

УДК 631.362

*А.И. Завгородний,  
д-р техн. наук, проф.,  
О.В. Синяева, асп.  
Харьковский национальный  
технический университет  
сельского хозяйства  
имени Петра Василенко*

**АСИММЕТРИЧНЫЙ РЕЖИМ  
ДВИЖЕНИЯ ШАРА  
В ВОЗДУШНОМ ПОТОКЕ  
МЕЖДУ ВИБРИРУЮЩИМИ  
ПЛОСКОСТЯМИ**

*Приведены теоретические исследования пространственного периодического движения сферической частицы в воздушном потоке между двумя параллельными плоскостями, которые колеблются. Рассмотрен случай, когда плоскости расположены наклонно или имеют разные свойства, в результате чего движение частицы является асимметричным относительно каждой из них.*

*Ключевые слова: асимметричное движение, воздушная среда*

---

Для разделения зерновых смесей по коэффициенту парусности применяют сепараторы, в основе работы которых лежит использование воздушного потока. Наряду с преимуществами — простота конструкции, надежность в эксплуатации, эти сепараторы имеют существенный недостаток: чрезвычайно короткий интервал времени обработки частиц смеси воздушным потоком (обычно — только доли секунды), что отрицательно сказывается на эффективности разделения. Известный путь устранения этого недостатка за счет увеличения габаритных размеров машин в настоящее время можно считать уже исчерпанным. В работах [1, 2] предложена новая конструкция сепаратора с дополнительными рабочими органами в виде пакета колеблющихся плоскостей, установленных вдоль линий воздушного потока. Одновременно с движением частиц в воздушном потоке, происходят их регулярные соударения с плоскостями, что затормаживает перемещение вдоль плоскостей и, как результат, — увеличивает время обработки частиц смеси воздухом. Предстоит выяснить, какой вклад в изменение указанного времени вносят настройки сепаратора (скорость воздушного потока, наклон плоскостей, частота и амплитуда их колебаний ...) и свойства частиц обрабатываемого материала (упругость, крупность, инертность вращения ...). Важным является также вопрос о влиянии указанных параметров на комплексный критерий разделения смесей — дальность перемещения частиц рабочими органами.

Движение частиц в воздушной среде изучено Василенко П.М. в работе [3]. Пространственное соударение тел произвольной формы рассмотрено Плявниексом В.Ю. [4]. Кобринским А.Е. и Кобринским А.А. разработана методика исследования периодических режимов движения тел в виброударных системах [5]. На базе этих источников авторами настоящей работы исследован частный случай симметричного периодического движения сферических частиц, когда плоскости установлены вертикально и имеют одинаковые свойства (упругость, шероховатость) [6]. Однако уже при наклонном положении плоскостей симметричность движения нарушается. Очевидно, что движение будет асимметричным и в случае, когда плоскости будут иметь различные свойства. Таким образом, исследование будет неполным без рассмотрения асимметричного режима движения частиц, что и есть основной целью данной работы. Отметим еще, что при симметричном движении частицы допускалось вместо целого периода, совпадающего с периодом колебаний плоскостей, рассматривать лишь

© А.И. Завгородний, О.В. Синяева, 2012

его половину. Это сокращало время поиска параметров, обеспечивающих периодический режим, численными методами. Следует указать, что каждая итерация поиска сопровождалась численным решением дифференциальных уравнений движения частицы от одной плоскости к другой. Теперь (в случае асимметрии) на полном периоде движения частицы потребуется указанные уравнения на каждой итерации решать дважды — при движении частицы туда и обратно. В этих условиях время расчета может оказаться, если не решающим, то и немаловажным фактором. Поэтому еще одной (дополнительной) целью поставим упрощение расчетов, разумеется, без существенной потери точности.

