Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 25 (64) № 2 (2012), с. 89–95.

УДК 517.98

О. В. Островська, Р. Я. Якимів

ПРО $*$-ЗОБРАЖЕННЯ КОМУТАЦІЙНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ З УМОВАМИ ОРТОГОНАЛЬНОСТІ

В роботі вивчається категорія інтегровних $*$-зображень алгебр $C_0^{(d)}$, породжених співвідношеннями наступного вигляду

$$a_i^* a_i = 1 + a_i a_i^*, \quad a_i^* a_j = 0, \quad i \neq j, \ i, j = 1, \ldots, d.$$

Доведено, що категорія інтегровних $*$-зображень $C_0^{(d)}$ ізоморфна певній підкатегорії категорії зображень алгебри Кунца-Тьопліца $O_d^{(0)}$.

Ключові слова: канонічні комутаційні співвідношення, алгебра Кунца-Тьопліца, необмежені зображення.

Вступ

В цій роботі розглядається категорія інтегровних $*$-зображень класу комутаційних співвідношень вигляду

$$a_i^* a_i - a_i a_i^* = 1, \quad a_i^* a_j = 0, \quad i \neq j, \ i, j = 1, \ldots, d. \tag{1}$$

Нижче $*$-алгебру, породжену цими співвідношеннями, будемо позначати через $C_0^{(d)}$. Зауважимо, що алгебри C_0^d є представниками класу так званих q_{ij}-канонічних комутаційних співвідношень, введених в роботі [1].

Нагадаємо, що в будь-якому зображенні співвідношення

$$a^* a - a a^* = 1$$

образ елемента a є необмеженим оператором, див. наприклад [2]. Отже в будь-якому зображенні співвідношень (1) образи твірних a_i, $i = 1, \ldots, d$, є необмеженими операторами. Тому постає питання визначення інтегровоного (гарного в певному сенсі) зображення $C_0^{(d)}$ необмеженими операторами. Нижче, див. Частину 1, дано такі означення в термінах інваріантних областей та в термінах співвідношень між обмеженими функціями від образів твірних.

Алгеброю Кунца-Тьопліца $O_d^{(0)}$, див. [3], називається $*$-алгебра, породжена ізометричними елементами, що задовольняють умови ортогональності:

$$O_d^{(0)} = \mathbb{C}\langle s_i,\ s_i^* \mid s_i^* s_i = 1,\ s_i^* s_j = 0,\ i \neq j, \quad i,j = 1,\dots,d\rangle.$$

Очевидно, що всі зображення O_d^0 є обмеженими.

Основним результатом роботи є доведення ізоморфізму між категоріями інтегровних зображень алгебри $C_0^{(d)}$ та повної підкатегорії категорії зображень алгебри Кунца-Тьопліца $O_d^{(0)}$, об'єктами якої є лише класи еквівалентності зображень, в яких образ кожної твірної є чистою ізометрією, див. Частину 1.

1. Категорія зображень алгебри $C_0^{(d)}$.

Означення 1. Нехай A_i, $i = 1,\dots,d$, замкнені оператори на гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Будемо казати, що A_i, $i = 1,\dots,d$, задають інтегровне зображення $*$-алгебри C_0^d, якщо

(1) Існує щильна лінійна область $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$, що є інваріантною відносно операторів A_i, A_i^*, $i = 1,\dots,d$.

(2) Для кожного $x \in \mathcal{D}$ виконуються рівності

$$A_i^* A_i x = (1 + A_i A_i^*)x, \quad A_i^* A_j x = 0, \quad i \neq j,\ i,j = 1,\dots,d.$$

(3) Оператор

$$\Delta = \sum_{i=1}^{d} A_i^* A_i$$

є істотно самоспряженим на $\mathcal{D}$.

