

УДК 681.3.05

МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АЛГОРИТМОВ БЫСТРЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ И ХАРТЛИ В ЗАДАЧАХ "БЕГУЩЕГО" СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА. ЗИНЧЕНКО Т.В.

Получены матричные формулы расчета быстрых преобразований Фурье и Хартли для последовательности отсчетов радиолокационных сигналов, позволяющие реализовать операцию "скользящего" (или "скачущего") спектрального анализа с рациональным использованием для каждого нового положения временного окна информации о спектре предыдущего шага. Получены матричные формулы преобразования Хартли для произвольного основания, являющиеся обобщением известной формулы Хартли для разбиения исходной последовательности на две — с нечетными и четными номерами.

MATRIX REPRESENTATION OF THE ALGORITHMS OF THE SPEED FOURIER AND HARTLEY TRANSFORMS IN THE "SLIDING" SPECTRUM ANALYSIS PROBLEMS T.V. ZINCHENKO

The matrix formulas of calculating the speed Fourier and Hartley transforms are obtained for a sequence of radar signal readings, the said formulas allowing to perform the "sliding" spectrum analysis using reasonable paralleling of the calculations and an information of previous step spectrum for each new position of a time window. The matrix formulas of Hartley transforms for any base which are a generalization of the known Hartley formula for splitting the initial sequence into two sequences, one of which is even-numbered and the other is uneven-numbered.

В устройствах цифровой обработки сигналов для решения задач спектрального анализа может использоваться принцип "скользящего" ("бегущего" или "скачущего") окна, реализованный на основе дискретного преобразования Фурье (ДПФ) или дискретного преобразования Хартли (ДПХ). Для уменьшения времени этих преобразований используют многообразные алгоритмы быстрых преобразований — БПФ и БПХ. Дискретное преобразование Фурье конечной последовательности $\{x(n)\}$, $0 \leq n \leq N-1$, определяется формулой [1]:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W^{nk} \quad (1)$$

где $W = e^{-j2\pi/N}$, $k = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$. Последовательность W^{nk} в (1) — периодическая с периодом N , т. е. $W^{(n+mN)(k+lN)} = W^{nk} \cdot W^{ml}$, $W_N^2 = W_{N/2}$, $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$, $m, l = 0, 1, \dots, N/2-1$. ДПФ $X(k)$ можно представить через $X_1(k)$ и $X_2(k)$ — $N/2$ -точечные ДПФ последовательности четных элементов $x_1(n) = x(2n)$ и последовательности нечетных элементов $x_2(n) = x(2n+1)$:

$$X(k) = \begin{cases} X_1(k) + W_N^k \cdot X_2(k), & 0 \leq k \leq \frac{N}{2}-1 \\ X_1\left(k - \frac{N}{2}\right) - W_N^{k-\frac{N}{2}} \cdot X_2\left(k - \frac{N}{2}\right), & 0 \leq k \leq \frac{N}{2}-1 \end{cases} \quad (2)$$

Процесс вычисления БПФ с разделением обрабатываемой последовательности на четную и нечетную части (2) называют прореживанием по времени. Другим подходом — с прореживанием по частоте — входная последовательность разбивается на две последовательные части:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) \cdot W_N^{nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) \cdot W_N^{nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x\left(n - \frac{N}{2}\right) \cdot W_N^{\left(n - \frac{N}{2}\right)k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n) + e^{-j\pi k} \cdot x_2(n)] \cdot W_N^{nk} \quad (3)$$

Четные и нечетные отсчеты ДПФ входной последовательности $X(2k)$ и $X(2k+1)$ — это $N/2$ -точечные ДПФ последовательностей $f(n)$, $g(n)$:

$$f(n) = x_1(n) + x_2(n), g(n) = [x_1(n) - x_2(n)] \cdot W_N^{n/2}, n = 0, 1, \dots, (N/2-1),$$

которые представляются формулами:

