УДК 517.98

Вікторія М. Романенко

Наближення обмежених розв'язків різницевих рівнянь на півосі розв'язками відповідних задач Коші

Досліджено питання про апроксимацію обмежених розв'язків різницевого рівняння, яке відповідає лінійному диференціальному рівнянню на півосі відносно абстрактних функцій, розв'язками відповідних задач Коші. Розглянуто випадок замкненого операторного коефіцієнта.

Ключові слова: різницеве рівняння, диференціальне рівняння, замкнений оператор, апроксимація.

Victoria N. Romanenko

Approximation of a bounded solutions of difference equations on the half-axis by solutions of the corresponding Cauchy's problems

We investigate a problem of approximation of bounded solutions for a difference equation, which is corresponding to linear differential equation on the half-axis relative to abstract functions, by solutions of the corresponding Cauchy's problems. The case of a closed operator coefficient is considered.

Key Words: difference equation, differential equation, closed operator, approximation.

Romser1@bigmir.net

Статтю представив доктор ф.-м. наук, професор, академік НАН України Перестюк М.О.

Наближення обмежених розв'язків різницевих рівнянь на півосі розв'язками відповідних задач Коші

Вступ. Нехай $\mathbf{B}$ – комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$; I – одиничний оператор в $\mathbf{B}$; $L(B)$ – клас усіх лінійних неперервних операторів в $\mathbf{B}$, $A: D(A) \subset \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ – замкнений оператор. В роботі [1] показано, що умова $\sigma(A) \cap [-2,2] = \varnothing$ є необхідною і достатньою для того, щоб рівняння

$$x_0(n+1) + x_0(n-1) = Ax_0(n) + y(n),\ n \in \mathbf{Z}, \quad (1)$$

мало для кожної обмеженої послідовності $\{y(n): n \in \mathbf{Z}\} \subset \mathbf{B}$ єдиний обмежений розв'язок $\{x_0(n): n \in \mathbf{Z}\} \subset D(A)$. В роботах [2], [3] доведено, що за умови $\sigma(A) \cap [-2,2] = \varnothing$ для довільних $p, q \in \mathbf{N}$ і довільних $a, b \in \mathbf{B}$ крайова задача

$$\begin{cases} u(n+1) + u(n-1) = Au(n) + y(n), \\ 1 - p \le n \le q-1, \\ u(-p) = a,\ u(q) = b, \end{cases} \quad (2)$$

має єдиний розв'язок, причому існують сталі $M > 0, R > 1$, залежні лише від оператора A такі, що

$$\|x_0(-p+k) - u(-p+k)\| \le M\left(\frac{\|x_0(q) - b\|}{R^{p+q-k}} + \frac{\|x_0(-p) - a\|}{R^k}\right),\ 1 \le k \le p+q-1. \quad (3)$$

Аналогічне (1) рівняння також розглядається на півосі:

$$x(n+1) + x(n-1) = Ax(n) + y(n),\ n \ge 0. \quad (4)$$

В роботі [4] наведені необхідні і достатні умови розв'язності рівнянь на півосі з обмеженим операторним коефіцієнтом у двох ситуаціях.

По-перше, можна розглядати рівняння (4), вважаючи значення $x(-1), x(0) \in \mathbf{B}$ фіксованими (задача з початковими умовами). Тоді значення $\{x(n): n \ge 1\}$ визначаються з рівняння (4) однозначно і потрібно перевіряти обмеженість розв'язку.

По-друге, можна розглядати рівняння (4), вважаючи всі значення $\{x(n): n \ge -1\}$ невідомими (задача без початкових умов). В цьому разі потрібно додатково доводити існування розв'язку.

В обох ситуаціях для обмежених операторних коефіцієнтів з тверджень в [4] випливає необхідна й достатня умова існування та єдиності обмеженого розв'язку $\{x(n): n \ge -1\}$ рівняння (4) для довільної обмеженої послідовності $\{y(n): n \ge 0\}$ (а в першому випадку ще й для

$$\forall z \in \mathbf{C}, |z| \le 1 \;\; \exists \left(I + z^2 I - Az\right)^{-1} \in L(B).$$

При $z = 0$ ця умова завжди виконується, при інших z вона еквівалентна такій:

$$\forall z \in \mathbf{C}, |z| \ge 1 \;\; \exists \left(A - \left(z^{-1} + z\right) I\right)^{-1} \in L(B),$$

або, що те саме,

$$\sigma(A) \subset \mathbf{C} \setminus \left\{z + z^{-1} : |z| \ge 1\right\} = \varnothing,$$

де остання рівність випливає з властивостей функції Жуковського $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ (див. [5]).

Отже, для обох розглянутих випадків рівняння (4) з будь-яким обмеженим операторним коефіцієнтом не завжди має єдиний обмежений розв'язок.

