

УДК 539.3

Михайло А. Мартиненко,  
Ірина В. Лебедева

**Збурення напруженого стану просторового тіла конічною тріщиною**  
Серія: фізико-математичні науки

Точними методами лінійної теорії пружності розв'язано задачу про напружений стан пружного середовища з конічною тріщиною. Задачу зведено до взаємозв'язаної системи парних інтегральних рівнянь відносно функцій Лежандра, а потім – до системи інтегро-диференціальних рівнянь відносно двох функцій.

Ключові слова: пружне середовище, конічна тріщина.

\*E-mail: [Lebedevai@ukr.net](mailto:Lebedevai@ukr.net)

Mykhaylo A. Martynenko,  
Iryna V. Lebedyeva

**Disturbance of a Space Body Stressed State by a Conical Crack**  
Series: Physics & Mathematics Sciences

A problem on the stressed state of an elastic medium with a conical crack is solved by exact methods of the linear theory of elasticity. At first the problem is reduced to an interrelated system of paired integral equations with respect to the Legendre functions, and then – to a system of integral-differential equations relative to two unknown functions.

Key Words: elastic medium, conical crack.

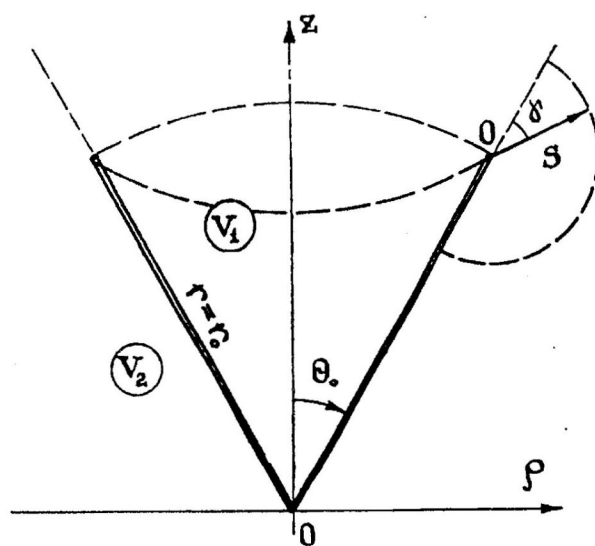


Рис.1. Конічний розріз у пружному просторі

Розрахунок на міцність будь-якої деталі конструкції з позиції статичної лінійної механіки руйнування включає три основні етапи: 1) розрахунок напружено-деформованого стану тіла з тріщиною відомої геометрії при заданому навантаженні; 2) визначення тріщиностійкості або в'язкості руйнування матеріалу; 3) вибір критерію руйнування, відповідного до системи, що розглядається. Наші подальші дослідження стосуватимуться

першого етапу, який є найбільш трудомістким та найважливішим у даному ланцюгу.

Експериментальний аналіз частин зруйнованих деталей показав, що початкові поверхні розриву суцільності матеріалу були не плоскими, а об'ємними. Зокрема, поверхні руйнування ряду матеріалів під відповідними штампами мають конічну форму. Тому в даній роботі розглядається напружено-деформований стан просторового тіла, послабленого конічним розрізом. Іншими авторами з використанням точних методів теорії пружності ця задача не розглядалася.

Розглянемо пружний простір у зовнішньому полі осесиметричних сил, послаблений розрізом по частині конічної поверхні  $S$  (рис.1). Проекції векторів переміщень та зусиль в області  $V_2$  запишемо у вигляді інтегралів Мелліна [1]

$$2Gu_z^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} [c_2(s)b_{11} + a_2(s)b_{12}] r^{-s} ds ;$$

$$2Gu_p^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} [c_2(s)b_{21} + a_2(s)b_{22}] r^{-s} ds , \quad (0 < \operatorname{Re} s < 1). \quad (1)$$

$$b_{11} = (s-1)R_{s-1} ; \quad b_{12} = \left( \frac{3m-4}{m} + s \cos^2 \vartheta \right) R_{s-1} - \sin \vartheta \cos \vartheta R_{s-1}^1 ; \quad b_{21} = R_{s-1}^1 ;$$

$$b_{22} = \cos^2 \vartheta R_{s-1} + s \sin \vartheta \cos \vartheta R_{s-1} ; \quad R_{s-1}^k = R_{s-1}^k(-\cos \vartheta). \quad (2)$$

$$F_{\vartheta z}^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} [c_2(s)d_{11} + a_2(s)d_{12}] r^{-s-1} ds ;$$

$$F_{\vartheta p}^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} [c_2(s)d_{21} + a_2(s)d_{22}] r^{-s-1} ds. \quad (3)$$