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n) + x_2(n)] \cdot W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} f(n) \cdot W_{N/2}^{nk},$$

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n) - x_2(n)] \cdot W_N^{n(2k+1)/2} = \sum_{n=0}^{N/2-1} g(n) \cdot W_{N/2}^{nk}.$$

Если последовательность N отсчетов входного сигнала расположить строками в виде матрицы размером L на M (L — число строк, M — число столбцов), то текущий номер отсчета n можно представить в виде $n = M \cdot l + m$, где l — текущий номер строки, m — текущий номер столбца, а текущий номер элемента матрицы выходных сигналов ДПФ $k = L \cdot r + s$, то выражение для ДПФ приобретает вид [1]:

$$X(k) = X(s, r) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{L-1} x(l, m) \cdot W^{(M \cdot m)(L \cdot r + s)} = \sum_{m=0}^{M-1} \left[W^{mL} \sum_{l=0}^{L-1} x(l, m) \cdot (W^{mL})^r \right] \cdot W^{ms}.$$

Последовательность операций согласно представлению (5) следующая:

1. Вычислить L -точечные ДПФ с ядром преобразования W^{mL} всех столбцов (вычисление внутренней суммы).
2. Умножить каждый элемент результата п.1 на поворачивающий множитель W^{mL} .
3. Вычислить M -точечные ДПФ всех строк, полученных в результате выполнения п.1, п.2, с ядром преобразования W^{ms} (вычисление внешней суммы).

Изменение порядка суммирования в (5) на обратный приводит к следующему выражению:

$$X(s, r) = \sum_{l=0}^{L-1} \left[W^{lM} \sum_{m=0}^{M-1} [x(l, m) \cdot W^{lm}] \cdot (W^{lM})^r \right] \cdot W^{ls},$$

что определяет следующий порядок вычисления $X(k)$:

1. Умножить отсчеты сигнала $x(l, r)$ на поворачивающие множители W^{lm} .
2. Вычислить M -точечные ДПФ всех строк с ядром преобразования W^{lm} (вычисление внутренней суммы).
3. Вычислить L -точечные ДПФ всех столбцов с ядром преобразования W^{lM} .

Различия в вычислениях согласно (5) и (6) соответствуют различным алгоритмам БПФ (с основанием 2) с прореживанием по времени и с прореживанием по частоте. При прореживании по времени умножение на поворачивающие множители предшествует основным операциям ДПФ, а при прореживании по частоте — нет.

Последовательность операций в (5) можно представить в матричной форме, удобной для алгоритма практической реализации. Для фиксированного значения s (номера строки)

$$X(s, r) = [X^T(l, m) \cdot W_{s, M}^T(l)] \cdot W_{s, L}(m, r) = R^T(m, l) \cdot W_{s, L}(m, r) = G_s(l, r), \quad (7)$$

где: $R(m, l) = X^T(l, m) \cdot W_{s, M}^T(l)$, $R(m, l)$ — матрица-столбец размерности $[M \times 1]$,

$X(s, r)$ — матрица-строка выходных сигналов ДПФ размерности $[1 \times L]$,

$W_{s, L}(m, r) = \left[W^{(L \cdot r + s)m} \right]$ — матрица поворачивающих множителей размерности $[M \times L]$,

$$r = 0, (L-1); m = 0, (M-1),$$

$X(l, m) = [x(l, m)]$ — матрица значений входных отсчетов размерности $[L \times M]$,

$$l = 0, (L-1),$$

$W_{s, M}(l) = \left[W^{lm} \right]$ — матрица-столбец поворачивающих множителей размерности

$$[L \times 1], l = 0, (L-1).$$

Последовательность операций в (6) представляется в матричной форме для фиксированного значения s формулой:

$$X(s, r) = W_{s, M}^T(l) \cdot [X(l, m) \cdot W_{s, L}(m, r)] = W_{s, M}^T(l) \cdot P(l, r) = G_s(l, r), \quad (8)$$

где $P(l, r) = X(l, m) \cdot W_{s, L}(m, r)$, $P(l, r)$ — матрица размерности $[L \times L]$.

