

Л. П. Хорошун, Е. Н. Шикун

ДЕФОРМИРОВАНИЕ И ДОЛГОВРЕМЕННАЯ ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ  
СЛОИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-СТЕПЕННОЙ  
ФУНКЦИИ ДЛИТЕЛЬНОЙ МИКРОПРОЧНОСТИ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;  
e-mail [stochac@inmech.kiev.ua](mailto:stochac@inmech.kiev.ua)*

**Abstract.** The theory of long-term damageability for homogeneous materials is generalized for the case of the layered materials. The process of damageability of the composite components is modeled by appearance of stochastically arranged micropores. The destruction criterion for unit micro-volume is characterized by its long-term strength conditioning by the exponential-power dependence of brittle failure time on a degree of closeness to its limit value, which characterizes the short-time strength by the Huber-Mises criterion. The balance equation for damage (porosity) of components are formulated. The algorithms of calculation of dependences of microdamage of layered composite components on time are constructed as well as the corresponding curves are obtained for the exponential-power function of micro-durability.

**Key words:** layered material, long-term damageability, effective characteristics, balance equation of porosity, exponential-power function of micro-durability.

**Введение.**

При длительном воздействии нагрузок, меньших предельных, возможно внезапное разрушение элементов конструкций. Оно обусловлено появлением и развитием во времени рассеянных микроповреждений, приводящих, как правило, к образованию магистральных трещин. Физически поврежденность материала можно рассматривать как наличие рассеянных дефектов в виде микротрещин, микропустот или разрушенных микрообъемов, которые ведут к уменьшению эффективной или несущей части материала, оказывающей сопротивление нагрузкам.

Существующие математические модели, построенные для описания повреждаемости материала, можно отнести к трем направлениям. Первое направление связано с представлениями о микронеоднородности деформативно-прочностных свойств материала и механизме образования рассеянных микроразрушений при нагружении, представляемых системой микротрещин или микропор. Основные соотношения здесь строятся на основе теории деформирования структурно-неоднородных сред и определенных критериев разрушения отдельных структурных элементов материала. Второе направление основано на введении формального параметра поврежденности, как некоторой меры нарушения сплошности материала без указания ее физического смысла, и постулирование для него эволюционного уравнения в виде зависимости скорости образования повреждений от действующих напряжений. Третье направление базиру-

ется на предположении, что поврежденность описывается некоторыми термодинамическими параметрами, которые наряду с напряжениями и деформациями, вносят свой вклад в законы термодинамики. Это дает возможность формально записать зависимости между напряжениями, деформациями и параметрами поврежденности.

Неформальное первое направление, базирующееся на структурных моделях материала и определенных механизмах возникновения системы единичных повреждений, является наиболее адекватным реальным процессам повреждаемости материала. Представления и методы механики стохастически неоднородных сред позволяют построить теорию связанных процессов деформирования и кратковременной (мгновенной) повреждаемости при высоких нагрузках как для однородных [11, 12], так и для композитных материалов [14 – 17], и исследовать закономерности этих процессов в широком диапазоне механических свойств, включая температурные воздействия [10, 12, 18 – 21] и физически нелинейное деформирование [22 – 35].

Согласно экспериментальным данным и реальному поведению элементов конструкций и сооружений повреждаемость может быть как кратковременной (мгновенной), соответствующей уровню напряжений или деформаций в момент их задания, так и длительной, проявляющейся в росте поврежденности во времени после приложения нагрузки. Длительную повреждаемость обычно трактуют как результат накопления во времени рассеянных микроповреждений в виде микропор и микротрещин. На микроскопическом уровне прочность материала является неоднородной, т.е. предел мгновенной прочности и кривые длительной прочности микрообъема материала являются случайными функциями координат, описываемыми определенными плотностями или функциями распределения. При действии на макрообразец постоянных напряжений часть микрообъемов, предел прочности которых ниже эквивалентного напряжения, разрушится, т.е. на их месте образуются микротрещины или микрополости. На тех микроучастках, где напряжения меньше пределов прочности, но близки к ним, разрушение происходит через некоторый промежуток времени, который зависит от степени близости напряжения к пределу микропрочности.