Воспользуемся далее результатами, полученными нами в работе [6]. Ниже приведем уравнения удара шара о плоскость в пространстве и дифференциальные уравнения движения частицы в воздушном потоке вне контакта с плоскостями. Уравнения удара:

$$v_x = u_x - \frac{\mu(u_x + \varpi_z r)}{1 + \mu}, \quad v_y = -R u_y, \quad v_z = u_z - \frac{\mu(u_z - \varpi_x r)}{1 + \mu}, \quad (1)$$

$$\Omega_x = \varpi_x + \frac{u_z - \varpi_x r}{r(1 + \mu)}, \quad \Omega_y = \varpi_y, \quad \Omega_z = \varpi_z - \frac{u_x + \varpi_z r}{r(1 + \mu)}, \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) и далее обозначено:  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  — скорость центра тяжести шара до удара;  $\vec{U} = (U_x, U_y, U_z)$  — скорость точки соприкосновения шара с плоскостью до удара;  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ,  $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$  — то же после удара;  $\vec{\varpi} = (\varpi_x, \varpi_y, \varpi_z)$  — угловая скорость движения шара до удара;  $\vec{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$  — угловая скорость движения шара после удара;  $R$  — коэффициент восстановления скорости при ударе;  $r, \rho$  — соответственно, радиус шара и радиус инерции шара;  $\mu = (\rho/r)^2$ , причем для шара:  $0 < \mu < 2/3$  [7].

Переход от скоростей движения центра масс частицы к скоростям точки ее соприкосновения с плоскостью, соответственно, до и после удара осуществляется по зависимостям:

$$U_x = u_x + \varpi_z r, \quad U_y = u_y, \quad U_z = u_z - \varpi_x r, \quad (3)$$

$$V_x = v_x + \Omega_z r, \quad V_y = v_y, \quad V_z = v_z - \Omega_x r. \quad (4)$$

Дифференциальные уравнения движения центра масс частицы имеют вид:

$$\dot{x} = -k(\dot{x} - V_n) \sqrt{(\dot{x} - V_n)^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad (5)$$

$$\ddot{y} = A \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_1) - g \sin \alpha - k \dot{y} \sqrt{(\dot{x} - V_n)^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad (6)$$

$$\ddot{z} = g \cos \alpha - k \dot{z} \sqrt{(\dot{x} - V_n)^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad (7)$$

где:  $k$  — коэффициент квадратичного сопротивления воздушной среды;  $V_n$  — скорость воздушного потока;  $A, \omega$  — соответственно, амплитуда и частота колебаний плоскостей;  $\alpha$  — угол отклонения плоскостей от вертикали;  $\varphi_1$  — фаза удара частицы об одну из плоскостей;  $g$  — ускорение свободного падения.

Уравнения (5)—(7) записаны в относительной системе координат, неподвижно связанной с плоскостью. Причем ось  $x$  направлена вдоль линий воздушного потока, ось  $y$  — по нормали к плоскости, а ось  $z$  — в сторону действия силы тяжести так, что названные оси образуют правую тройку координат. Начало этих осей совмещено с точкой соприкосновения частицы с плоскостью при ударе. Поскольку трение частиц о воздух во вращательном движении пренебрежимо мало, считалось, что угловая скорость частицы изменяется только в момент удара о плоскость.

Как уже упоминалось, в установившемся режиме, частицы совершают однотипные движения с периодом, совпадающим с периодом колебаний плоскостей. Причем время перемещения частицы вдоль оси  $y$  между последовательными соударениями о плоскости близко к половине указанного периода. Например, при  $\omega = 200 \text{ с}^{-1}$  это время составляет всего  $0,314 \text{ с}$ . Естественно предположить, что сопротивление воздуха в течение такого скоротечного отрезка времени не окажет существенного влияния на полет частицы и этим сопротивлением можно пренебречь. Тогда уравнение упрощается:

$$\ddot{y} = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_1) - g \sin \alpha. \quad (8)$$

В таком виде оно легко интегрируется:

$$\dot{y} = -gt \sin \alpha - A\omega \cos(\omega t + \varphi_1) + C_1; \quad (9)$$

$$y = C_1 t - A \sin(\omega t + \varphi_1) - \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha + C_2. \quad (10)$$