Последовательность операций согласно соотношениям (7) и (8) представлена соответственно на рис.1 и рис.2.

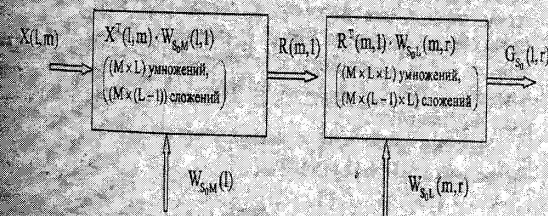


Рис.1

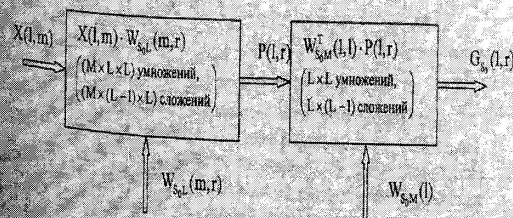


Рис.2

Представление БПФ в виде произведения матриц (7) или (8) позволяет относительно легко посчитать количество элементарных операций при реализации БПФ, что особенно важно, определить те операции (ту цифровую информацию), результаты которых можно использовать на каждом следующем шаге "скользящего" БПФ.

"Скользящее" или "скачущее" N -точечное ДПФ для входного дискретного сигнала $x(n)$ представляется в виде:

$$F(n, k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(n-m) \cdot \exp\left(-i \frac{2\pi m k}{N}\right), \quad (9)$$

где $m, k = 0, 1, \dots, (N-1)$.

При фиксированном n функция $F(n, k)$ представляет собой ДПФ по переменной m отрезка $x(n-m)$ потока данных $x(n)$. Если $n = 0, 1, 2, \dots$, то БПФ — "скользящее". Если шаг Δn изменения n больше 2, то БПФ — "скачущее". Функцию $F(n, k)$ удобно называть текущим спектром Фурье [5].

Рассмотрим схематично в матричном виде смещение временного окна, содержащего N отсчетов, изображая отсчеты их номерами в поступающей временной последовательности. Например, для $N = 16 = 4 \times 4$ и $\Delta n = 1$ имеем:

1 окно	2 окно	3 окно
1 2 3 4	2 3 4 5	3 4 5 6
5 6 7 8	6 7 8 9	7 8 9 10
9 10 11 12	10 11 12 13	11 12 13 14
13 14 15 16	14 15 16 17	15 16 17 18

Рис.3

2-4 столбцы первого окна становятся 1-3 столбцами второго окна, 2-4 столбцы второго окна становятся 1-3 столбцами третьего окна и т. д. Это означает, что на каждом следующем шаге (для следующего положения временного окна) значения $(M-\Delta n)$ L -точечных столбцовых БПФ (M — количество столбцов, L — количество строк) могут быть использованы с предыдущего шага. Как видно из рис. 3, для "скользящего" БПФ обработку данных $x(n)$ следует выполнять по столбцам согласно формулам (5) или (7) (рис.1).

Возможна другая схема с использованием значений построенных БПФ. Например, для $N = 16 = 4 \times 4$ и $\Delta n = 4$ имеем:

1 окно	2 окно	3 окно
1 2 3 4	5 6 7 8	9 10 11 12
5 6 7 8	9 10 11 12	13 14 15 16
9 10 11 12	13 14 15 16	17 18 19 20
13 14 15 16	17 18 19 20	21 22 23 24

Рис.4

При перемещении окна обработки информации 2-4 строки первого окна становятся 1-3 строками второго окна, 2-4 строки второго окна становятся 1-3 строками третьего окна и т. д. Это означает, что на каждом следующем шаге (для следующего положения временного окна) значения $(L-1)$ M -точечных строковых ДПФ могут быть использованы с предыдущего шага. Согласно рис. 4, для "скачущего" БПФ с шагом $\Delta n = 4$ обработку данных $x(n)$ следует выполнять по строкам по формулам (6) или (8) (рис.2).