Структурная теория длительной повреждаемости однородного и зернистого материала, построенная на основе моделей и методов механики стохастически неоднородных сред, изложена в работе [13, 36, 37]. В настоящей статье структурная теория повреждаемости обобщается на случай слоистого композитного материала. Процесс повреждаемости компонентов слоистого материала моделируется разрушением рассеянных микрообъемов компонентов материала и образованием на их месте стохастически расположенных микропор. Критерий разрушения единичного микрообъема характеризуется его длительной прочностью, описываемой экспоненциально-степенной функцией долговечности, определяемой зависимостью времени хрупкого разрушения от степени близости эквивалентного напряжения к его предельному значению, характеризующему кратковременную прочность по критерию Губера – Мизеса. Предел кратковременной прочности принимается случайной функцией координат, одноточечное распределение которой описывается степенной функцией распределения на некотором отрезке или распределением Вейбулла. Эффективные свойства и напряженно-деформированное состояние слоистого материала с системой стохастически расположенных микроповреждений в компонентах определяются на основе стохастических уравнений упругости слоистых материалов с пористыми компонентами. Исходя из свойств функций распределения и условия эргодичности случайного поля кратковременной микропрочности, а также зависимости времени хрупкого разрушения микрообъема от его напряженного состояния и кратковременной микропрочности, сформулированы для заданных макронапряжений или макродеформаций и произвольного момента времени уравнения баланса поврежденности (пористости) компонентов композита. Зависимости макронапряжения — макродеформации для слоистого материала с пористыми компонентами и уравнения баланса пористости компонентов описывают совместные процессы деформирования и длительной повреждаемости композита с учетом их взаимодействия, что приводит к росту макродеформаций при заданных макронапряжениях и снижению мак-

ронапряжений при заданных макродеформациях, происходящих во времени. На основе метода итераций построены алгоритмы вычисления зависимостей микроповрежденности компонентов слоистого материала от времени, макронапряжений или макродеформаций от времени, а также получены соответствующие кривые в случае экспоненциально-степенной функции микродолговечности.

§ 1. Рассмотрим слоистый  $N$ -компонентный материал с изотропными компонентами. Примем, что микропрочность его компонентов носит неоднородный характер [11, 38], в результате чего в процессе нагружения разрушения происходят в рассеянных микрообъемах компонента, где предел микропрочности ниже определенной комбинации напряжений, соответствующей тому или иному критерию прочности. Моделируя разрушенные микрообъемы компонентов пустыми квазисферическими порами, приходим к схеме слоистого композитного материала, повреждаемость компонентов которого описывается увеличением их пористостей  $p_i$  ( $i=1, \dots, N$ ). Если однородное напряженное состояние в  $i$ -компоненте пористого слоистого материала характеризуется макронапряжениями  $\langle \sigma_{jk}^i \rangle$ , то средние по неразрушенной части материала напряжения  $\bar{\sigma}_{jk}^i$  определяются [11] формулой

$$\bar{\sigma}_{jk}^i = \frac{1}{1-p_i} \langle \sigma_{jk}^i \rangle \quad (i=1, \dots, N). \quad (1.1)$$

Примем критерий кратковременного разрушения в микрообъеме неповрежденной части материала  $i$ -компонента в форме Губера – Мизеса [3]

$$I_{\bar{\sigma}}^i = k_i; \quad I_{\bar{\sigma}}^i = (\bar{\sigma}_{pq}^i \bar{\sigma}_{pq}^i)^{1/2} \quad (i=1, 2), \quad (1.2)$$

где  $\bar{\sigma}_{pq}^i$  – девиатор средних по неповрежденной части материала  $i$ -компонента напряжений;  $k_i$  – предельное значение инварианта  $I_{\bar{\sigma}}^i$  для  $i$ -компонента, являющееся случайной функцией координат.

Если инвариант  $I_{\bar{\sigma}}^i$  для некоторого микрообъема  $i$ -компонента не достигает соответствующего предельного значения  $k_i$ , то согласно критерию длительной прочности разрушение произойдет по истечении некоторого промежутка времени  $\tau_k^i$ , длительность которого зависит от степени близости  $I_{\bar{\sigma}}^i$  к предельному значению  $k_i$ . В общем случае эту зависимость можно представить в виде некоторой функции

$$\tau_k^i = \varphi_i(I_{\bar{\sigma}}^i, k_i), \quad (1.3)$$

причем  $\varphi_i(k_i, k_i) = 0$ ,  $\varphi_i(0, k_i) = \infty$  согласно (1.2).

Одноточечную функцию распределения  $F_i(k_i)$  предела прочности  $k_i$  микрообъема неповрежденной части материала  $i$ -компонента можно аппроксимировать степенным законом на некотором отрезке

$$F_i(k_i) = \begin{cases} 0, & k_i < k_{0i}; \\ \left( \frac{k_i - k_{0i}}{k_{1i} - k_{0i}} \right)^{\alpha_i}, & k_{0i} \leq k_i \leq k_{1i}; \\ 1, & k_i > k_{1i} \end{cases} \quad (1.4)$$

или распределением Вейбулла

$$F_i(k_i) = \begin{cases} 0, & k_i < k_{0i}; \\ 1 - \exp \left[ -m_i(k_i - k_{0i})^{\alpha_i} \right], & k_i \geq k_{0i}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Здесь  $k_{0i}$  – минимальная величина предельного значения  $k_i$ , с которого начинается разрушение в некоторых объемах  $i$ -компонента;  $k_{0i}$ ,  $m_i$ ,  $\alpha_i$  – постоянные, выбираемые из условия аппроксимации разброса прочности в  $i$ -компоненте.