Покажемо яким чином можна дати визначення інтегровного зображення в термінах *обмежених операторів*. Припустимо, що набір замкнених операторів $\{A_i,\ A_i^*\}$ задає інтегровне зображення $C_0^{(d)}$. Розглянемо ліві полярні розклади $A_i = S_i C_i$, де $C_i^2 = A_i^* A_i$, $i = 1,\dots,d$. Оскільки з співвідношення

$$A_i^* A_i = 1 + A_i A_i^*$$

випливає, що $\ker A_i = \{0\}$, будемо мати $\ker S_i = \ker C_i = \ker A_i = \{0\}$. Отже оператори S_i, $i = 1,\dots,d$, є ізометріями, тобто $S_i^* S_i = 1$. Далі, співвідношення $A_i^* A_j = 0$ набудуть вигляду

$$C_i S_i^* S_j C_j = 0, \quad i \neq j.$$

Оскільки ядро оператора C_i є нульовим, одержимо $S_i^* S_j C_j = 0$ та за допомогою спряження отримаємо $C_j S_j^* S_i = 0$, звідки, як і вище одержимо

$$S_j^* S_i = 0.$$

Побудуємо лінійні оператори $D_i = S_i C_i S_i^*$. Очевидно, що $D_i D_j = D_j D_i = 0$, $i \neq j$. Співвідношення $A_i^* A_i = 1 + A_i A_i^*$ можна подати в вигляді

$$C_i^2 = 1 + S_i C_i^2 S_i^*. \tag{2}$$

Домноживши зліва на S_i та зправа на S_i^* одержимо

$$D_i^2 = S_i S_i^* + S_i D_i^2 S_i^*, \tag{3}$$

та домноживши на S_i зправа, дістанемо

$$D_i^2 S_i = S_i(1 + D_i^2). \tag{4}$$

Легко перевірити, що співвідношення (2) та (4) є еквівалентними.

Зауважимо, що для обмеженого оператора D_i з співвідношення (4) випливає, що

$$F(D_i^2) S_i = S_i F(1 + D_i^2)$$

для довільної обмеженої борелівської на $\mathbb{R}$ функції $F(\cdot)$.

Тепер ми готові дати означення інтегровного зображення алгебри $C_0^{(d)}$ в термінах обмежених операторів.

Означення 2. Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_d$ замкнені лінійні оператори на гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Побудуємо полярні розклади $A_i = S_i C_i$, $C_i^2 = A_i^* A_i$, та розглянемо $D_i = S_i C_i S_i^*$. Будемо казати, що A_i, $i = 1, \ldots, d$, задають інтегровне зображення $C_0^{(d)}$, якщо

(1) Оператори C_i та C_j комутують в сенсі розкладів одиниці при довільних $i, j = 1, \ldots, d$.

(2) $S_i^* S_j = 0$, $i \neq j$, $S_i^* S_i = 1$, $i, j = 1, \ldots, d$.

(3) Для довільної дійсної обмеженої вимірної функції $F(\cdot)$ має місце співвідношення

$$F(D_i^2) S_i = S_i F(1 + D_i^2).$$

За допомогою міркувань наведених в [5] для зображень алгебри, породжених q-канонічними комутаційними співвідношеннями з умовами ортогональності можна довести, що Означення 1, 2 є еквівалентними.

Зауважимо, що для виконання умови 3) попереднього означення достатньо вимагати щоб для довільних борелівської множини $\delta \subset \mathbb{R}_+$ та $j = 1, \ldots, d$ виконувались умови

$$E_j(\delta) S_j = S_j E(\delta - 1),$$

де через $E_j(\cdot)$ позначено розклад одиниці оператора D_j^2.

Використовуючи Означення 2 зручно вводити поняття незвідного інтегровного зображення $C_0^{(d)}$, а також поняття унітарно еквівалентних зображень.

Означення 3. Набір $\{A_i,\ A_i^*,\ i = 1, \dots, d\}$ замкнених на гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ операторів, що задовольняють умови Означення 2, визначає незвідне інтегровне зображення алгебри $C_0^{(d)}$, якщо сім'я обмежених операторів

$$\mathcal{B} = \{S_i,\ S_i^*,\ E_i(\delta), \quad \delta \subset \mathbb{R}_+ \text{ борелівська підмножина},\ i = 1, \dots, d\}$$

є незвідною.

Зауважимо також, що за Лемою Шура, інтегровне зображення буде незвідним тоді й лише тоді, коли довільний оператор $T \in B(\mathcal{H})$, що є перестановним з усіма операторами сім'ї $\mathcal{B}$, має бути лише скалярним.