Таким образом, задаваясь определенной длиной временного окна N и шагом смещения Δn , а также сравнивая возможности алгоритмов (5) и (6) — с перемещением по времени или по частоте — можно выбрать (относительно просто) наиболее быстрое действующее схемное решение расчета БПФ в скользком окне.

реализации скользких процедур выбор решения, какому алгоритму отдавать предпочтение — обработке по строкам или обработке по столбцам — необходимо принимать в зависимости от шага скольжения. Например, если шаг скольжения $\Delta n = 1$ (см. рис.3), то выбирать следует алгоритмы (5), (7) — обработку по столбцам. Если шаг скольжения $\Delta n = 4$ (см. рис.4), то выбирать следует алгоритмы (6), (8) — обработку по строкам.

Для случая $N = 16$ расположим значения входных сигналов в виде матрицы размером 4×4 . При этом $L = M = 4$; $l = 0, 1, 2, 3$; $m = 0, 1, 2, 3$; $r = 0, 1, 2, 3$; $s = 0, 1, 2, 3$.

Описанные выше матрицы равны:

$$W_{SL}(m, r) = \begin{pmatrix} W^{(0)} & W^{(4+s_0)} & W^{(8+s_1)} & W^{(12+s_2)} \\ W^{(4)} & W^{(8+s_1)} & W^{(12+s_2)} & W^{(16+s_3)} \\ W^{(8)} & W^{(12+s_2)} & W^{(16+s_3)} & W^{(20+s_4)} \\ W^{(12)} & W^{(16+s_3)} & W^{(20+s_4)} & W^{(24+s_5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ W^{s_0} & -j & W^{s_1} & -W^{s_2} \\ W^{2s_0} & -W^{2s_1} & W^{2s_2} & -W^{2s_3} \\ W^{3s_0} & j & W^{3s_1} & -W^{3s_2} \end{pmatrix}$$

Для различных значений $s_0 = 0, 1, 2, 3$ соответствующие матрицы равны:

$$W_{0L} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix}, \quad W_{1L} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{-j\frac{\pi}{4}} & -j & e^{-j\frac{\pi}{4}} & -e^{-j\frac{\pi}{4}} \\ e^{-j\frac{\pi}{2}} & -e^{-j\frac{\pi}{2}} & e^{-j\frac{\pi}{2}} & -e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ e^{-j\frac{3\pi}{4}} & j & e^{-j\frac{3\pi}{4}} & -j \end{pmatrix},$$

$$W_{2L} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{-j\frac{\pi}{2}} & -j & e^{-j\frac{\pi}{2}} & -e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ -j & j & -j & j \\ e^{-j\frac{3\pi}{4}} & j & e^{-j\frac{3\pi}{4}} & -j \end{pmatrix}, \quad W_{3L} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{-j\frac{3\pi}{4}} & -j & e^{-j\frac{3\pi}{4}} & -e^{-j\frac{3\pi}{4}} \\ e^{-j\pi} & -e^{-j\pi} & e^{-j\pi} & -e^{-j\pi} \\ -e^{-j\frac{5\pi}{4}} & -j & -e^{-j\frac{5\pi}{4}} & j \end{pmatrix}$$

Матрица-столбец поворачивающих множителей $W_{SM}(l) = \left(W^{(l+sM)} \right)^T$ для $N = 16$ равен:

$$\left(W^{(l+sM)} \right)^T = \left(W^{(4M+0)} \quad W^{(4M+1)} \quad W^{(4M+2)} \quad W^{(4M+3)} \right)^T = \begin{pmatrix} 1 & W^{4s_0} & W^{8s_0} & W^{12s_0} \end{pmatrix}^T.$$