Предположим, что случайное поле предела микропрочности  $i$ -компонента  $k_i$  является статистически однородным, что характерно для реальных материалов, а размеры единичных микроразрушений и расстояний между ними пренебрежимо малы по сравнению с толщинами слоев. Тогда имеет место свойство эргодичности, согласно которому функция распределения  $F_i(k_i)$  определяет относительное содержание неразрушенной части материала  $i$ -компонента, в котором предел микропрочности меньше значения  $k_i$ . Поэтому при ненулевых напряжениях  $\bar{\sigma}_{jk}^i$  функция  $F_i(I_{\bar{\sigma}}^i)$  определяет согласно (1.2), (1.4), (1.5) относительное содержание мгновенно разрушенных микрообъемов материала  $i$ -компонента. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, принимая начальную пористость  $i$ -компонента равной  $p_{0i}$ , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости  $i$ -компонента при кратковременной повреждаемости

$$p_i = p_{0i} + (1 - p_{0i})F_i(I_{\bar{\sigma}}^i), \quad (1.6)$$

которое с учетом (1.1) приводится к виду

$$p_i = p_{0i} + (1 - p_{0i})F_i\left(\frac{1}{1 - p_i}I_{\langle \sigma \rangle}^i\right), \quad (1.7)$$

где  $I_{\langle \sigma \rangle}^i = (\langle \sigma_{jk}^i \rangle' \langle \sigma_{jk}^i \rangle')^{1/2}$  – второй инвариант девиатора тензора средних напряжений в  $i$ -компоненте  $\langle \sigma_{jk}^i \rangle$ .

Поскольку обычно заданы макронапряжения  $\langle \sigma_{jk} \rangle$  или макродеформации  $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$ , уравнение баланса пористости компонента (1.7) целесообразно записать в терминах макропараметров. Чтобы определить средние напряжения в  $i$ -компоненте  $\langle \sigma_{jk}^i \rangle$ , выразив их соответственно через макронапряжения  $\langle \sigma_{jk} \rangle$  или макродеформации  $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$ . При заданных макронапряжениях  $\langle \sigma_{jk} \rangle$  средние в  $i$ -компоненте напряжения  $\langle \sigma_{jk}^i \rangle$  связаны с макронапряжениями  $\langle \sigma_{jk} \rangle$  зависимостями

$$\langle \sigma_{jk}^i \rangle = \frac{\mu_{ip}}{\langle \mu_p \rangle} \langle \sigma_{jk} \rangle + \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{(3\lambda_{ip} + 2\mu_{ip})\mu_{ip}}{\lambda_{ip} + 2\mu_{ip}} \left\langle \frac{(3\lambda_p + 2\mu_p)\mu_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} - \frac{\mu_{ip}}{\langle \mu_p \rangle} \right] \langle \sigma_{rr} \rangle + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\lambda_{ip}}{\lambda_{ip} + 2\mu_{ip}} - \frac{(3\lambda_{ip} + 2\mu_{ip})\mu_{ip}}{\lambda_{ip} + 2\mu_{ip}} \left\langle \frac{(3\lambda_p + 2\mu_p)\mu_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle \right] \langle \sigma_{33} \rangle \right\} \delta_{jk};$$

$$\langle \sigma_{j3}^i \rangle = \langle \sigma_{j3} \rangle \quad (j, k, r=1, 2; p=1, 2, 3; i=1, \dots, N), \quad (1.8)$$

а при заданных макродеформациях  $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$  средние в  $i$ -компоненте напряжения  $\langle \sigma_{jk}^i \rangle$  связаны с макродеформациями  $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$  зависимостями [2, 7, 9]

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{jk}^i \rangle &= 2\mu_{ip} \langle \varepsilon_{jk} \rangle + \frac{\lambda_{ip}}{\lambda_{ip} + 2\mu_{ip}} \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \times \\ &\times \left[ \left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle + 2\mu_{ip} \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle \right] \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \delta_{jk}; \\ \langle \sigma_{33}^i \rangle &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left( \left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \langle \varepsilon_{33} \rangle \right); \\ \langle \sigma_{j3}^i \rangle &= 2 \left\langle \frac{1}{\mu_p} \right\rangle^{-1} \langle \varepsilon_{j3} \rangle \\ &(j, k, r=1, 2; i=1, \dots, N). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для слоистого  $N$ -компонентного материала с изотропными компонентами, модули объемного сжатия и сдвига материала каркаса  $i$ -компонента которого обозначим  $K_i$ ,  $\mu_i$ , его пористость  $p_i$ , а объемное содержание пористого  $i$ -компонента  $c_i$  ( $i=1, \dots, N$ ), макронапряжения  $\langle \sigma_{jk} \rangle$  в композите связаны с макродеформациями  $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$  соотношениями