Если начало осей координат совпадает с точкой соприкосновения частицы с плоскостью (см. выше), то начальными условиями для определения постоянных  $C_1, C_2$  будут:  $y = r$ ,  $\dot{y} = v_{y1}$  при  $t = 0$ . После их определения получим уравнения движения частицы вдоль оси  $y$  от одной плоскости к другой:

$$\dot{y} = v_{y1} - gt \sin \alpha - A\omega [\cos(\omega t + \varphi_1) - \cos \varphi_1], \quad (11)$$

$$y = r - A [\sin(\omega t + \varphi_1) - \sin \varphi_1] + A\omega t \cos \varphi_1 + v_{y1} t - \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha. \quad (12)$$

Условия  $y = B - r$ ,  $\dot{y} = v_{y2}$  при  $t = t_1$  дают возможность записать уравнения движения частицы в обратном направлении:

$$\dot{y} = v_{y2} - g(t - t_1) \sin \alpha - A\omega [\cos(\omega t + \varphi_1) - \cos(\omega t_1 + \varphi_1)], \quad (13)$$

$$y = B - r - A [\sin(\omega t + \varphi_1) - \sin(\omega t_1 + \varphi_1)] + A\omega(t - t_1) \cos(\omega t_1 + \varphi_1) + v_{y2}(t - t_1) - \frac{1}{2} g(t - t_1)^2 \sin \alpha, \quad (14)$$

где:  $B$  — зазор между плоскостями;  $t_1$  — продолжительность полета частицы до удара о вторую плоскость.

Уравнения (11)—(14) заменяют дифференциальное уравнение (6), а оставшиеся два — (5) и (7), упрощаются к виду:

$$\ddot{x} = -k(\dot{x} - V_n) \sqrt{(\dot{x} - V_n)^2 + \dot{z}^2}, \quad \ddot{z} = g \cos \alpha - k\dot{z} \sqrt{(\dot{x} - V_n)^2 + \dot{z}^2}. \quad (15)$$

Протестировать результат использования приближенных уравнений (8), (15) вместо точных (5)—(7) можно на примере симметричного движения частицы с известной методикой расчета [6]. Для этого достаточно рассмотреть лишь половину пе-

риода движения частицы ( $0,5T = \pi/\omega$ ), то есть, воспользоваться лишь двумя уравнениями (11), (12), в которых принять  $\alpha = 0$ . Кроме того, следует учесть условия периодичности движения в симметричном случае  $y(\pi/\omega) = B - r$ ,  $\dot{y}(\pi/\omega) \cdot R = v_y$ , что дает:

$$v_y R - A\omega [\cos(\pi + \varphi) - \cos \varphi] R = v_y, \quad (16)$$

$$r - A [\sin(\pi + \varphi) - \sin \varphi] + \pi A \cos \varphi + \pi v_y / \omega = B - r. \quad (17)$$

Здесь нижний числовой индекс величин  $v_{y1}$ ,  $\varphi_1$  упущен, так как при симметричном движении численные значения параметров взаимодействия частицы с одной и другой плоскостью не различаются.

Рассматривая уравнения (16), (17) как систему, определим из нее неизвестные  $v_y$ ,  $\varphi$ , при которых соблюдается периодический симметричный режим движения частицы:

$$\varphi = \pi - \arcsin \left( \frac{b}{A} \cdot \frac{\tilde{R}}{\sqrt{4\tilde{R}^2 + \pi^2}} \right) - \arctg \frac{2\tilde{R}}{\pi}, \quad v_y = \frac{2A\omega R}{1-R} \cos \varphi, \quad (18)$$

Имея результат (18), можно найти предел  $\lim_{R \rightarrow 1} v_y$ , то есть, значение скорости  $v_y$ , когда параметр  $R$  принимает единичное значение:

$$v_y = \frac{\omega}{\pi} (b - 2A). \quad (19)$$

Исходя из очевидных неравенств  $|\sin x| \leq 1$ ,  $v_y > 0$ , для амплитуды колебаний с учетом выражений, будем иметь:

$$\frac{b}{A} \cdot \frac{\tilde{R}}{\sqrt{4\tilde{R}^2 + \pi^2}} \leq A < \frac{b}{2}. \quad (20)$$

В соотношениях (18), (20):  $b = B - 2r$  — свободный зазор;  $\tilde{R} = (1 - R)/(1 + R)$ .