Для значений $s_0 = 0, 1, 2, 3$ соответствующие матрицы-столбцы равны:

$$W_{0M} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad W_{1M} = \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ -1 \\ j \end{pmatrix}, \quad W_{2M} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad W_{3M} = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ -1 \\ -j \end{pmatrix}.$$

Алгоритмы (5) и (6) предполагают разное количество выполняемых операций. Алгоритм (5): N L -точечных преобразований (сумм), N M -точечных преобразований, N умножений на поворачивающие множители. Алгоритм (6): N L -точечных преобразований (сумм), $N \times L$ M -точечных преобразований, $N \times L$ умножений на поворачивающие множители. Больше количество операций алгоритма (6) можно объяснить тем, что внутренняя сумма имеет больше множителей, чем в (5), и есть

функцией трех переменных параметров, а не двух.

Наряду с преобразованием Фурье представляется возможным использовать преобразование Хартли в задачах цифровой обработки сигналов [2]. Преобразование Хартли является действительной функцией действительного аргумента. Дискретное преобразование Хартли (ДПХ) для отсчетов функции $x(i)$, $i = 0, 1, \dots, (N-1)$ определяется в виде

$$H(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \cdot \cos(2\pi k i / N), k = 0, 1, \dots, (N-1), \quad (10)$$

где $\cos \theta = \cos \theta + \sin \theta$.

Преобразование Хартли симметрично, обратное преобразование имеет вид:

$$x(i) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \cdot \cos(2\pi k i / N) \quad (11)$$

Преобразование Хартли можно представить в виде суммы четной и нечетной составляющих $H(k) = E(k) + O(k)$, при этом

$$E(k) = (H(k) + H(N-k))/2, O(k) = (H(k) - H(N-k))/2.$$

Как показал Р.Н. Брейсуэл в работе [2], между преобразованиями Фурье и Хартли существует взаимосвязь. Если преобразование Фурье представлено в виде $F(k) = R(k) + i \cdot X(k)$,

то

$$\begin{aligned} R(k) &= (H(k) + H(N-k))/2, \\ X(k) &= -(H(k) - H(N-k))/2. \end{aligned} \quad (12)$$

Спектральная плотность Z^2 равна

$$Z^2(k) = R^2(k) + X^2(k) = [H^2(k) + H^2(N-k)]/2. \quad (13)$$

Для оценки фазы преобразования Фурье можно вычислить значение

$$\arg F(x) = \arctg \left[\frac{H(N-k) - H(k)}{H(N-k) + H(k)} \right] = \arctg \left[\frac{O(k)}{E(k)} \right]. \quad (14)$$

В работе [2] описаны принципы построения алгоритмов быстрого преобразования Хартли (БПХ). Если входную N -элементную последовательность $x(i)$ разбить на 2 последовательности с четными и нечетными номерами (проживание по времени) — $\{x(0), 0, x(2), 0, x(4), \dots\}$, $\{x(1), 0, x(3), 0, x(5), \dots\}$, и вычислить для них преобразования Хартли $H_1(k)$, $H_2(k)$ с периодом N , то ПХ всей последовательности можно вычислить по формуле

$$H(k) = H_1(k) + H_2(k) \cdot \cos(2\pi k / N) + H_2(N-k) \cdot \sin(2\pi k / N). \quad (15)$$

Значения $H_1(k)$, $H_2(k)$ могут быть получены путем повторного разбиения вплоть до, например, четырехэлементных последовательностей, состоящих из двухэлементных сегментов; преобразование двухэлементной последовательности включает два действия сложения и ни одного умножения.

Принято считать, что если $N = 2^2$, вычисление БПХ требует выполнения количества операций пропорционально $N \cdot P$ [2]. Для увеличения скорости вычисления алгоритма БПХ целесообразно использовать размерность $N = 4^2$ с элементарными элементами ДПХ, как и в случае БПФ [2].