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{jk} \rangle &= (\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*) \langle \varepsilon_{jk} \rangle + (\lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle) \delta_{jk}; \\ \langle \sigma_{33} \rangle &= \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \\ \langle \sigma_{j3} \rangle &= 2\lambda_{44}^* \langle \varepsilon_{j3} \rangle \quad (j, k, r=1, 2). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь эффективные модули упругости композита  $\lambda_{11}^*$ ,  $\lambda_{12}^*$ ,  $\lambda_{13}^*$ ,  $\lambda_{33}^*$ ,  $\lambda_{44}^*$  определяются [2, 7, 9] через соответствующие модули пористых компонентов  $\lambda_{ip}$ ,  $\mu_{ip}$  ( $i=1, \dots, N$ ) формулами

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^* &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^2 + 4 \left\langle \frac{\mu_p (\lambda_p + \mu_p)}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle; \\ \lambda_{12}^* &= \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^2 + 2 \left\langle \frac{\lambda_p \mu_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle; \end{aligned}$$

$$\lambda_{13}^* = \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle; \quad \lambda_{33}^* = \left\langle \frac{1}{\lambda_p + 2\mu_p} \right\rangle^{-1}; \quad \lambda_{44}^* = \left\langle \frac{1}{\mu_p} \right\rangle^{-1}, \quad (1.11)$$

где угловые скобки обозначают осреднение:

$$\langle f^* \rangle = \sum_{i=1}^N c_i f_{ip}, \quad (1.12)$$

причем эффективные модули пористых включений  $K_{1p}$ ,  $\mu_{1p}$  и матрицы  $K_{2p}$ ,  $\mu_{2p}$  согласно [6, 8] определяются формулами

$$K_{ip} = \frac{4K_i\mu_i(1-p_i)^2}{4\mu_i + (3K_i - 4\mu_i)p_i}; \quad \mu_{ip} = \frac{(9K_i + 8\mu_i)\mu_i(1-p_i)^2}{9K_i + 8\mu_i - (3K_i - 4\mu_i)p_i} \quad (i=1, 2). \quad (1.13)$$

Если напряжения в  $i$ -компоненте  $\bar{\sigma}_{jk}^i$  действуют в течение некоторого времени  $t$ , то согласно критерию длительной прочности (1.3) за это время в  $i$ -компоненте разрушатся микрообъемы с такими значениями предела микропрочности  $k_i$ , для которых имеет место неравенство

$$t \geq \tau_k^i = \varphi_i(I_{\bar{\sigma}}^i, k_i), \quad (1.14)$$

где средние в  $i$ -компоненте напряжения  $\langle \sigma_{jk}^i \rangle$  определяются выражениями (1.8) или (1.9), соответственно, при заданных макронапряжениях  $\langle \sigma_{jk} \rangle$  или макродеформациях  $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$ .

Если время  $\tau_k^i$  хрупкого разрушения  $i$ -компонента имеет конечное значение для произвольных  $I_{\bar{\sigma}}^i$ , что может наблюдаться при высоких температурах, то функцию долговечности можно представить экспоненциально-степенной зависимостью

$$\varphi_i(I_{\bar{\sigma}}^i, k_i) = \tau_{0i} \left\{ \exp m_{1i} \left[ \left( \frac{k_i}{I_{\bar{\sigma}}^i} \right)^{n_{1i}} - 1 \right] - 1 \right\}^{n_{2i}}, \quad (1.15)$$

имеющей достаточное число постоянных  $\tau_{0i}$ ,  $m_{1i}$ ,  $n_{1i}$ ,  $n_{2i}$  для аппроксимации экспериментальных кривых. Подставляя (1.15) в (1.14), приходим к неравенству

$$k_i \leq I_{\bar{\sigma}}^i \left[ 1 + \frac{1}{m_{1i}} \ln \left( 1 + \bar{t}_i^{1/n_{2i}} \right) \right]^{1/n_{1i}} \quad \left( \bar{t}_i = \frac{t}{\tau_{0i}} \right). \quad (1.16)$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности  $F_i(k_i)$ , приходим к выводу, что функция  $F_i[I_{\bar{\sigma}}^i \psi_i(\bar{t}_i)]$ , где

$$\psi_i(\bar{t}_i) = \left[ 1 + \frac{1}{m_{1i}} \ln \left( 1 + \bar{t}_i^{1/n_{2i}} \right) \right]^{1/n_{1i}} \quad (1.17)$$

определяет в момент времени  $\bar{t}_i$  относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала  $i$ -компонента. Тогда с учетом (1.1) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для  $i$ -компонента при длительной повреждаемости (1.6) можно представить в виде

$$p_i = p_{0i} + (1 - p_{0i}) F_i \left[ \frac{I_{<\sigma>}^i \psi_i(\bar{t}_i)}{1 - p_i} \right], \quad (1.18)$$

где пористость  $i$ -компонента  $p_i$  является функцией безразмерного времени  $\bar{t}_i$ .

Уравнения баланса пористости (1.18), (1.8), (1.9), (1.17) в начальный момент  $\bar{t}_i = 0$  определяют кратковременную (мгновенную) поврежденность материала  $i$ -компонента. С ростом времени уравнения (1.18), (1.8), (1.9), (1.17) определяют длительную его поврежденность, которая состоит из кратковременной и дополнительной поврежденности, развивающейся во времени.

