

Відривання парової бульбашки від змочуваної поверхні

Теоретично доказано, що відрив бульбашки від змочуваної поверхні обумовлений порушенням рівноваги її форми, це відбувається якщо на контурі повільно зростаючої бульбашки біля її основи з'являється точка перегину. При цьому бульбашка повністю відокремлюється внаслідок стягування основи. Отримана формула для відривного діаметра бульбашки.

Ключові слова: бульбашка, тиск, швидкість росту, рівняння руху.

It has been proved theoretically that the radius of the basis of a bubble growing slowly on a flat solid surface at first increases and then decreases until at a certain moment the stability of the bubble shape is disturbed, which leads to the contraction of the bubble basis and its detachment. An approximate formula has been obtained for the detachment diameter of the bubble tearing away whole from wetted surface.

Keywords: bubble, pressure, velocity, motion equation.

Теоретически доказано, что отрыв пузырьки от смачиваемой поверхности обусловленный нарушением равновесия ее формы, это происходит если на контуре медленно растущего пузырька около ее основы появляется точка перегиба. При этом пузырек полностью отделяется в результате взимания основы. Получена формула для отрывного диаметра пузырька.

Ключевые слова: пузырек, давление, скорость роста, уравнения движения

Механізм відриву парових бульбашок від твердої поверхні і відривні розміри мають важливе значення для багатьох фізико-хімічних процесів, в тому числі і для кипіння рідин [1]. Багатьма дослідниками була прийнята спроба виявити теоретичним чи дослідним шляхами максимальний об'єм $V_{\max}$, за якого порушується механічна рівновага поверхневої бульбашки і відбувається її відрив. У роботі [2] основне рівняння теорії капілярності було розв'язане числовим методом для краплі, яка знаходиться на поверхні і такої, що висить. Цей розв'язок автори наводять у вигляді таблиць, які визначають форму границі розділу фаз, особливо детальних для крапель що лежать на площині. Використовуючи чисельне рішення [2] було побудовано контури бульбашок над твердою поверхнею (відповідних звисаючим краплям) і побудовано графічний зв'язок між об'ємом V , радіусом X кола дотичним до стінки з крайовим кутом θ . Фрітц [3], використовуючи дані [2], виявив, що для кожного кута θ існує певний максимальний рівноважний об'єм $V_{\max}$. Вважаючи, що V_g співпадає з $V_{\max}$, Фрітц побудував графік залежності $V_0^{1/3}=f(\theta)$. Пізніше Кутателадзе підібрав апроксимуючу цю залежність формулу для розрахунку відривного діаметра бульбашки

$$d_g \approx 0,021l, \quad (1)$$

де θ – в градусах; $l = (\sigma/\Delta\rho g)$ – капілярна стала; σ – поверхневий натяг; $\Delta\rho$ – різниця густин рідини і пари; g – прискорення вільного падіння.

Існує ще ряд робіт, в яких форма крапель і бульбашок визначається числовими методами [4]. Аналітичне ж рішення вдалося отримати тільки для двомірної (плоскої) задачі. При цьому було виявлено, що можливі два типи відриву: а) при малих крайових кутах бульбашка відокремлюється від стінки повністю, б) при великих – бульбашка відривається по перешийку, так що частина парового об'єму залишається на твердій поверхні.

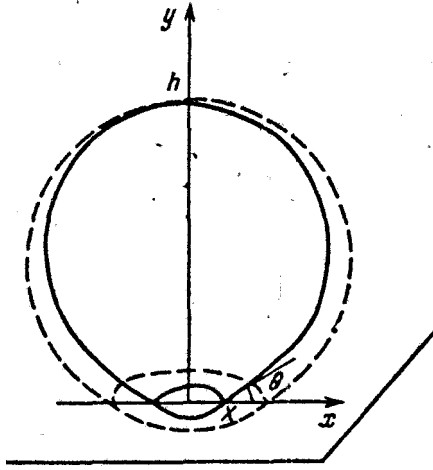


Рис. 1. Об'ємна симетрична відносно вертикальної осі бульбашка

У випадку об'ємної симетричної відносно вертикальної осі бульбашки (рис. 1) задача визначення форми контуру її меридіонального перерізу зводиться до розв'язку рівняння Ейлера варіаційної задачі на мінімум суми поверхневої F_σ і гравітаційної F_g складових вільної енергії при даному об'ємі V бульбашки, яке має такий вид:

$$\frac{x''}{(1+x'^2)^{3/2}} - \frac{1}{x(1+x'^2)^{1/2}} = \frac{\lambda}{\sigma} - \frac{y}{l^2}, \quad (2)$$

де λ – множник Лагранжа, $x' = dx/dy$, $x'' = d^2x/dy^2$.