Означення 4. Інтегровні зображення алгебри $A_0^{(d)}$, що визначені наборами замкнених операторів $\{A_i^{(j)},\ (A_i^{(j)})^*,\ i = 1, \dots, d\}$, $j = 1, 2$, є унітарно еквівалентними тоді й лише тоді, коли відповідні сім'ї $\mathcal{B}_1$ та $\mathcal{B}_2$ є унітарно еквівалентними.

Зауваження 1. Будемо казати, що обмежений оператор $T\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ сплітає інтегровні зображення алгебри $C_0^{(d)}$, визначені на просторах $\mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$, якщо T сплітає відповідні сім'ї $\mathcal{B}_1$ та $\mathcal{B}_2$, тобто

$$TE_1(\delta) = E_2(\delta)T, \quad T(S_i^{(1)})^* = (S_i^{(2)})^*T, \quad TS_i^{(1)} = S_i^{(2)}T$$

для всіх $i = 1, \dots, d$ та борелівських $\delta \subset \mathbb{R}_+$.

За допомогою Зауваження 1 можна означити категорію інтегровних зображень алгебри $C_0^{(d)}$, що позначатиметься надалі через $\mathbf{Rep}\ C_0^{(d)}$. А саме, об'єктами категорії $\mathbf{Rep}\ C_0^{(d)}$ є класи унітарної еквівалентності інтегровних зображень, а множину морфізмів $\mathbf{Mor}(\pi_1, \pi_2)$ складають оператори, які сплітають зображення π_1 та π_2.

Позначимо через $\mathbf{Rep}_0\ O_d^{(0)}$ повну підкатегорію категорії $\mathbf{Rep}\ O_d^{(0)}$ об'єктами якої є зображення в яких образи твірних $O_d^{(0)}$ є чистими ізометріями, тобто їх розклад Вольда не містить унітарної частини.

Нижче ми доведемо, що категорія інтегровних зображень алгебри $C_0^{(d)}$ ізоморфна категорії $\mathbf{Rep}_0\ O_d^{(0)}$.

Нагадаємо означення ізоморфних категорій, див. [7].

Означення 5. Категорії $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ називаються ізоморфними, якщо існує функтор

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

такий, що відображення $\mathcal{F}\colon \mathbf{Ob}\ \mathcal{A} \to \mathbf{Ob}\ \mathcal{B}$ є взаємнооднозначним та для будь-яких $a, b \in \mathbf{Ob}\ \mathcal{A}$ відображення

$$\mathcal{F}\colon \mathbf{Mor}(a, b) \to \mathbf{Mor}(\mathcal{F}(a), \mathcal{F}(b))$$

є взаємнооднозначним.

Теорема 1. Категорії $\mathbf{Rep}\ C_0^{(d)}$ та $\mathbf{Rep}_0\ O_d^{(0)}$ є ізоморфними.

Доказательство. Ми покажемо, що кожне інтегровне зображення $C_0^{(d)}$ однозначно, з точністю до унітарної еквівалентності, елемент, що належить $\mathbf{Ob}\ \mathbf{Rep}_0\ O_d^{(0)}$ визначає зображення алгебри Кунца-Тьопліца. Та навпаки, за кожним зображенням алгебри Кунца-Тьопліца $\pi \in \mathbf{Ob}\ \mathbf{Rep}_0\ O_d^{(0)}$ можно однозначно задати інтегровне зображення алгебри C_0^d.

Нехай маємо інтегровне зображення алгебри $C_0^{(d)}$, що визначене операторами A_1, A_2,..., A_d. Розглянемо полярні розклади $A_i = S_i C_i$, $i = 1, \ldots, d$. Тоді, згідно Означення 2, оператори S_i, $i = 1, \ldots, d$, визначають зображення алгебри $O_d^{(0)}$. Легко зрозуміти, що якщо набір $\{A_i,\ A_i^*\}$ задає інтегровне зображення $C_0^{(d)}$, то для кожного фіксованого $i = 1, \ldots, d$ оператор A_i визначає інтегровне зображення канонічних комутаційних співвідношень з одним степенем свободи. Внаслідок теореми єдиності Дж. фон Неймана, див. [2], кожен з операторів A_i є унітарно еквівалентним кратному оператора народження фоківського зображення одновимірних CCR. Тобто існує унітарний оператор