§ 2. На основе соотношений (1.11) – (1.13), (1.18), (1.8), (1.9), (1.17) можно построить итерационный алгоритм для определения объемного содержания микроповреждений в компонентах и напряженно-деформированного состояния композита. С этой целью воспользуемся методом секущих [1].

Записав уравнение баланса пористости  $i$ -компонента (1.18) в виде

$$\varphi_i(p_i) = \left\{ p_i - p_{0i} + (1 - p_{0i}) F_i \left[ \frac{I_{<\sigma>}^i \psi_i(\bar{t}_i)}{1 - p_i} \right] \right\} = 0, \quad (2.1)$$

легко проверить, что корень  $p_i$  находится в интервале  $[p_{0i}, 1]$ , так как имеют место неравенства

$$\varphi_i(p_{0i}) < 0; \quad \varphi_i(1) > 0. \quad (2.2)$$

Поэтому нулевое приближение корня  $p_i^{(0)}$  определяется формулой

$$p_i^{(0)} = \frac{a_i^{(0)} \varphi_i(b_i^{(0)}) - b_i^{(0)} \varphi_i(a_i^{(0)})}{\varphi_i(b_i^{(0)}) - \varphi_i(a_i^{(0)})}, \quad (2.3)$$

где  $a_i^{(0)} = p_{0i}$ ,  $b_i^{(0)} = 1$ . Последующие приближения метода секущих определяются итерационным процессом

$$p_i^{(m)} = \frac{a_i^{(m)} \varphi_i(b_i^{(m)}) - b_i^{(m)} \varphi_i(a_i^{(m)})}{\varphi_i(b_i^{(m)}) - \varphi_i(a_i^{(m)})}, \quad (2.4)$$

$$a_i^{(m)} = a_i^{(m-1)}; \quad b_i^{(m)} = p_i^{(m-1)} \quad \text{при} \quad \varphi_i(a_i^{(m-1)}) \varphi_i(p_i^{(m-1)}) \leq 0;$$

$$a_i^{(m)} = p_i^{(m-1)}; \quad b_i^{(m)} = b_i^{(m-1)} \quad \text{при} \quad \varphi_i(a_i^{(m-1)}) \varphi_i(p_i^{(m-1)}) \geq 0$$

$$(m = 1, 2, \dots),$$

который продолжается до выполнения условия

$$\left| \varphi_i(p_i^{(m)}) \right| < \varepsilon, \quad (2.5)$$

где  $\varepsilon$  – точность вычисления корня.

На основе проведенных вычислений получены диаграммы макродеформирования слоистых композитных материалов при микроповреждениях в матрице для распределения Вейбулла (1.5) и функции  $\psi_2(\bar{t}_2)$ , определяемой формулой (1.17), как при заданных макродеформациях  $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$ , так и при заданных макронапряжениях  $\langle \sigma_{jk} \rangle$ .

В качестве включений и матрицы приняты соответственно алюмоборосиликатное стекло с характеристиками [2] и объемным содержанием

$$E_1 = 70 \text{ ГПа}; \nu_1 = 0,2; c_1 = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0 \quad (2.6)$$

и эпоксидная матрица с характеристиками неповрежденной части [4]

$$E_2 = 3 \text{ ГПа}; \nu_2 = 0,35, \quad (2.7)$$

где  $E_1$  и  $E_2$  – модули Юнга,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  – коэффициенты Пуассона неповрежденной части соответственно включений и матрицы, а также при

$$p_{02} = 0; k_{02}/\mu_2 = 0,01; m_2 = 1000; \alpha_2 = 2; \sigma_{2p} = 0,011 \text{ ГПа} (\sigma_{2p} = \sqrt{3/2}k_{20});$$

$$m_{12} = 1; n_{22} = n_{12} = 1. \quad (2.8)$$

В случае заданных макропараметров

$$\langle \sigma_{33} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle = 0 \quad (2.9)$$

согласно (1.1) макронапряжение  $\langle \sigma_{33} \rangle$  в композите связано с макродеформацией  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  соотношением

$$\langle \sigma_{33} \rangle = \frac{1}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*} [(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*)\lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2] \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad (2.10)$$

при этом в уравнении баланса пористости, которое записывается в виде (1.18), (1.13), (1.17), имеют место равенства

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle = 0, \quad (2.11)$$

что эквивалентно условию (2.9).

На рис. 1 для объемного содержания включений  $c_1 = 0,25$  изображены кривые зависимостей пористости матрицы  $p_2$  от времени  $\bar{t}_2$  при различных значениях макронапряжения  $\langle \sigma_{33} \rangle$ . На рис. 2 для объемного содержания включений  $c_1 = 0,25$  показаны кривые зависимостей макродеформации  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  от времени  $\bar{t}_2$  при различных значениях макронапряжения  $\langle \sigma_{33} \rangle$ . Графики зависимостей  $p_2$  от  $\bar{t}_2$  и  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  от  $\bar{t}_2$  при  $c_1 = 0$  представлены в [36, 37]. Как видим, при всех значениях объемных содержаний включений  $c_1$  для определенных значений времени  $\bar{t}_2$  макродеформации и поврежденность матрицы достигают критической величины, являющейся началом разрушения материала.