Важно численные значения амплитуды выбирать из промежутка (20), за пределами которого периодический режим движения частиц вообще не существует.

Теперь можно проводить приближенные расчеты, используя уравнения (15) и (18)—(20) вместо системы (5)—(7). Для выявления погрешности параметры движения частицы были определены дважды — по системе (5)—(7) и с помощью уравнений (15), (18)—(20), при одних и тех же значениях параметров:  $A = 5$  мм,  $\omega = 40$  с<sup>-1</sup>,  $B = 20$  мм,  $\alpha = 0$ ,  $V_n = 10$  м/с,  $k = 0,1$  м<sup>-1</sup>,  $r = 2$  мм,  $\mu = 0,4$ ,  $R = 0,6$ . Расчеты проведены в среде «Mathcad» [8] по методике, предложенной в работе [6]. В результате расчетов получено:  $v_x = 0,7846$  м/с,  $v_y = 0,0580$  м/с,  $v_z = 0,8573$  м/с,  $\omega_x = 428,6259$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_z = -392,2769$  с<sup>-1</sup> — по системе (5)—(7);  $v_x = 0,7844$  м/с,  $v_y = 0,0577$  м/с,  $v_z = 0,8573$  м/с,  $\omega_x = 428,6381$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_z = -392,1880$  с<sup>-1</sup> — с помощью уравнений (15), (18)—(20). Сравнение этих результатов показывает, что наибольшая погрешность расчета составляет менее одного процента (0,517% при определении скорости  $v_y$ ). Время расчета двумя указанными способами фиксировалось при начислении данных для построения графиков: разбиение оси абсцисс на 10 интервалов требовало определения значений соответствующей величины в 11 точках. Для поиска данных (на примере построения зависимостей параметров движения частицы от коэффициента  $R$ ) точным способом потребовалось 37с, а приближенным — 9с, то есть, практически в 4 раза меньше.