$$U_i \colon \mathcal{H} \to l_2(\mathbb{Z}_+) \otimes \mathcal{K}_i,$$

де $\mathcal{K}_i$ – гільбертів простір, такий, що

$$A_i = U_i^*(a \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}_i})U_i$$

та $a \colon l_2(\mathbb{Z}_+) \to l_2(\mathbb{Z}_+)$

$$ae_n = \sqrt{n+1}e_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Зауважимо, що в полярному розкладі оператора a, $a = SC$, оператор S є оператором однобічного зсуву

$$Se_n = e_{n+1} \text{ та } C^2 e_n = (n+1)e_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Спектральні проектори оператора C, що відповідають власним числам $\lambda_n = \sqrt{n+1}$, дорівнюють $P_n = S^n(S^n)^* - S^{n+1}(S^{n+1})^*$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Отже спектральний розклад C має наступний вигляд

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}\left(S^n(S^n)^* - S^{n+1}(S^{n+1})^*\right). \tag{5}$$

Для кожного $i = 1, \ldots, d$ полярний розклад оператора A_i буде мати наступну форму

$$\begin{aligned} A_i = S_i C_i = U_i^*(S \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}_i})(C \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}_i})U_i = \\ = U_i^*(S \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}_i})U_i \cdot U_i^*(C \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}_i})U_i. \end{aligned}$$

Тоді з єдиності полярного розкладу випливає, що

$$S_i = U_i^*(S \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}_i})U_i, \quad C_i = U_i^*(C \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}_i})U_i.$$

Зокрема звідси випливає, що всі ізометрії S_i, $i = 1, \ldots, d$, є чистими та спектральний розклад оператора C_i має вигляд

$$C_i = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}\left(S_i^n (S_i^n)^* - S_i^{n+1}(S_i^{n+1})^*\right). \tag{6}$$

Таким чином кожному інтегровному зображенню $C_0^{(d)}$ відповідає зображення $\pi \in$ **Ob Rep**$_0$ $O_d^{(0)}$:

$$\pi(s_i) = S_i, \text{ де } A_i = S_i C_i \text{ є полярним розкладом}, \quad i = 1, \ldots, d.$$

При цьому з Означення 4 випливає, що унітарно еквівалентним наборам $\{A_i^{(j)},\ (A_i^j)^*,\ i = 1, \ldots, d\}$, $j = 1, 2$, відповідають унітарно еквівалентні набори ізометрій $\{S_i^{(j)},\ (S_i^j)^*,\ i = 1, \ldots, d\}$, $j = 1, 2$. Отже маємо відображення

$$\mathcal{F}\colon \mathbf{Ob\ Rep}\ C_0^{(d)} \to \mathbf{Ob\ Rep}_0\ O_d^{(0)}.$$

А з Означення 1 випливає, що будь-який оператор T, що сплітає інтегровні зображення, визначені наборами $\{A_i^{(j)},\ (A_i^j)^*,\ i = 1, \ldots, d\}$, $j = 1, 2$, сплітає відповідні набори ізометрій $\{S_i^{(j)},\ (S_i^j)^*,\ i = 1, \ldots, d\}$, $j = 1, 2$. Таким чином для кожної пари $(\pi_1, \pi_2) \in$ **Ob Rep** $C_0^{(d)} \times$ **Ob Rep** $C_0^{(d)}$ маємо також відображення

$$\mathcal{F}\colon \mathbf{Mor}(\pi_1, \pi_2) \to \mathbf{Mor}(\mathcal{F}(\pi_1), \mathcal{F}(\pi_2)).$$

Функторіальність побудованого нами $\mathcal{F}\colon$ **Rep** $C_0^{(d)} \to$ **Rep**$_0$ $O_d^{(0)}$ є очевидною.

Навпаки, якщо набір ізометрій $\{S_i,\ S_i^*,\ i = 1, \ldots, d\}$ задає зображення $\pi \in$ **Ob Rep**$_0$ $O_d^{(0)}$, то оператори $A_i = S_i C_i$, $i = 1, \ldots, d$, де оператори C_i визначаються за допомогою формул (6), будуть задавати інтегровне зображення алгебри $C_0^{(d)}$.