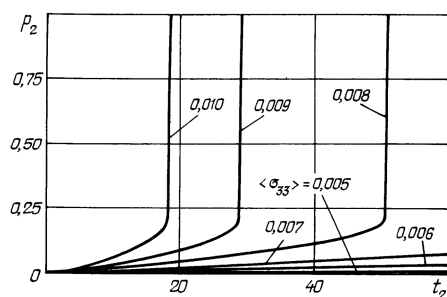


Рис. 1

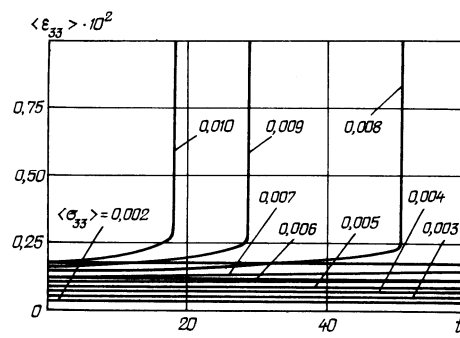


Рис. 2



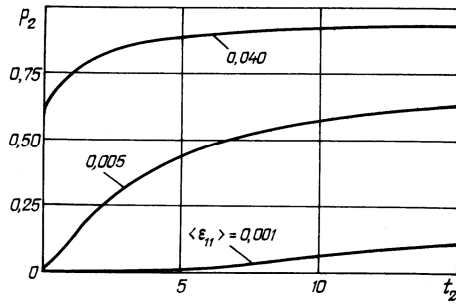


Рис. 3

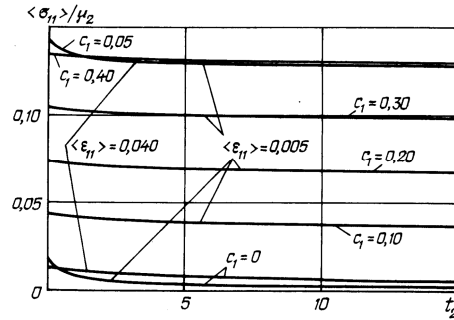


Рис. 4

Сравнение результатов, полученных для экспоненциально-степенной функции долговечности (1.17), с результатами для дробно-степенной функции долговечности показывает, что при заданных макропараметрах (2.9) характер зависимостей макродеформации  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  от времени  $\bar{t}_2$  и зависимостей пористости матрицы  $p_2$  от времени  $\bar{t}_2$  различен. В случае дробно-степенной функции долговечности для макронапряжений, меньших определенных значений, кривые этих зависимостей имеют горизонтальную асимптоту, тогда как в случае экспоненциально-степенной функции долговечности для всех значений макронапряжений макродеформация и поврежденность матрицы достигают критической величины, являющейся началом разрушения.

В случае заданных макропараметров

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = 0 \quad (2.12)$$

согласно (1.1) макронапряжение  $\langle \sigma_{11} \rangle$  в композите связано с макродеформациями  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  также соотношением

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \frac{\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} [(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) \lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2] \langle \varepsilon_{11} \rangle. \quad (2.13)$$

При этом в уравнении баланса пористости, которое записывается в виде (1.18), (1.12), (1.17), принимается

$$\langle \varepsilon_{22} \rangle = \frac{(\lambda_{13}^*)^2 - \lambda_{12}^* \lambda_{33}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} \langle \varepsilon_{11} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{33} \rangle = \frac{(\lambda_{12}^* - \lambda_{11}^*) \lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} \langle \varepsilon_{11} \rangle, \quad (2.14)$$

что эквивалентно условию (2.12).

На рис. 3 изображены кривые зависимостей пористости матрицы  $p_2$  от времени  $\bar{t}_2$  при различных значениях макродеформации  $\langle \varepsilon_{11} \rangle = 0,002; 0,005; 0,04$ . Расчеты показывают, что зависимости  $p_2$  от  $\bar{t}_2$  одинаковы для всех значений объемного содержания включений  $c_1$ . Как видно из графиков, с увеличением макродеформации  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  микроповрежденность  $p_2$  увеличивается. Здесь наблюдается рост поврежденности со временем, в то время как в экспериментах с полимерами [5] при фиксированной деформации поврежденность заметным образом не изменяется. Такое расхождение можно объяснить как релаксацией напряжений в полимерах, обусловленной ползучестью, которая здесь не учитывается, так и приближенностью рассматриваемой модели повреждаемости в конечновременной форме.

