

ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВ НЕКОМУТАТИВНОСТІ ЗА ЧАСОМ ПРИ ЗМІШУВАННІ ДВОХ РЕЧОВИН В НЕСТАЦІОНАРНІЙ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Під час багатьох технологічних процесів (і в харчовій промисловості зокрема) при змішуванні двох речовин з різними температурами, що залежать від часу t , постає таке питання: коли суміш цих двох речовин буде мати більш високу (низьку) температуру — через певний проміжок часу Dt після того, як їх змішали відразу на початку експерименту, чи у разі змішування їх через такий самий проміжок часу Dt після початку експерименту? Відповідь на таку проблему розглянуто в даній роботі.

Ключові слова: температура, нестационарний теплообмін, час.

У розвиток статті [1] розглянемо задачу про різні випадки змішування двох речовин, якщо в нестационарному процесі теплообміну з навколишнім середовищем беруть участь дві речовини, температури яких, у свою чергу, також залежать від часу t . Розподіл температури в речовині позначимо через функцію $T(t)$, що залежить від часу t (за початковий момент часу візьмемо $t = t_0$, рисунок).

Речовину з більшою масою назовемо основною, а з меншою — додатковою. Якщо маси двох речовин, що змішуються, однакові, то основною виберемо ту речовину, яка має вищу початкову температуру. Якщо ж і маси, і початкові температури двох речовин, що змішуються, однакові, то задача має тривіальний розв'язок.

Для позначення теплофізичних характеристик основної речовини використаємо індекс f : початкова температура $T_f(t)|_{t=t_0} = T_{f0}$, маса m_f та теплоємність c_f , функція змінення температури $T_f(t)$, що залежить від часу t .

Для додаткової речовини, відповідно, введемо позначення через індекс s : початкова температура $T_s(t)|_{t=t_0} = T_{s0}$, маса m_s , теплоємність c_s , функція змінення температури $T_s(t)$, що залежить від часу t .

Для суміші основної та додаткової речовин введемо позначення через індекс m : функція змінення температури $T_m(t)$, маса m_m ($m_m = m_f + m_s$) та теплоємність c_m .

Температуру навколишнього середовища позначимо через T_a , і вважатимемо, що вона не залежить від часу t , тобто, $T_a = \text{const}$.

Припустимо, що початкова температура додаткової речовини T_{s0} і температура навколишнього середовища T_a менші за початкову температуру основної речовини T_{f0}

($T_a < T_{f0}$, $T_{s0} < T_{f0}$). Припускаємо також, що початкова температура додаткової речовини T_{s0} не збігається з температурою навколишнього середовища T_a ($T_a \neq T_{s0}$).

Розглянемо такі два випадки змішування.

У першому випадку (позначимо його через індекс 1) потрібно знайти зміну температури суміші $T_{1m}(t)$, що залежить від часу t , за такої умови: основну й додаткову речовини почали змішувати в початковий момент часу $t = t_0$, а закінчили змішувати в момент часу $t = t_1$ (див. рис.). При $t \geq t_1$ відбувається нестационарний теплообмін утвореної суміші з навколишнім середовищем. Потрібно визначити температур суміші $T_{1m}(t)$ в момент часу $t = t_3$ (де $t_3 = t_1 + \Delta t$), тобто через певний період часу Δt після закінчення змішування у першому випадку.

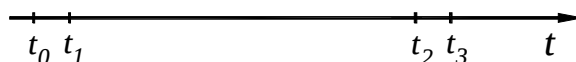


Рис. Інтервали часу для першого ($t_0 ; t_1$) і другого ($t_2 ; t_3$) способів змішування речовин

У другому випадку (позначимо його через індекс 2), навпаки, спочатку зачекали протягом того самого визначеного інтервалу часу Δt , внаслідок чого відбувався теплообмін з навколишнім середовищем (з температурою T_a) як основної речовини (температуру якої позначимо через $T_{2f}(t)$), так і додаткової (температуру якої позначимо через $T_{2s}(t)$). Після цього почали змішувати основну й додаткову речовини в момент часу $t = t_2$ (де $t_2 = t_0 + \Delta t$, рис.), а закінчили змішувати в момент часу $t = t_3$, (де $t_3 = t_1 + \Delta t$). В цьому випадку позначимо температуру суміші через функцію $T_{2m}(t)$.

Слід зазначити, що для часу справедливі співвідношення $t_2 = t_0 + \Delta t$ і $t_3 = t_1 + \Delta t$, що зображені на рисунку. Якщо процес змішування займає набагато менше часу, ніж розглядуваний інтервал часу Δt , то можна вважати, що $t_1 = t_0$, $t_3 = t_2$.