А саме, легко переконатись, що для будь-якого набору ортогональних ізометрій $\{S_i,\ S_i^*,\ i = 1, \ldots, d\}$, в якому кожна ізометрія є чистою, оператори $D_i = S_i C_i S_i^*$, C_i задані формулами (6), задовольняють умові 3) Означення 2. Дійсно, цій умові задовольняє оператор $D = SCS^*$, де S– однобічний зсув та C задано формулою (5). Остаточно, якщо $S_i^* S_j = \delta_{ij}\mathbf{1}$, проектори

$$P_n^{(i)} = S_i^n (S_i^n)^* - S_i^{n+1}(S_i^{n+1})^*, \quad n \in \mathbb{Z}_+,\ i = 1, \ldots, d,$$

комутують. Отже C_i, $i = 1, \ldots, d$, комутують в сенсі розкладів одиниці та оператори $A_i = S_i C_i$, $i = 1, \ldots, d$, задають інтегровне зображення $C_0^{(d)}$.

Очевидно, що унітарно еквівалентним наборам $\{S_i^{(j)},\ (S_i^{(j)})^*\}$, $j = 1, 2$, відповідатимуть унітарно еквівалентні набори $\{A_i^j,\ (A_i^{(j)})^*\}$, $j = 1, 2$, та будь-який оператор T, для якого

$$TS_i^{(1)} = S_i^{(2)}T, \quad T(S_i^{(1)})^* = (S_i^{(2)})^*T, \quad i = 1, \ldots, d,$$

буде також сплітати набори $\{A_i^j,\ (A_i^{(j)})^*\}$, $j = 1, 2$. Отже, визначено функтор $\mathcal{F}'\colon$ **Rep**$_0$ $O_d^{(0)} \to$ **Rep** $C_0^{(d)}$. Легко перевірити, що $\mathcal{F}'$ буде оберненим до $\mathcal{F}$. $\square$

Список литературы

[1] M. Bożejko, R. Speicher, *Completely positive maps on Coxeter groups, deformed commutation relations and operator spaces* // Mat. Ann., **300**. - 1994. - P. 97-120.

[2] O. Bratelli, D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics-2. Equilibrium states. Models in Quantum Statistical Mechanics* – Berlin, Heidelberg, New-York: Springer, 2002. –532 P.

[3] J. Cuntz, *Simple C^*-algebras generated by isometries*, // Comm. Math. Phys., **57**. - 1977. - no. 2. - P. 173–185.

[4] V. Ostrovskyi and Yu. Samoilenko,*Introduction to the theory of representations of finitely presented algebras* – London: Gordon & Breach, 2000. – 261 p.

[5] V. Ostrovskyi, D. Proskurin and L. Turowska, *Unbounded representations of q-deformation of Cuntz algebra* // Lett. Math. Phys., **85**. - 2008. - no. 2-3. - P. 147–162.

[6] K. Schmüdgen, *Unbounded operator algebras and representation theory* – Basel: Birkhäuser Verlag, 1990. – 400 P.

[7] С. Мак Лейн, *Категории для работающего математика* – Москва: Физматлит, 2004. – 352 С.

Островская О.В., Якымив Р.Я., О $*$-представлениях коммутационных соотношений с условиями ортогональности.//

В работе изучается категория интергрируемых $*$-предаставлений алгебр $C_0^{(d)}$, порожденных соотношениями следующего вида

$$a_i^* a_i = 1 + a_i a_i^*, \quad a_i^* a_j = 0, \quad i \neq j, \ i, j = 1, \ldots, d.$$

Доказано, что категория интегрируемых $*$-представлений $C_0^{(d)}$ изоморфна некоторой подкатегории категории представлений алгебры Кунца-Теплица $O_d^{(0)}$.

Ключевые слова: канонические коммутационные соотношения, алгебра Кунца-Теплица, неограниченные представления.

Ostrovska O.V., Yakymiv R. Ya., On $*$-representations of commutation relations with orthogonality conditions.//

In this paper we study the categories of integrable $*$-representations of the family of $*$-algebras $C_0^{(d)}$ generated by relations of the following form

$$a_i^* a_i = 1 + a_i a_i^*, \quad a_i^* a_j = 0, \quad i \neq j, \ i, j = 1, \ldots, d.$$

It is proved that the category of integrable representations of $C_0^{(d)}$ is isomorphic to the certain subcategory of the category of $*$-representations of Cuntz-Topeplitz algebra $O_d^{(0)}$.

Keywords: canonical commutation relations, Cuntz-Toeplitz algebra, unbounded representations.