На рис. 4 показаны кривые зависимостей макронапряжения  $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$  от времени  $\bar{t}_2$  при значениях макродеформации  $\langle \varepsilon_{11} \rangle = 0,005; 0,04$  и различных значениях

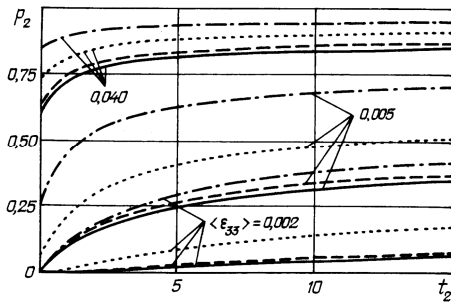


Рис. 5

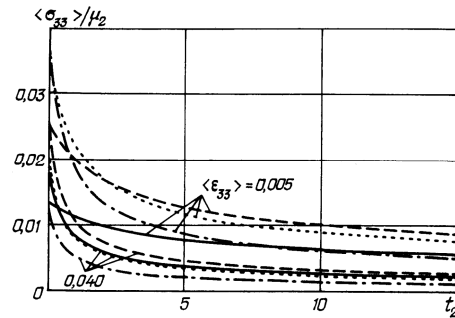


Рис. 6

объемного содержания включений  $c_1$ . Как видим, при всех значениях объемного содержания включений  $c_1 < 1$  кривые являются нисходящими.

В случае заданных макропараметров

$$\langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle = 0 \quad (2.15)$$

согласно (1.1) макронапряжение  $\langle \sigma_{33} \rangle$  в композите связано с макродеформацией  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  соотношением (2.10). При этом в уравнении баланса пористости, которое записывается в виде (1.18), (1.13), (1.17) имеют место равенства

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle = \langle \varepsilon_{22} \rangle = -\frac{\lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*} \langle \varepsilon_{33} \rangle, \quad (2.16)$$

что эквивалентно условию (2.14).

На рис. 5 изображены кривые зависимостей пористости матрицы  $p_2$  от времени  $\bar{t}_2$  при различных значениях макродеформации  $\langle \varepsilon_{33} \rangle = 0,002; 0,005; 0,04$  объемного содержания включений  $c_1$ . На графиках сплошной линией показаны кривые при объемном содержании включений  $c_1 = 0$ , штриховой – при  $c_1 = 0,25$ , точечной – при  $c_1 = 0,5$ , штрих-пунктирной – при  $c_1 = 0,75$ . Такие же обозначения приняты и на рис. 6. Графики показывают, что с увеличением макродеформации  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  для всех объемных содержаний включений микроповрежденность  $p_2$  увеличивается.

На рис. 6 показаны кривые зависимостей макронапряжения  $\langle \sigma_{33} \rangle / \mu_2$  от времени  $\bar{t}_2$  при значениях макродеформации  $\langle \varepsilon_{33} \rangle = 0,005; 0,04$  и различных значениях объемного содержания включений  $c_1$ .

Как видим при всех значениях объемного содержания включений  $c_1 < 1$  кривые являются нисходящими. Однако следует отметить, что уменьшение напряжений со временем не является монотонной функцией деформаций.

Сравнение результатов, полученных для экспоненциально-степенной функции долговечности (1.17) с результатами для дробно-степенной функции долговечности показывает, что при заданных макропараметрах (2.12) и (2.15) характер зависимостей, соответственно, макронапряжений  $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$  и  $\langle \sigma_{33} \rangle / \mu_2$  от времени  $\bar{t}_2$  и зависимостей пористости матрицы  $p_2$  от времени  $\bar{t}_2$  в обоих случаях одинаков.

Р Е З Ю М Е . Теорію довготривалої пошкоджуваності узагальнено на випадок шаруватих матеріалів. Процес пошкоджуваності компонентів матеріалу моделюється утворенням в них стохастично розташованих мікропор. Критерій руйнування одиничного мікрооб'єму характеризується його довготривалою міцністю, обумовленою експоненційно-степенною залежністю часу крихкого руйнування від ступеня близькості еквівалентного напруження до його граничного значення, що характеризує короточасну міцність за критерієм Губера – Мізеса, яке приймається випадковою функцією координат. Для довільного моменту часу сформульовано рівняння балансу пошкоженості (пористості) компонентів. Побудовано алгоритми обчислення залежностей мікропошкоджуваності компонентів шаруватого матеріалу від часу, макронапружень або макродеформацій від часу, а також отримано відповідні криві для експоненційно-степенової функції мікродовговічності.