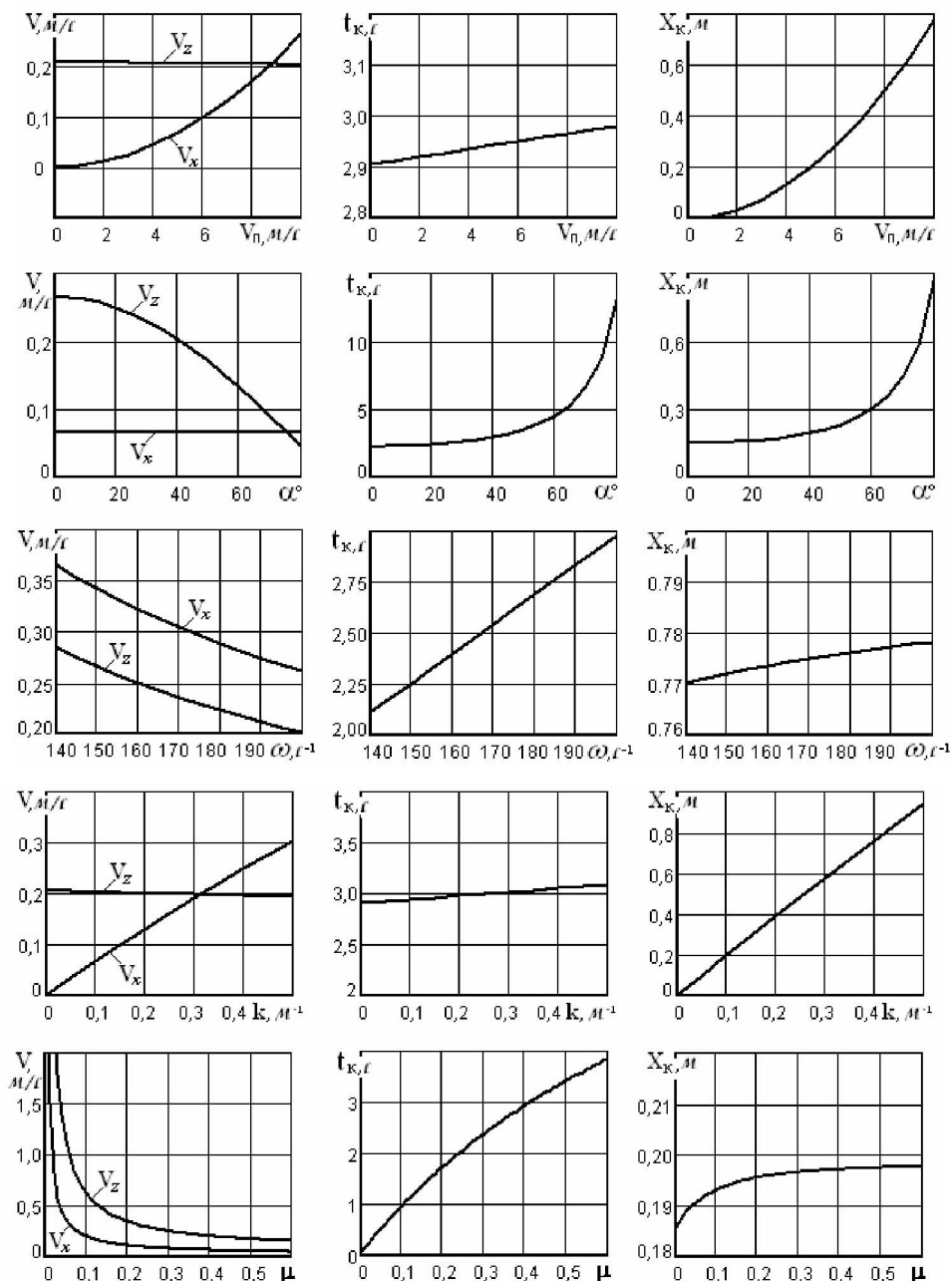


Рис. 1. Изменение горизонтальной ( $V_x$ ) и вертикальной ( $V_z$ ) скоростей движения частицы, времени движения ( $t_k$ ) и дальности ( $X_k$ ) перемещения в зависимости от параметров режима работы  $V_0$ ,  $\alpha$ ,  $\omega$  и свойств частицы:  $k$ ,  $\mu$

Расчеты асимметричного движения частицы проведены с использованием соотношений (11)–(14), на основании чего построены графики — рис. 1. В основу

расчета положены следующие данные:  $A = 5 \text{ мм}$ ,  $\omega = 200 \text{ с}^{-1}$ ,  $b = 0,02 \text{ м}$ ,  $\alpha = 40^\circ$ ,  $V_n = 5 \text{ м/с}$ ,  $k = 0,1 \text{ м}^{-1}$ ,  $r = 2 \text{ мм}$ ,  $\mu = 0,4$ ,  $R_1 = 0,8$ ,  $R_2 = 0,5$ .

Как видим, увеличение скорости воздушного потока приводит к увеличению продольной составляющей ( $V_x$ ) скорости движения частицы и дальности ( $X_k$ ) ее перемещения, но время движения ( $t_k$ ) при этом практически не меняется. Увеличение частоты колебаний ( $\omega$ ) приводит к пропорциональному уменьшению продольной ( $V_x$ ) и вертикальной ( $V_z$ ) составляющих скорости так, что дальность перемещения частицы почти не изменяется, но время движения увеличивается. При увеличении же угла ( $\alpha$ ) наклона плоскостей вертикальная составляющая скорости уменьшается, но при этом увеличивается и время движения, и дальность перемещения частицы. Все это говорит о том, что для эффективного управления процессом разделения зерновых смесей (установки оптимального сочетания времени обработки и дальности перемещения частиц) вполне достаточно привлечения трех параметров режима работы машины —  $V_n$ ,  $\alpha$ ,  $\omega$ . Среди свойств частиц наиболее значащим является коэффициент  $k$  (пропорциональный коэффициенту парусности). Параметр  $\mu$ , характеризующий инертность вращения частицы, производит тормозящий эффект, то есть, уменьшает скорость и увеличивает время движения, но на дальности перемещения частицы почти не сказывается. Другие параметры —  $A$ ,  $b$ ,  $r$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ , изменяют лишь фазы удара частицы о плоскости, но не влияют на основные технологические параметры: скорость и время движения, дальность перемещения.