В ряде научных работ [4] прозвучали утверждения о том, что БПХ быстреедействительно превосходит БПФ. К такому выводу можно прийти, если сравнить преобразование последовательности вещественных данных посредством БПХ

посредством БПФ, что некорректно. БПФ — идеальный инструмент для обработки данных в комплексной форме. БПХ можно использовать для обработки массивов действительных чисел, например, для обработки изображений.

С точки зрения единого матричного подхода выражение для БПХ, аналогичное выражению (5) для БПФ, имеет вид:

$$\begin{aligned} H(k) &= H(s, r) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} x(l, m) \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{N} (M+m) \cdot (Lr+s) \right] = \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} x(l, m) \cdot \cos \left[\frac{2\pi}{N} (Ms + ms + mLr) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

В соотношениях (5) и (16) выражено главное отличие преобразований Фурье и Хартли с точки зрения синтеза быстрых алгоритмов, а именно: разделимость ядра преобразования Фурье, что обеспечивает многообразие вариантов реализации в зависимости от характеристик и особенностей задачи, и неразделимость ядра преобразования Хартли, что существенно ограничивает возможные варианты реализации. Преобразование сас-функции приводит (16) к виду:

$$\begin{aligned} H(s, r) &= \sum_{l=0}^{L-1} \left[\cos \left(\frac{2\pi}{N} Mls \right) \sum_{m=0}^{M-1} x(l, m) \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{N} m(Lr+s) \right) \right] + \\ &+ \sum_{l=0}^{L-1} \left[\cos \left(-\frac{2\pi}{N} Mls \right) \sum_{m=0}^{M-1} x(l, m) \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{N} m(Lr+s) \right) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Покажем, что формула Хартли (15) является частным случаем формулы (17) при $M=2$. В этом случае матрица исходных данных имеет два столбца ($m=0, 1$) и $L=N/2$ строк. Если представить элементы исходного массива их номерами, элементы в матрице располагаются следующим образом:

0	1
2	3
4	5

.....
N-2 N-1

Первый столбец состоит из элементов с четными номерами, второй — с нечетными. Преобразуем выражение (17), учитывая обозначения, принятые при переходе к матричному представлению входной последовательности (перед выражением (5)):

$$\begin{aligned} H(s, r) &= \sum_{l=0}^{L-1} \left[\cos \left(\frac{2\pi}{N} Mls \right) \cdot \left(x(l, 0) + x(l, 1) \cos \left(\frac{2\pi}{N} (Lr+s) \right) \right) \right] + \\ &+ \sum_{l=0}^{L-1} \left[\cos \left(-\frac{2\pi}{N} Mls \right) \cdot x(l, 1) \sin \left(\frac{2\pi}{N} (Lr+s) \right) \right] = \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} \cos \left(\frac{2\pi}{N} 2ls \right) \cdot x(l, 0) + \cos \left(\frac{2\pi}{N} (Lr+s) \right) \sum_{l=0}^{L-1} \cos \left(\frac{2\pi}{N} 2ls \right) \cdot x(l, 1) + \\ &+ \sin \left(\frac{2\pi}{N} (Lr+s) \right) \sum_{l=0}^{L-1} \cos \left(-\frac{2\pi}{N} 2ls \right) \cdot x(l, 1) = \\ &= H_1(k) + \cos \left(\frac{2\pi}{N} k \right) \cdot H_2(k) + \sin \left(\frac{2\pi}{N} k \right) \cdot H_2(N-k) = H(k), \end{aligned} \quad (18)$$

где $H_1(k)$, $H_2(k)$ — преобразования Хартли последовательностей, состоящих из элементов каждого столбца соответственно — $\{x(0), 0, x(2), 0, x(4), 0, \dots\}$, $\{x(1), 0, x(3), 0, x(5), 0, \dots\}$.