Отже, потрібно визначити температури $T_{1m}(t)$ і $T_{2m}(t)$ в момент часу $t = t_3$ та порівняти їх між собою.

Проводячи подібні [1] розрахунки зі складання балансових рівнянь і пошуку, на основі цього, розв'язку рівняння регулярного теплового процесу [2] для функції температури $T_{1m}(t)$, дістанемо:

$$T_{1m}(t) = \frac{c_f m_f [T_{f0} - T_a] + c_s m_s [T_{s0} - T_a]}{c_m (m_f + m_s)} e^{-k_{m1}(t-t_1)} + T_a, \quad (1)$$

де k_{m1} , $1/c$ — коефіцієнт темпу охолодження суміші для першого випадку змішування двох речовин (додатна величина, що не залежить від координат і часу [2]).

Таким чином, вивели рівняння (1) змінення температури $T_{1m}(t)$ в суміші залежно від часу t (для $t \geq t_1$) у разі змішування основної і додаткової речовин на початку експерименту.

Для другого випадку змішування основної і додаткової речовин до моменту часу $t = t_2$ спочатку відбувається теплообмін основної речовини з навколишнім середовищем за відомим законом [2]

$$T_{2f}(t) = C_1 e^{-k_{f2}t} + T_a, \quad (2)$$

де C_1 — константа інтегрування, k_{f2} , $1/c$ — коефіцієнт темпу охолодження основної речовини (додатна величина, що не залежить [2] від координат і часу).

Константу C_1 знайдемо з початкової умови $T_{2f}(t_0) = T_{f0}$ і підставимо її вираз

$$C_1 = (T_{f0} - T_a) e^{k_{f2}t_0}$$

в рівняння (2). Дістанемо закон змінення температури $T_{2f}(t)$ основної речовини залежно від часу t ($t \geq t_0$):

$$T_{2f}(t) = (T_{f0} - T_a) e^{-k_{f2}(t-t_0)} + T_a. \quad (3)$$

Подібно встановлено також, що теплообмін з навколишнім середовищем додаткової речовини при $t \geq t_0$ відбувається за таким законом:

$$T_{2s}(t) = (T_{s0} - T_a) e^{-k_{s2}(t-t_0)} + T_a, \quad (4)$$

де k_{s2} , $1/c$ — коефіцієнт темпу охолодження додаткової речовини (додатна величина, що не залежить від координат і часу [2]).

Таким чином, для другого випадку отримання суміші в момент часу $t = t_2$ почали змішувати основну речовину з температурою

$$T_{2f}(t) \Big|_{t=t_2} = (T_{f0} - T_a) e^{-k_{f2}(t_2-t_0)} + T_a \quad (5)$$

і додаткову речовину з температурою

$$T_{2s}(t) \Big|_{t=t_2} = (T_{s0} - T_a) e^{-k_{s2}(t_2-t_0)} + T_a. \quad (6)$$

Складаючи рівняння теплового балансу для цього випадку змішування (так, як це описано в роботі [1]), отримали таке рівняння змінення температури в суміші при $t \geq t_3$:

$$T_{2m}(t) = \frac{c_f m_f [T_{f0} - T_a] e^{-k_{f2}(t_2-t_0)} + c_s m_s [T_{s0} - T_a] e^{-k_{s2}(t_2-t_0)}}{c_m (m_f + m_s)} e^{-k_{m2}(t-t_3)} + T_a, \quad (7)$$

де k_{m2} , $1/c$ — коефіцієнт темпу охолодження суміші для другого випадку змішування речовин (додатна величина, що не залежить від координат і часу [2]).

Таким чином, отримали нестационарне рівняння (7) температури $T_{2m}(t)$ суміші залежно від часу t (для $t \geq t_3$) для випадку змішування основної і додаткової речовин через певний проміжок часу Δt після початкового моменту часу t_0 .

Отже, за умови змінення часу $t \geq t_3$ отримано рівняння (1) змінення температури $T_{1m}(t)$ суміші для першого випадку змішування і рівняння (7) змінення температури $T_{2m}(t)$ суміші для другого випадку змішування основної й додаткової речовин залежно від часу t при контакті з навколишнім середовищем.