**Выводы.** 1. При расчете периодического режима движения частицы в воздушном потоке между вибрирующими плоскостями оказывается целесообразным (ввиду быстротечности периода) сопротивлением воздуха при поперечном движении частицы от одной плоскости к другой пренебречь. Это дает экономию во времени расчета примерно в 4 раза при максимальной погрешности вычислений менее одного процента.

2. Для успешного управления процессом разделения смесей достаточно ограничиться регулировкой трех параметров режима работы вибропневмосепаратора: скорости воздушного потока, наклона плоскостей и частоты их колебаний. Зазор между плоскостями и амплитуда колебаний не оказывают влияния на основные технологические характеристики разделения.

3. Основным показателем, по которому происходит разделение смесей предложенным устройством, является коэффициент сопротивления воздушной среды (коэф. парусности). Другие свойства частиц — упругость, крупность, не могут быть использованы в качестве критерия разделения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. А.с. 1251967 (СССР). Вибрационная очистительно-сортировальная машина для разделения зерновых смесей по коэффициенту парусности /А.И. Завгородний, В.А. Сметанкин, А.Б. Азарова и др. — Оpubл. в Б.И.,1986, № 31.

2. Патент на корисну модель 64488 від 10.11.2011. Вібросепаратор вертикального типу з повітряним потоком для розділення сипучих сумішей / Сіняєва О.В., Завгородній О.І.: Україна, Український інститут промислової власності.

3. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин. — изд-во УАСХН, 1960. — 284 с.

4. Плявниекс В.Ю. Пространственное соударение двух тел. // Вопросы динамики и прочности, № 20. — Рига: «Зинатне», 1970. — С. 75—88.

5. Кобринский А.Е., Кобринский А.А. Виброударные системы. М.: Наука, 1973. — 592 с.

6. Завгородний А.И., Синяева О.В. Движение шара в воздушном потоке между вибрирующими плоскостями // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукраїнський науково-технічний журнал, № 3 (67). — Вінниця: ВНАУ, 2012. — С. 20—27.

7. Завгородний А.И., Обухов А.В. К исследованию движения частиц округлой формы по рабочим поверхностям машин // Динамика та міцність машин, будівель і споруд: Зб. наук. пр. ПНТУ ім. Ю. Кондратюка — Полтава, 2009. — С. 119—125.

8. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в Mathcad 14 (+CD). — СПб.: Питер, 2007. — 592с.

*О.І. Завгородній, О.В. Сinyaєва*

**Асиметричний режим руху кулі в повітряному потоці між вібруючими площестями**

*Приведені теоретичні дослідження просторового періодичного руху сферичної частинки у повітряному потоці між двома паралельними площинами, які коливаються. Розглянуто випадок, коли площини розташовані похило або мають різні властивості, в результаті чого рух частинки є асиметричним відносно кожної з них.*

**Ключові слова:** асиметричний рух, повітряне середовище.

*A. Zavgorodny, O. Sinyayeva*

**Asymmetric mode of motion of ball in the current of air between vibrating plains.**

*Theoretical researches of spatial periodic motion of spherical particle are resulted in the current of air between two parallel planes which hesitate. A case is considered, when plains are located aslope or have different characteristics, as a result the motion of a particle is asymmetric in relation to each of them.*

**Key words:** asymmetric motion, air between.

---

*e-mail:* jimp@ukr.net

*Надійшла до редколегії 16.04.2012 р.*