У даній статті розглядається рівняння (4) за умови, що відомим є лише значення $x(-1)$ (задача з частиною початкових умов) і отримуються умови існування і єдності обмеженого розв'язку цього рівняння. Крім того, буде показано, що розв'язок цього рівняння можна наблизити розв'язками крайових задач і справджується аналог оцінки (3).

Аналогічні результати отримані для рівнянь старших порядків.

Існування та апроксимація обмеженого розв'язку.

В першій теоремі наведемо достатні умови існування і єдиності розв'язку рівняння (4) з заданим значенням $x(-1)$.

Позначимо $S := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$.

Теорема 1. Нехай $\sigma(A) \cap S = \varnothing$. Тоді для довільної обмеженої послідовності $\{y(n) : n \ge 0\}$ і для довільного значення $c \in \mathbf{B}$ існує єдиний обмежений розв'язок рівняння (4) $\{x(n) : n \ge -1\}$ такий, що $x(-1) = c$.

Доведення. Розглянемо для кожного $q \ge 2$ крайову задачу

$$\begin{cases} u_q(n+1) + u_q(n-1) = Au_q(n) + y(n), \\ 0 \le n \le q-1, \\ u_q(-1) = c, \;\; u_q(q) = \bar{0}. \end{cases}$$

Вона є частинним випадком задачі (2), тому має єдиний розв'язок $\{u_q(n) : -1 \le n \le q\}$, причому цей розв'язок задовольняє нерівності (3), тобто

$$\left\|x_0(n) - u_q(n)\right\| \le M\left(\frac{\left\|x_0(q)\right\|}{R^{q-n}} + \frac{\left\|x_0(-1) - c\right\|}{R^{n+1}}\right),$$
$$0 \le n \le q-1.$$

З цих нерівностей і обмеженості розв'язку x_0 випливає, що всі розв'язки крайових задач рівномірно обмежені:

$$\exists L > 0 \; \forall q \in \mathbf{N} \; \forall n \in \mathbf{Z}, \; 0 \le n \le q-1 : \left\|u_q(n)\right\| \le L,$$

де стала L залежить від оператора A, елемента $c \in \mathbf{B}$ і послідовності $y := \{y(n) : n \ge 0\}$.

Тоді для довільних $q, r \in \mathbf{N}, q < r$, набір $\{w_{qr}(n) = u_q(n) - u_r(n) : -1 \le n \le q\}$ є розв'язком крайової задачі

$$\begin{cases} w_{qr}(n+1) + w_{qr}(n-1) = Aw_{qr}(n), \; 0 \le n \le q-1, \\ w_{qr}(-1) = \bar{0}, \; w_{qr}(q) = -u_r(q). \end{cases}$$

Ця задача теж є частинним випадком (2), тому для неї правильні оцінки (3), де обмежений на осі розв'язок є нульовим:

$$\left\|w_{qr}(n)\right\| \le \frac{M\left\|u_r(q)\right\|}{R^{q-n}} \le \frac{ML}{R^{q-n}}, \; 0 \le n \le q-1.$$

Зафіксуємо тепер $n \ge 0$. Тоді остання нерівність гарантує, що послідовність $\{u_q(n) : q \ge n+1\}$ є фундаментальною в $\mathbf{B}$, а тому збігається до деякого елемента $x(n)$, причому

$$\left\|u_q(n) - x(n)\right\| \le \frac{ML}{R^{q-n}}, \; q \ge n+1.$$

Покажемо, що отримана послідовність $\{x(n) : n \ge -1\}$ є розв'язком задачі (4), якщо вважати, що $x(-1) = c$. Дійсно, при довільному $n \ge 0$ правильна рівність

$$u_q(n+1) + u_q(n-1) = Au_q(n) + y(n), \;\; q \ge n+1.$$

Перший, другий та четвертий члени рівності мають границю при $q \to \infty$, тому її має і третій член. За означенням замкненого оператора $x(n) \in D(A)$ і права частина прямує до $Ax(n) + y(n)$. Отже, маємо рівність (4).