Перетворивши (2) до виду

$$d \left[2x(1+x'^2)^{1/2} - \frac{x^2 y}{l^2} + \frac{\lambda x^2}{\sigma} \right] = -\frac{1}{l^2} x^2 dy$$

і взявши визначений інтеграл по y в межах від 0 до висоти h , отримаємо співвідношення, яке зв'язує радіус основи з величинами V , λ , θ , l і в безрозмірній формі ($\bar{X} = x/l$, $\bar{V} = V/l^3$, $\bar{\lambda} = \lambda/\sigma$) набуває наступного виду:

$$\bar{\lambda} \bar{X}^2 + 2 \bar{X} \sin \theta = \frac{\bar{V}}{\pi}. \quad (3)$$

Звідки

$$\bar{X} = -\frac{\sin \theta}{\bar{\lambda}} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{\bar{\lambda} \bar{V}}{\pi \sin^2 \theta}} \right). \quad (4)$$

Залежність $\bar{X}$ від $\bar{V}$ і θ є складною залежністю, оскільки і $\bar{\lambda}$ – певна невідома функція величин $\bar{V}$ і θ . Використаємо тлумачення множника Лагранжа у варіаційних задачах на умовний екстремум [5], у відповідності з яким у нашому випадку $(-\lambda)$ дорівнює похідній від рівноважного значення вільної енергії за змінним, як параметр, об'ємом бульбашки. Виходить, що для некрупних бульбашок $F_\sigma \ll F_g$, тому $-\lambda \approx dF_\sigma / dV$. Цю похідну можна легко визначити через форму кульового сегменту. У загальному випадку вплив сили тяжіння у виразі dF_σ / dV можна відобразити тільки посередньо, через зміну розмірів деформованої силою тяжіння бульбашки. Правильно вибраний лінійний розмір у виразі dF_σ / dV повинен зберігати загальний вигляд як при невагомості, так і при наявності сили тяжіння. Використання граничного рішення при невагомості і аналогії з плоскою задачею, в якій множник λ визначається точно, а також перевірка результатів чисельного розв'язку задачі за допомогою ЕОМ дозволяють знайти вираз dF_σ / dV з використанням h і θ :

$$-\lambda \approx \frac{4 \cos^2 \theta / 2}{h}. \quad (5)$$

Цю формулу з похибкою в декілька відсотків можна використовувати аж до досягнення бульбашкою максимального рівноважного розміру. Як слідує з (5), із зростанням висоти $|\lambda|$ зменшується.

Для вибору знака в (4) також виконаний аналіз граничних випадків ($1/l, V \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$) і дані розв'язку на ЕОМ. Плюс необхідно брати для початку росту бульбашки, мінус – тільки для крупних бульбашок, які мають на своєму контурі точку перегину. Зміна знаку відбувається у той момент, коли на контурі бульбашки на рівні основи з'являється перегин: величина λ/σ , яка представляє собою, згідно (2), подвоєну середню кривизну поверхні розділу фаз при $y = 0$, стає рівною одній з головних кривин $-\sin \theta/X$.

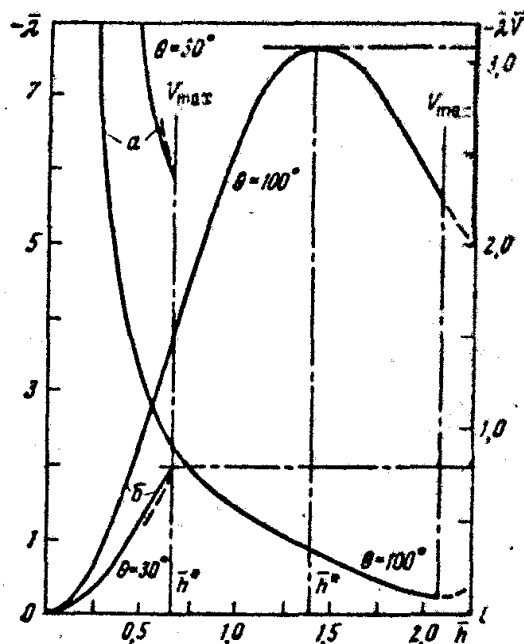


Рис. 2. Залежність $-\bar{\lambda}$ (а) і $-\bar{\lambda}\bar{V}$ (б) від висоти бульбашки при рішенні на ЕОМ