На основі розв'язків за зміною температури суміші залежно від часу t для першого (1) та для другого (7) випадків змішування основної і додаткової речовин знайдено різницю цих температур в момент часу $t = t_3$:

$$\begin{aligned}
T_{1m}(t_3) - T_{2m}(t_3) &= \\
&= \frac{c_f m_f [T_{f0} - T_a] \left(e^{-k_{m1}(t_3 - t_1)} - e^{-k_{f2}(t_2 - t_0)} \right) + c_s m_s [T_{s0} - T_a] \left(e^{-k_{m1}(t_3 - t_1)} - e^{-k_{s2}(t_2 - t_0)} \right)}{c_m (m_f + m_s)} = (8) \\
&= \frac{c_f m_f [T_{f0} - T_a] \left(e^{-k_{m1}\Delta t} - e^{-k_{f2}\Delta t} \right) + c_s m_s [T_{s0} - T_a] \left(e^{-k_{m1}\Delta t} - e^{-k_{s2}\Delta t} \right)}{c_m (m_f + m_s)}
\end{aligned}$$

Як видно з рівняння (8), коли температура додаткової речовини не залежить від часу, тобто $k_{s2} = 0$, то отримуємо вже відомий вираз для різниці температур $T_{1m}(t_3) - T_{2m}(t_3)$ з роботи [1].

Обраховуючи рівняння (8), слід використовувати такий вираз для коефіцієнта темпу охолодження [1, 2]:

$$k = \Psi \frac{\alpha F}{c \rho V}, \quad (9)$$

де α — коефіцієнт тепловіддачі; F — зовнішня поверхня речовини; c — теплоємність речовини; ρ — густина речовини; V — об'єм речовини; Ψ — коефіцієнт нерівномірності розподілення температури в тілі (змінюється від 0 до 1).

Досліджено всі випадки різниці температур (8), що залежать від темпу охолодження k_{m1} суміші, яку отримали змішуванням основної і додаткової речовин на початку експерименту:

а) якщо темп охолодження суміші k_{m1} для першого випадку змішування двох речовин визначається за нерівністю

$$k_{m1} < \frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{1 + \frac{c_s m_s [T_{s0} - T_a]}{c_f m_f [T_{f0} - T_a]}}{\frac{1}{e^{k_{f2}\Delta t}} + \frac{1}{e^{k_{s2}\Delta t}} \frac{c_s m_s [T_{s0} - T_a]}{c_f m_f [T_{f0} - T_a]}} \right), \quad (10)$$

то права частина виразу (8) є додатною, тобто $T_{1m}(t_3) > T_{2m}(t_3)$, отже, за першим способом (змішали, потім зачекали) отримана суміш буде мати вищу температуру в момент часу $t = t_3$, ніж за другим способом;

б) якщо темп охолодження суміші k_{m1} для першого випадку змішування двох речовин визначається як

$$k_{m1} > \frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{1 + \frac{c_s m_s [T_{s0} - T_a]}{c_f m_f [T_{f0} - T_a]}}{\frac{1}{e^{k_{f2}\Delta t}} + \frac{1}{e^{k_{s2}\Delta t}} \frac{c_s m_s [T_{s0} - T_a]}{c_f m_f [T_{f0} - T_a]}} \right), \quad (11)$$

то права частина виразу (8) є від'ємною, тобто $T_{1m}(t_3) < T_{2m}(t_3)$ і, таким чином, вища температура в момент часу $t = t_3$ буде у другому способі отримання суміші (зачекали, потім змішали);

в) якщо темп охолодження суміші k_{m1} для першого випадку змішування двох речовин визначається за рівністю

$$k_{m1} = \frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{1 + \frac{c_s m_s [T_{s0} - T_a]}{c_f m_f [T_{f0} - T_a]}}{\frac{1}{e^{k_{f2} \Delta t}} + \frac{1}{e^{k_{s2} \Delta t}} \frac{c_s m_s [T_{s0} - T_a]}{c_f m_f [T_{f0} - T_a]}} \right), \quad (12)$$

то в момент часу $t = t_3$ права частина виразу (8) дорівнює нулю, тобто температури сумішей у першому і другому випадках змішування речовин однакові ($T_{1m}(t_3) = T_{2m}(t_3)$). Отже, не має значення, яким способом змішувати основну й додаткову речовини.

Легко бачити, що у виразах (10)–(12) темп охолодження першої суміші залежить, крім усіх згадуваних вище початкових теплофізичних характеристик речовин, ще й від темпу охолодження основної k_{f2} та додаткової k_{s2} речовин і від інтервалу часу Δt .