Покажемо, що знайдений розв'язок єдиний. Дійсно, якщо припустити, що існує інший обмежений розв'язок (4) $\{z(n) : n \ge -1\}$ такий, що $z(-1) = c$, то для кожного $q \in \mathbf{N}$ різниця

$\{w(n)=z(n)-x(n):-1\le n\le q\}$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} w(n+1)+w(n-1)=Aw(n),\ 0\le n\le q-1,\\ w(-1)=\bar{0},\ w(q)=z(q)-x(q). \end{cases}$$

Для неї нерівності (3) мають вигляд

$$\|w(n)\|\le \frac{M\|x(q)-z(q)\|}{R^{q-n}}\le \frac{M\left(\|x\|_\infty+\|z\|_\infty\right)}{R^{q-n}},\ q\ge n+1.$$

Але спрямувавши тут $q\to\infty$, отримаємо $w(n)=0$. Враховуючи довільність n, отримуємо суперечність з припущенням про існування іншого розв'язку.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Нехай $\sigma(A)\cap S=\varnothing$ і $\{x(n):n\ge -1\}$ – розв'язок рівняння (4). Тоді для кожних $a,b\in\mathbf{B}$ і кожного $q\in\mathbf{N}$ єдиний розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases} u(n+1)+u(n-1)=Au(n)+y(n),\ 0\le n\le q-1,\\ u(-1)=a,\ u(q)=b, \end{cases}$$

задовольняє нерівності

$$\|x(n)-u(n)\|\le M\left(\frac{\|x(q)-b\|}{R^{q-n}}+\frac{\|x(-1)-a\|}{R^{n+1}}\right),\ 0\le n\le q-1.$$

Доведення. За умов теореми різниця $\{w_q(n)=u(n)-x(n):-1\le n\le q\}$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} w_q(n+1)+w_q(n-1)=Aw_q(n),\ 0\le n\le q-1,\\ w_q(-1)=a-x(-1),\ w_q(q)=b-x(q). \end{cases}$$

Ця задача є частинним випадком задачі (2). Записавши для цієї задачі нерівності (3), отримаємо

$$\|w_q(n)\|\le M\left(\frac{\|b-x(q)\|}{R^{q-n}}+\frac{\|a-x(-1)\|}{R^{n+1}}\right),\ 0\le n\le q-1.$$

Підставивши означення w_q, отримаємо потрібні нерівності.

Теорему 2 доведено.

Існування та апроксимація обмеженого розв'язку для рівнянь довільного порядку.

Розглянемо рівняння на півосі, яке є узагальненням рівняння (4):

$$\Delta^{(m)}x(n)+A_1\Delta^{(m-1)}x(n)+\ldots+A_{m-1}\Delta^{(1)}x(n)= \\ =Ax(n)+y(n),\ n\ge 0, \tag{5}$$

де $\{A_1,\ldots A_{m-1}\}\subset L(B)$,

$$\Delta^{(1)}x(n):=x(n+1)-x(n-1),$$
$$\Delta^{(k+1)}x(n):=\Delta^{(k)}x(n+1)-\Delta^{(k)}x(n-1),\ k\ge 1,$$

$\{y(n):n\ge 0\}$ – відома обмежена послідовність, $\{x(n):n\ge -m\}$ – шукана послідовність, що задовольняє початкові умови

$$x(-1)=c_0,\ \Delta^{(1)}x(-1)=c_1,\ \Delta^{(2)}x(-1)=c_2,\\ \ldots,\Delta^{(m-1)}x(-1)=c_{m-1}, \tag{6}$$

де $\{c_0,\ldots,c_{m-1}\}\subset\mathbf{B}$ – фіксований набір елементів.

Рівняння, аналогічне (5), на всій осі досліджувалося в роботі [3]. Там наведені умови його розв'язності та наближення крайовими задачами. Аналогічні результати отримаємо для рівняння (5).

Нехай надалі виконується

Припущення. 1. Для довільного $z\in\mathbf{C},|z|=1$, обернений оператор до оператора

$$\Phi(z):=\left(z-z^{-1}\right)^m I+A_1\left(z-z^{-1}\right)^{m-1}+\ldots\\ +A_{m-1}\left(z-z^{-1}\right)-A$$

існує та належить $L(B)$.

2. Оператори $A_1,\ldots,A_{m-1}$ попарно комутують, а також

$\forall k=\overline{1,m-1}:A_k:\mathbf{B}\to D(A),\ \ AA_k=A_kA$ на $D(A)$.

Теорема 3. Нехай виконується Припущення. Тоді для довільної обмеженої послідовності $\{y(n):n\ge 0\}$ і для довільних значень $c_0,\ldots,c_{m-1}\in\mathbf{B}$ існує єдиний обмежений розв'язок рівняння (5), який задовольняє початкову умову (6).