$$d_{11} = (s-1)R_{s-1}^1 ; \quad d_{12} = s(s-1) \sin \vartheta \cos \vartheta R_{s-1} + \left[ 2 \frac{m-1}{m} + (s-1) \cos^2 \vartheta \right] R_{s-1}^1 ;$$

$$d_{21} = \operatorname{ctg} \vartheta R_{s-1}^1 - s(s-1)R_{s-1} ;$$

$$d_{22} = - \left[ \frac{m-2}{m} + (s-1) \cos^2 \vartheta \right] s R_{s-1} + \operatorname{ctg} \vartheta (s \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) R_{s-1}^1. \quad (4)$$

Тут  $(L)$  – деяка пряма, яка паралельна уявній осі комплексної площини і лежить у смужці  $s_1 < \operatorname{Re} s < s_2$ ,  $c_2(s)$ ,  $a_2(s)$  – невідомі щільності,  $R_{s-1}^k = R_{s-1}^k(-\cos \vartheta)$  – функції Лежандра комплекснозначного параметра  $s$ . Ці ж компоненти в області

$V_1$  записуються у вигляді аналогічних інтегралів Мелліна, тільки необхідно щільності  $c_2(s)$ ,  $a_2(s)$  замінити на  $c_1(s)$ ,  $a_1(s)$ , а функції  $R_{s-1}^k$  замінити функціями Лежандра  $P_{s-1}^k(\cos \vartheta)$ . Відповідно до принципу суперпозиції [2] граничні умови матимуть вигляд

$$u_z^{(1)} = u_z^{(2)}; u_\rho^{(1)} = u_\rho^{(2)}; F_{gz}^{(1)} = -F_{gz}^{(2)}; F_{g\rho}^{(1)} = -F_{g\rho}^{(2)}, (r_0 < r < \infty, \vartheta = \vartheta_0). \quad (5)$$

$$F_{g\rho}^{(1)} = -F_{g\rho}^{(2)} = f_1(r); F_{gz}^{(1)} = -F_{gz}^{(2)} = f_2(r), (0 < r < r_0, \vartheta = \vartheta_0). \quad (6)$$

З граничних умов (5), (6) випливає, що  $F_{gz}^{(1)} + F_{gz}^{(2)} = 0$ ,  $F_{g\rho}^{(1)} + F_{g\rho}^{(2)} = 0$  на всьому проміжку зміни координати  $r$  ( $0 < r < \infty$ ). Ця обставина, а також властивості інтегрального перетворення Мелліна [1] дозволяють отримати наступну систему алгебраїчних рівнянь з невідомими щільностями зовнішньої та внутрішньої задач

$$\begin{aligned} c_1(s)c_{11} + a_1(s)c_{12} &= -c_2(s)d_{11} - a_2(s)d_{12}, \\ c_1(s)c_{21} + a_1(s)c_{22} &= -c_2(s)d_{21} - a_2(s)d_{22}, (\vartheta = \vartheta_0). \end{aligned} \quad (7)$$

Після розв'язання системи, наприклад, відносно  $c_2(s)$ ,  $a_2(s)$ , дістанемо

$$c_2(s) = \Delta_2^{-1}[c_1(s)e_{11} + a_1(s)e_{12}], \quad a_2(s) = \Delta_2^{-1}[c_1(s)e_{21} + a_1(s)e_{22}], \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \left[ s(s-1) - 2 \frac{m-1}{m} \right] \text{ctg} \vartheta_0 (R_{s-1}^1)^2 + s(s-1) \sin^2 \vartheta_0 \cdot R_{s-1}^1 R_{s-1} + \\ &+ s^2 (s-1)^2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 (R_{s-1})^2; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} e_{11} &= P_{s-1}^1 R_{s-1}^1 \text{ctg} \vartheta_0 \left[ s(s-1) \sin^2 \vartheta_0 - 2 \frac{m-1}{m} \right] - s(s-1) R_{s-1} P_{s-1}^1 \left( \frac{m-2}{m} + s \cos^2 \vartheta_0 \right) - \\ &- s(s-1) P_{s-1}^1 R_{s-1}^1 \left[ 2 \frac{m-1}{m} + (s-1) \cos^2 \vartheta_0 \right] - s^2 (s-1)^2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 P_{s-1} R_{s-1}; \end{aligned}$$

$$e_{12} = -\frac{2}{\pi} \frac{s \sin \pi s}{\sin \vartheta_0} \left[ 2 \frac{m-1}{m} \frac{m-2}{m} + (s-1) \cos^2 \vartheta_0 \left( s + \frac{3m-4}{m} \right) \right];$$

$$e_{21} = \frac{2}{\pi} \frac{s(s-1)^2}{\sin \vartheta_0} \sin \pi s; \quad P_{s-1}^k = P_{s-1}^k(\cos \vartheta_0); \quad R_{s-1}^k = R_{s-1}^k(-\cos \vartheta_0).$$

Вирази для  $e_{22}$  можна отримати з  $e_{11}$  шляхом заміни функцій  $P_{s-1}$ ,  $R_{s-1}$ ,  $P_{s-1}^1$ .