Для виявлення характеру зміни $\bar{X}$ під час росту бульбашки, під час монотонного збільшення висоти $\bar{h}$, необхідно врахувати, що, не дивлячись на зменшення величини $|\bar{\lambda}|$, добуток $\bar{\lambda}\bar{V}$ є від'ємним і збільшується за модулем. Залежність $-\bar{\lambda}$ і $-\bar{\lambda}\bar{V}$ від h побудована на рис.2 у відповідності з даними розв'язку отриманими на ЕОМ.

Таким чином, у той час як перший співмножник $\left(-\sin \frac{\theta}{\lambda}\right)$ у правій частині (4) збільшується, вираз $\left(1 + \frac{\bar{\lambda}\bar{V}}{\pi \sin^2 \theta}\right)$ зменшується. Спочатку переважає перший ефект і X зростає, але у подальшому більш суттєвим стає зменшення другого співмножника і ширина основи, проходячи максимум, скорочується. При цьому значення $\bar{h}^*$, за якого $\bar{\lambda}\bar{V}$ досягає величини $-\pi \sin^2 \theta$, підкореневий вираз в (4) перетворюється в нуль і на периметрі змочування з'являється точка перегину контуру. При малих значеннях θ це відбувається, коли бульбашка ще невелика і мало деформована; функція $-\bar{\lambda}\bar{V}$ у цей момент продовжує збільшуватися зі зростанням $\bar{h}$ (рис. 2). У цьому разі, як показує аналіз (4), при $\bar{h} \rightarrow \bar{h}^*$, темп зміни основи $d\bar{X}/d\bar{h}$ прямує до нескінченно великих від'ємних значень. Вираз (4) при $h > \bar{h}^*$ губить свій зміст – подальші зміни не можуть відбуватися квазірівноважно, але їх характер очевидний: основа миттєво стягується в точку і бульбашка відривається від поверхні повністю.

За такого механізму порушення рівноваги висота і об'єм бульбашки при появі на контурі перегину повинні досягати своїх максимальних для даного θ значень. За наслідками числового інтегрування це відбувається до величин крайового кута порядку 70° . При цьому $\bar{h}^*$ є найбільшим значенням висоти бульбашки не тільки стійкої, але і нестійкої форми – з контурами, яким відповідає не мінімум, а умовний максимум енергії [для кривих, які задовольняють вихідне диференціальне рівняння (2)]. На рис. 2 частини графіка, які стосуються цих нестійких форм, позначені пунктиром. Як видно з рисунка, для умов хорошого змочування функції $-\bar{\lambda}$ і $-\bar{\lambda}\bar{V}$ мають при $h = \bar{h}^*$ особливі точки. Суттєвим є те, що тільки порушення рівноваги форми, а не об'ємна нестійкість бульбашки приводить до її відокремлення від твердої поверхні. У цю мить, згідно даних ЕОМ, величина $\bar{\lambda}$ ще від'ємна (рис. 2) і далека від нульового значення, якому відповідає перевалювання через потенціальний бар'єр внаслідок об'ємного ефекту зменшення енергії.