Слід зауважити, що умови (10)–(12) виконуються тільки в тому разі, коли підлогарифмічний вираз, що стоїть у круглих дужках, суворо більше нуля, тобто

$$\frac{1 + \frac{c_s m_s [T_{s0} - T_a]}{c_f m_f [T_{f0} - T_a]}}{\frac{1}{e^{k_{f2} \Delta t}} + \frac{1}{e^{k_{s2} \Delta t}} \frac{c_s m_s [T_{s0} - T_a]}{c_f m_f [T_{f0} - T_a]}} > 0. \quad (13)$$

Визначимо умови залежності початкових температур основної T_{f0} і додаткової T_{s0} речовин, коли справджується умова (13).

Досліджено, що співвідношення між температурами залежать від темпу охолодження основної k_{f2} і додаткової k_{s2} речовин:

а) якщо $k_{f2} > k_{s2}$, то на початкову температуру T_{s0} додаткової речовини накладаються такі умови:

$$\begin{cases} T_{s0} < T_a - \frac{c_f m_f}{c_s m_s} [T_{f0} - T_a]; \\ T_{s0} > T_a - \frac{c_f m_f}{c_s m_s} [T_{f0} - T_a] \frac{1}{e^{(k_{f2} - k_{s2}) \Delta t}}; \end{cases} \quad (14)$$

б) якщо $k_{f2} < k_{s2}$, то на початкову температуру T_{s0} додаткової речовини накладаються такі умови:

$$\begin{cases} T_{s0} < T_a - \frac{c_f m_f}{c_s m_s} [T_{f0} - T_a] e^{(k_{s2} - k_{f2}) \Delta t}; \\ T_{s0} > T_a - \frac{c_f m_f}{c_s m_s} [T_{f0} - T_a]; \end{cases} \quad (15)$$

в) якщо $k_{f2} = k_{s2}$, то на початкову температуру T_{s0} додаткової речовини накладається умова:

$$T_{s0} > T_a - \frac{c_f m_f}{c_s m_s} [T_{f0} - T_a]. \quad (16)$$

Висновки. Виведено аналітичний вираз (8) для визначення різниці температур $T_{1m}(t_3) - T_{2m}(t_3)$ сумішей основної і додаткової речовин, які були отримані різними способами змішування, за умови, що з плином часу t ($t_0 \leq t \leq t_3$) температура змінюється як в основній речовині, так і в додатковій.

Слід відзначити, що якщо температура додаткової речовини — стала величина, тобто $T_s = \text{const}$ (а отже, темп охолодження k_{s2} в рівняннях (4), (8) дорівнює нулю ($k_{s2} = 0$)), то отримаємо вже відомий [1] результат для різниці температур $T_{1m}(t_3) - T_{2m}(t_3)$.

Проведені дослідження показали, що відповідь на поставлену задачу про визначення різниці температур сумішей, отриманих за першим і за другим способами змішування двох речовин, не є тривіальною і залежить від таких факторів.

Щоб вираз (8) адекватно описував реальний процес, на початкові дані теплофізичних характеристик основної і додаткової речовин накладено деякі умови. При відомих значеннях темпів охолодження основної k_{f2} і додаткової k_{s2} речовин маємо такі випадки:

а) за умови $k_{f2} > k_{s2}$ початкові температури T_{f0} і T_{s0} мають задовольняти обмеження (14);

б) за умови $k_{f2} < k_{s2}$ початкові температури T_{f0} і T_{s0} мають задовольняти обмеження (15);

в) якщо ж значення темпів охолодження основної k_{f2} і додаткової k_{s2} рівні між собою ($k_{f2} = k_{s2}$), то початкові температури T_{f0} і T_{s0} мають задовольняти обмеження (16).

Коли умови (14)–(16) виконано, тоді для моменту часу $t = t_3$ маємо три випадки розподілу температур сумішей залежно від значення темпу охолодження k_{m1} першої суміші:

а) за першим способом (змішали, потім зачекали) отримана суміш буде мати вищу температуру, ніж за другим, якщо для k_{m1} виконується умова (10), тобто $T_{1m}(t_3) > T_{2m}(t_3)$;

б) за другим способом (зачекали, потім змішали) отримана суміш буде мати вищу температуру, ніж за першим, якщо для k_{m1} виконується умова (11), тобто $T_{1m}(t_3) < T_{2m}(t_3)$;

в) якщо для k_{m1} виконується умова (12), то температури в сумішах для моменту часу $t = t_3$ будуть однакові ($T_{1m}(t_3) = T_{2m}(t_3)$).

ЛІТЕРАТУРА

1. Погорілий Т. М. Визначення температур сумішей двох речовин за різних умов їх змішування // Харч. пром-сть. — К.: — 2005. — № 3. — С. 121-124.
2. Кондратьев Г. М. Регулярный тепловой режим. — М.: Гостехиздат, 1954. — 408 с.

Надійшла до редколегії 15.04.05 р.