$R_{s-1}^1$  відповідно функціями  $(-R_{s-1})$ ,  $(-P_{s-1})$ ,  $R_{s-1}^1$ ,  $P_{s-1}^1$ .

При розв'язанні системи (8) було використано рекурентні формули для функцій Лежандра [3.4], а також наступні рівності [3]

$$R_s(-\cos \vartheta_0) = P_s(\cos \vartheta_0) \cos \pi s - \frac{2}{\pi} Q_s(\cos \vartheta_0) \sin \pi s; \quad (10)$$

$$P_{s-1}^1(\cos \vartheta_0) R_{s-1}(-\cos \vartheta_0) + P_{s-1}(\cos \vartheta_0) R_{s-1}^1(-\cos \vartheta_0) = \frac{2 \sin \pi s}{\pi \sin \vartheta_0}.$$

Розв'язок системи (7) відносно  $c_1(s)$ ,  $a_1(s)$  має вигляд

$$c_1(s) = \Delta_1^{-1} [c_2(s)g_{11} + a_2(s)g_{12}], \quad a_1(s) = \Delta_1^{-1} [c_2(s)g_{21} + a_2(s)g_{22}], \quad (11)$$

де  $\Delta_1$  утворюється з визначника  $\Delta_2$  заміною функцій  $R_{s-1}$ ,  $R_{s-1}^1$  відповідно функціями  $(-P_{s-1})$ ,  $P_{s-1}^1$ , а решта виразів в (11) дорівнюють

$$g_{22} = e_{11}; g_{11} = e_{22}; g_{12} = -e_{12}; g_{21} = -e_{21}. \quad (12)$$

Таким чином, якщо скористатися рівностями (8) або (11), то наступний розгляд задачі зводиться до визначення двох невідомих функцій  $c_1(s)$ ,  $a_1(s)$  або  $c_2(s)$ ,  $a_2(s)$ . Незалежно від того, відносно якої пари функцій буде виконуватись наступне дослідження, остаточна розв'язальна система інтегральних рівнянь буде одна й та ж сама. Однак, при визначенні полів переміщень та напружень як в областях  $V_k$ , так і в  $\varepsilon$ -околі граничного кола кінчного розрізу, необхідно буде переходити від однієї пари функцій до іншої згідно з рівностями (8) і (12).

Підставляючи (11) у вирази

$$2Gu_z^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} [c_1(s)a_{11} + a_1(s)a_{12}] r^{-s-1} ds, \quad 2Gu_\rho^{(1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} [c_1(s)a_{21} + a_1(s)a_{22}] r^{-s-1} ds$$

і задовольняючи решту граничних умов (6), (7), приходимо до наступної взаємозв'язаної системи парних інтегральних рівнянь, що містять перетворення Мелліна відносно двох невідомих щільностей  $a_2(s)$ ,  $c_2(s)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} [c_2(s)d_{11} + a_2(s)d_{12}] r^{-s-1} ds &= -f_2(r); \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} [c_2(s)d_{21} + a_2(s)d_{22}] r^{-s-1} ds &= -f_1(r), \quad (0 < r < r_0); \\ \int_{(L)} \Delta_1^{-1} \sin \pi s [c_2(s)u_{11} + a_2(s)u_{12}] r^{-s} ds &= 0; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\int_{(L)} \Delta_1^{-1} s \sin \pi s [c_2(s)u_{21} + a_2(s)u_{22}] r^{-s} ds = 0, \quad (r > r_0),$$

де

$$\begin{aligned} u_{11} &= -(s-1)[s(s-1)P_{s-1} + ctg \vartheta_0 P_{s-1}^1]; u_{21} = (s-1)P_{s-1}^1; \\ u_{12} &= ctg \vartheta_0 P_{s-1}^1 \left( s^2 \sin^2 \vartheta_0 - s - \frac{3m-4}{m} \right) - s(s-1)P_{s-1} \left( s \cos^2 \vartheta_0 + 2 \frac{m-1}{m} \right); \\ u_{22} &= s(s-1) \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 P_{s-1} + \left( s \cos^2 \vartheta_0 + \frac{m-2}{m} \right) P_{s-1}^1; P_{s-1}^k = P_{s-1}^k(\cos \vartheta_0). \end{aligned} \quad (14)$$

