривой и углы в точках стыка удовлетворяют условиям $0<\beta_j'<1$, то-есть

$$G=\bigcup_1^N G_\ell. \tag{24}$$

Пусть гармоническая функция $u(z)\in H^s(G)$, $0<s<1$, $v(z)$ - сопряженная гармоническая функция в G. Очевидно, что $u(z)\in H^s(G_\ell)$, $\ell=1,\dots,N$. По теореме 4 $v(z)\in H^s(G_\ell)$, $\ell=1,\dots,N$. Следовательно, $v(z)\in H^s(G)$ $(0<s<1)$.

4. Для приближения гармонических функций гармоническими полиномами применим алгебраические многочлены, построенные одновременно В.К.Дзядыком [5] и Н.А.Лебедевым и Н.А.Широковым [6]. Формулировка результата теоремы 5 в форме гипотезы принадлежит В.К.Дзядыку.

Т е о р е м а 5. Пусть $u(z)$ - гармоническая функция в области $G\in(\mathcal{L})(z_1,\beta_1,\dots,z_k,\beta_k)$, $0<\beta_j<1$, $j=1,\dots,k$. Пусть $u(z)\in H^s(G)$, $0<s<1$. Тогда для всякого n существует гармонический полином $p_n(z)$ порядка не выше n, такой что

$$|u(z)-p_n(z)|\le\rho_n^s(z), \tag{25}$$

где $\rho_n(z)$ - расстояние от точки z до $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ - линии уровня.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(z)$ - сопряженная гармоническая функция к $u(z)$. По теореме 4 $v(z)\in H^s(G)$. Следовательно аналитическая в G функция $f(z)=u(z)+iv(z)$ принадлежит классу $A^s(G)$. По теореме В.К.Дзядыка существует алгебраический многочлен $\Pi_n(z)$ степени не выше n, такой что

$$|f(z)-\Pi_n(z)|\le\rho_n^s(z),\quad n=1,2,\dots,\quad z\in G. \tag{26}$$

Следовательно

$$|u(z)-p_n(z)| \leq \rho_n^s(z), \quad z \in G, \tag{27}$$

где $p_n(z) = Re\, \Pi_n(z)$ - гармонический полином порядка не выше n. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Учитывая замечание 2 и теорему 5 получаем следующий результат: Пусть G - область, ограниченная кусочно-аналитической кривой, для которой углы в точках стыка удовлетворяют неравенству $0<\beta_j<2$; $u(z)$ - гармоническая функция класса $H^s(G)$, $0<s<1$. Тогда для всякого n существует гармонический полином порядка не выше n, такой что $|u(z)-p_n(z)| \leq \rho_n^s(z)$, $z \in G$, где $\rho_n(z)$ - расстояние от точки z до $(1+\frac{1}{n})$ линии уровня.

Автор выражает В.К.Дзядыку искреннюю благодарность за постановку задач и поддержку в работе.

Литература

1. Бари Н.К., Тригонометрические ряды", М., 1961.
2. Голузин Г.М., " Геометрическая теория функций комплексного переменного", 1966.
3. Дзядык В.К., "О проблеме С.М.Никольского в комплексной области", Изв. АН СССР, сер.матем., т.23, 1959.
4. Дзядык В.К., "Об аналитических и гармонических преобразованиях функций и о приближении гармонических функций", УМЖ, т.19, № 5, 1967.
5. Дзядык В.К., " О применении обобщенных многочленов Фабера к приближению интегралов типа Коши и функций классов A^r в областях с гладкой и кусочно-гладкой границей", УМЖ,т.24,№ I, 1972.
6. Лебедев Н.А., Широков Н.А., "О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами", Изв.Арм.ССР,матем.,IУ, № I, 1971.
7. Мусхелишвили Н.И.,"Сингулярные интегральные уравнения", 1968.
8. Walsh J.L., Sewell W.E., Elliott H.M. "On the degree of polynomial approximation to harmonic and analytic functions. Trans.Amer.Math.Soc. v 67, N 2, 1949, 381-420.

Поступила I2.IУ.1974 г.

Институт математики АН УССР