1. Березикович Я.С. Приближенные вычисления. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. – 462 с.
2. Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Ванін Г.А. и др. Механика материалов. – К.: Наук. думка, 1982. – 368 с. – (Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т.; Т.1).
3. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
4. Крегерс А.Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов // Механика композитных материалов. – 1988. – № 3. – С. 433 – 441.
5. Тамуж В.П., Куксенко В.С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
6. Хорошун Л.П. К теории насыщенных пористых сред // Прикл. механика. – 1976. – **12**, № 12. – С. 35 – 41.
7. Хорошун Л.П. Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микро неоднородных сред // Прикл. механика. – 1978. – **14**, № 2. – С. 3 – 17.
8. Хорошун Л.П. Метод условных моментов в задачах механики композитных материалов // Прикл. механика. – 1987. – **23**, № 10. – С. 100 – 108.
9. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шикула Е.Н., Назаренко Л.В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – К.: Наук. думка, 1993. – 390 с. – (Механика композитов: В 12-ти т.; Т. 3).
10. Хорошун Л.П., Шикула Е.Н. Влияние температуры на микрповреждаемость зернистого материала // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2001. – № 5. – С. 382 – 387.
11. Khoroshun L.P. Principles of the Micromechanics of Material Damage. 1. Short-Term Damage // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, N 10. – P. 1035 – 1041.
12. Khoroshun L.P. Micromechanics of Short-Term Thermal Microdamageability // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 9. – P. 1158 – 1165.
13. Khoroshun L.P. Principles of the Micromechanics of Material Damage. 2. Long-Term Damage // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 2. – P. 127 – 135.
14. Khoroshun L.P., Shikula E.N. The Theory of Short-Term Microdamageability of Granular Composite Materials // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 8. – P. 1060 – 1066.
15. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Simulation of the Short-Term Microdamageability of Laminated Composites // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 9. – P. 1181 – 1186.
16. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Microdamage of Fibrous Composite Materials with Transversally Isotropic Fibers under Microfailures in a Binder // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 12. – P. 1605 – 1611.
17. Khoroshun L.P., Shikula E.N. The Micromechanics of Short-Term Damageability of Fibrolaminar Composites // Int. Appl. Mech. – 2001. – **36**, N 5. – P. 638 – 646.
18. Khoroshun L.P., Shikula E.N. A Note on the Theory of Short-Term Microdamageability of Granular Composites under Thermal Actions // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 1. – P. 60 – 67.
19. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Microdamageability of Laminated Materials under Thermal Actions // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 4. – P. 432 – 439.
20. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Microdamageability of Fibrous Materials with Transversely Isotropic Fibers under Thermal Actions // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, № 6. – P. 701 – 709.
21. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Damage Micromechanics of Laminated Fibrous Composites under Thermal Actions // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 9. – P. 1083 – 1093.
22. Khoroshun L.P., Shikula E.N. A Theory of Short-Term Microdamage for a Homogeneous Material under Physically Nonlinear Deformation // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 4. – P. 338 – 395.
23. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Short-Term Microdamageability of Granular Material under Physically Nonlinear Deformation // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 6. – P. 656 – 663.
24. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Influence of Physically Nonlinear Deformation on Short-Term Microdamage of Laminar Material // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 8. – P. 878 – 885.
25. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Influence of Physically Nonlinear Deformation on Short-Term Microdamage of a Fibrous Material // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 10. – P. 1137 – 1144.

26. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Deformation of Particulate Composite with Physically Nonlinear Inclusions and Microdamageable Matrix // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 2. – P. 111 – 117.
27. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Influence of the Physical Nonlinearity of Matrix on the Deformation of a Particulate Composite with Microdamageable Inclusions // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 4. – P. 345 – 351.
28. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Deformation of a Laminated Composite with a Physically Nonlinear Reinforcement and Microdamageable Matrix // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 11. – P. 1246 – 1253.
29. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Short-Term Microdamage of a Laminated Material with Nonlinear Matrix and Microdamaged Reinforcement // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 12. – P. 1331 – 1338.
30. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Deformation of Fibrous Composite with Physically Nonlinear fibers and Microdamageable Matrix // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 1. – P. 32 – 39.
31. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Short-Term Microdamageability of a Fibrous Composite with Physically Nonlinear Matrix and Microdamaged Reinforcement // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 2. – P. 127 – 135.
32. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Short-Term Microdamage of a Physically Nonlinear Particular Material under a Combination of Normal and Tangential Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 12. – P. 1356 – 1363.
33. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Short-Term Microdamage of a Physically Nonlinear Fibrous Material under Simultaneous Normal and Tangential Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 3. – P. 282 – 290.
34. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Short-Term Microdamage of a Physically Nonlinear Laminate under Simultaneous Normal and Tangential Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 4. – P. 409 – 417.
35. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Mesomechanics of Deformation and Short-Term Damage of Linear Elastic Homogeneous and Composite Materials // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, N 6. – P. 591 – 620.
36. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Deformation and Long-Term Damage of Particulate Composites with Stress-Rupture Microstrength Described by a Fractional-Power Function // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 10. – P. 1075 – 1083.
37. *Khoroshun L.P., Shikula E.N.* Micromechanics of Long-Term Damage of Particulate Composites with Unlimited Microdurability // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 11. – P. 1204 – 1212.
38. *Weibull W.A.* A Statistical theory of the strength of materials // *Proc. Roy. Swed. Inst. Eng. Res.* – 1939. – N 151. – P. 5 – 45.

Поступила 02.11.2007

Утверждена в печать 28.05.2009