Для кутів більших 70° , як показує числовий розв'язок, при проходженні функцією $-\bar{\lambda}\bar{V}$ максимуму при $h = \bar{h}^*$ $d(-\bar{\lambda}\bar{V})/dh = 0$ і з подальшим зростанням $\bar{h}$ величина $-\bar{\lambda}\bar{V}$ зменшується. У результаті при $\bar{h} = \bar{h}^*$ похідна $d\bar{X}/d\bar{h}$ не має своїх особливостей, при цьому не відбувається швидке стягування основи і бульбашка утримується на твердій поверхні. При $\bar{h} > \bar{h}^*$ вираз (4), в якому тепер взяти знак “мінус”, не губить свого змісту. Зміна ходу функції $-\bar{\lambda}\bar{V}$, очевидно, пов'язана з тим, що крупних бульбашок $-\bar{\lambda}$ швидше зменшується з ростом h , ніж за законом $-\bar{\lambda} \sim h^{-1}$ з причини привнесення енергії гравітаційною складовою, а об'єм цих суттєво відмінних за формою від кульового сегменту бульбашок зростає повільніше зі збільшенням висоти, ніж на початковій стадії. При досягненні бульбашкою певної висоти з'являється точка перегину, яка при подальшому зростанні бульбашки підіймається над площиною стінки, а нахил дотичної до цієї точки збільшується. З цим пов'язаний механізм відриву, який має місце при великих крайових кутах, у цьому разі відбувається трансформація перегину у перешийок, який у подальшому стягується. Для області крайових кутів $\theta < 70^\circ$, в якій бульбашка відривається повністю (без залишку), можна оцінити співвідношення між її основними розмірами у момент порушення рівноваги, які визначаються умовою $\bar{\lambda}\bar{V} = -\pi \sin^2 \theta$.

За цих умов з формули (4) можна знайти точне співвідношення:

$$\bar{X}^* = \frac{V_{\max}}{\pi \sin \theta}. \quad (6)$$

Використовуючи залежність (5), отримаємо:

$$V_{\max} \approx \pi \bar{h}^* \sin \frac{\theta}{2}, \quad (7)$$

що після підстановки в (6), дає

$$\bar{X}^* \approx \frac{1}{2} \bar{h}^* \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (8)$$

Найбільш суттєва деформація бульбашки відбувається від дії архімедової сили біля основи, яка безпосередньо перед втратою стійкості вдвічі менша, ніж у бульбашки однакової висоти в умовах невагомості (див. рис. 1). У загальному випадку форма бульбашки в момент порушення рівноваги, згідно дослідних даних [6] і наслідків числового розв'язку, мало відрізняється від сферичної, на підставі цього можна прийняти максимальну рівноважну висоту приблизно рівною відривному діаметру. Тоді, використовуючи (7), отримаємо формулу для відривного діаметра бульбашки d_e , тобто діаметра кулі з об'ємом V_e рівним $V_{\max}$:

$$d_e \approx \sqrt{6l} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (9)$$

Отримані результати надійно погоджуються з узагальненою залежністю $V_{\max}$ від θ за даними розв'язку на ЕОМ. З цих же даних слідує, що при $\theta < 70^\circ$ для $\bar{h}^*$ з похибкою, що не перевищує 5%, виконується співвідношення

$$\bar{h}^* \approx \sqrt{6} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Таким чином, припущення, що $h^* \approx d_e$, допустиме. Співвідношення (9) і формула (1) дають дуже близькі числові значення d_e , які погоджуються з результатами досліджень, але на відміну від напівемпіричної формули Фрітца (екстрапольованій на область $\theta < 60^\circ$, для якої немає розрахунків в [3]) співвідношення (9) виведене аналітичним шляхом.

Висновок. На підставі дослідних даних [1, 6, 7] і числових методів розв'язку диференціальних рівнянь виявлено, що у момент відриву парової бульбашки від твердої поверхні, її форма незначно відрізняється від сферичної форми.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кулінченко В.Р., Зав'ялов В.Л., Мотуз І.К. Ріст парової фази на тепловіддавальній поверхні// Харчова промисловість.– 2007, №5.– С. 56–61.
2. Bashforth F., Adams J.C. An attempt to test the theories of capillary action// Univ. Press, 1883.– 37 p.
3. Fritz W. Berechnung des Maximal Volumens von Dampfblasen.– Phys. Z. 1935, V.36, N11.– S. 379–384.
4. Беляев М.А., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости.– М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1968.– 215 с.
5. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики.– М.: Наука, 1965.– 424 с.
6. Кулінченко В.Р., Зав'ялов В.Л. Ріст парової бульбашки з урахуванням нерівноважного випаровування// Наукові праці НУХТ.– 2005, №16.– С.164–166.
7. Несис Е.И. Кипение жидкостей.– М.: Наука, 1973.– 280 с.