Доведення. Помітимо, що рівняння (5) з початковими умовами (6) еквівалентне системі

$$\begin{cases} x(n+1)-x(n-1)=v_1(n),\\ v_1(n+1)-v_1(n-1)=v_2(n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ v_{m-2}(n+1)-v_{m-2}(n-1)=v_{m-1}(n),\\ v_{m-1}(n+1)-v_{m-1}(n-1)=\\ Ax(n)-A_1v_{m-1}(n)-\ldots-A_{m-1}v_1(n)+y(n),\ n\ge 0, \end{cases}$$

з початковими умовами
$$x(-1)=c_0, v_1(-1)=c_1, v_2(-1)=c_2, \dots, v_{m-1}(-1)=c_{m-1}$$

Введемо простір $\mathbf{B}^m$ з нормою $\|(z_1,\dots,z_m)\|_m = \max_{1\le k\le m}\|z_k\|$, $(z_1,z_2,\dots,z_m)\in\mathbf{B}^m$, і визначимо послідовності $\{w(n): n\ge -1\}\subset\mathbf{B}^m$, $\{z(n): n\ge 0\}\subset\mathbf{B}^m$ і оператор $H\in L(\mathbf{B}^m)$:

$$w(n):=i^n\begin{pmatrix} x(n)\\ v_1(n)\\ \vdots\\ v_{m-1}(n)\end{pmatrix},\ z(n):=i^{n+1}\begin{pmatrix}\bar{0}\\ \vdots\\ 0\\ y(n)\end{pmatrix},$$

$$H=i\begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & 0\\ 0 & \dots & \dots & 0 & I\\ A & -A_{m-1} & \dots & A_2 & -A_1\end{pmatrix}$$

Тоді рівняння (5) з умовами (6) зводиться до рівняння
$$w(n+1)+w(n-1)=Hw(n)+z(n),\ n\ge 0, \quad (7)$$
з початковою умовою $w(-1):=-i(c_0,\dots,c_{m-1})^T$.

Оскільки, як показано в [3], враховуючи Припущення, $\sigma(H)\cap[-2,2]=\varnothing$, то за теоремою 1 рівняння (7) має єдиний розв'язок.

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. Нехай виконується Припущення і $\{x(n): n\ge -m\}$ – розв'язок рівняння (5) з початковими умовами (6). При цьому для кожних $a_0,b_0,\dots,a_{m-1},b_{m-1}\in\mathbf{B}$ і кожного $q\in\mathbf{N}$ єдиний розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases}\Delta^{(m)}u(n)+A_1\Delta^{(m-1)}u(n)+\dots+A_{m-1}\Delta^{(1)}u(n)=\\ Au(n)+y(n),\ 0\le n\le q-1,\\ u(-1)=a_0, \Delta^{(1)}u(-1)=a_1,\dots,\Delta^{(m-1)}u(-1)=a_{m-1},\\ u(q)=b_0, \Delta^{(1)}u(q)=b_1,\dots,\Delta^{(m-1)}u(q)=b_{m-1},\end{cases}$$

задовольняє нерівність

$$\max_{0\le k\le m-1}\left\|\Delta^{(k)}x(n)-\Delta^{(k)}u(n)\right\|\le$$
$$\le M\left(\frac{\max_{0\le k\le m-1}\left\|\Delta^{(k)}x(q)-b_k\right\|}{R^{q-n}}+\frac{\max_{0\le k\le m-1}\left\|\Delta^{(k)}x(-1)-a_k\right\|}{R^{n+1}}\right),$$
$$0\le n\le q-1.$$

Доведення. Існування і єдиність розв'язку цієї задачі Коші доведені в [3]. Якщо переписати її аналогічно (7), то вона матиме вигляд

$$\begin{cases} v(n+1)+v(n-1)=Hv(n)+z(n),\ 0\le n\le q-1,\\ v(-1)=(a_0,a_1,\dots,a_{m-1})^T,\ v(q)=(b_0,b_1,\dots,b_{m-1})^T.\end{cases}$$

Застосувавши до цієї задачі Коші і рівняння (7) теорему 2, отримаємо потрібну нерівність.

Теорему 4 доведено.

Висновки.

В цій роботі для рівняння (4) з одною початковою умовою отримано достатні умови існування і єдності обмеженого розв'язку. Крім того, показано, що розв'язок цього рівняння можна наблизити розв'язками крайових задач і знайдені оцінки на різницю розв'язків.

Аналогічні результати отримані для рівнянь старших порядків.

Список використаної літератури:

1. Городний М.Ф. Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1991. – 43, №1. – С. 41-46.
2. Городний М. Ф. Аппроксимация ограниченного решения одного разностного уравнения решениями соответствующих краевых задач в банаховом пространстве // Математические заметки. – 1992. – т. 51, вып. 4. – С.17 – 22.
3. Городній М.Ф. Романенко В.М. Апроксимація обмеженого розв'язку одного різницевого рівняння з необмеженим операторним коефіцієнтом розв'язками відповідних крайових задач // Укр. мат. журн.–2000.–52, №4. – С. 548-552.
4. Городній М.Ф., Лагода О.А. Обмежені розв'язки двопараметричного різницевого рівняння у банаховому просторі // Укр. математ. журнал.- 2000.- Т.52, № 12.-С.1610 – 1614.
5. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. – М., Наука. – 1969. – 576 с.

Надійшла до редколегії 03.06.2009