Розв'язок системи (13) шукаємо у вигляді

$$\Delta_1^{-1} \sin \pi s [c_2(s)u_{11} + a_2(s)u_{12}] = I_1, \quad \Delta_1^{-1} s \sin \pi s [c_2(s)u_{21} + a_2(s)u_{22}] = I_2, \quad (15)$$

де

$$I_1 = \frac{1}{2} \pi^{1.5} \sin \vartheta_0 \frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma(s/2+1/2)} \int_0^{r_0} \varphi(t) t^s dt, \quad I_2 = \frac{1}{2} \pi^{1.5} \sin \vartheta_0 \frac{\Gamma(s/2+1/2)}{\Gamma(s/2+1)} \int_0^{r_0} \psi(t) t^s dt. \quad (16)$$

Невідомі функції  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  та їхні перші похідні вважаються неперервними при  $0 \leq t \leq r_0$ . Розв'язок у формі (16) задовольняє обидва останніх рівняння системи (13) тотожно. У цьому легко переконатися, якщо підставити (16) у останні два рівняння (13), змінити порядок інтегрування по змінних  $s$  і  $t$ , а потім скористатися інтегралами

$$\begin{aligned} \frac{1}{4i\sqrt{\pi}} \int_{(L)} \frac{\Gamma(1/2+s/2)}{\Gamma(1+s/2)} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-s} ds &= \frac{rH(r_0-r)}{\sqrt{r_0^2-r^2}}, \quad (\operatorname{Re} s > -1), \\ r^{-s} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1-s/2)}{\Gamma(1/2-s/2)} \int_0^r \frac{x^{-s} dx}{\sqrt{r^2-x^2}}, \quad (\operatorname{Re} s < 1), \end{aligned} \quad (17)$$

де  $H(r_0-r)$  -- функція Хевісайда.

Розв'язуючи систему рівнянь (15) відносно невідомих  $c_2(s)$ ,  $a_2(s)$ , дістанемо наступні вирази

$$\begin{aligned} a_2(s) &= (c \sin \pi s)^{-1} \{ s P_{s-1}^1 I_1 + [s(s-1)P_{s-1} + ctg \vartheta_0 P_{s-1}^1] I_2 \}, \\ c_2(s) &= [s(s-1) \sin \pi s]^{-1} \left\{ -s \left[ s(s-1) \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 P_{s-1} + \left( s \cos^2 \vartheta_0 + \frac{m-2}{m} \right) P_{s-1}^1 \right] I_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \left( s^2 \sin \vartheta_0 - s - \frac{3m-4}{m} \right) ctg \vartheta_0 P_{s-1}^1 - \left( 2 \frac{m-1}{m} + s \cos^2 \vartheta_0 \right) s(s-1) P_{s-1} \right] I_2 \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Після підстановки виразів (18) у перші два рівняння системи (13) дістанемо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} [s \sin \pi s]^{-1} (\alpha_{11} I_1 + \alpha_{12} I_2) r^{-s-1} ds = -f_1(r), \quad (19)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} [s(s-1) \sin \pi s]^{-1} (\alpha_{21} I_1 + \alpha_{22} I_2) r^{-s-1} ds = -f_2(r), \quad (r < r_0, 0 < \operatorname{Re} s < 1),$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= s(s-1) \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 (R_{s-1} P_{s-1}^1 - P_{s-1} R_{s-1}^1) + \sin^2 \vartheta_0 R_{s-1}^1 P_{s-1}^1, \\ \alpha_{12} &= \operatorname{ctg} \vartheta_0 R_{s-1}^1 P_{s-1}^1 \left[ (s^2 - s + 1) \sin^2 \vartheta_0 - 2 \frac{m-1}{m} \right] + s(s-1) \cos^2 \vartheta_0 (R_{s-1} P_{s-1}^1 - P_{s-1} R_{s-1}^1) + \\ &\quad + s^2 (s-1)^2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 R_{s-1} P_{s-1}, \quad \alpha_{21} = s \alpha_{12}, \\ \alpha_{22} &= \operatorname{ctg}^2 \vartheta_0 R_{s-1}^1 P_{s-1}^1 \left[ (2s^2 - 2s + 1) \sin^2 \vartheta_0 - 4 \frac{m-1}{m} \right] + s^2 (s-1)^2 (\cos^2 \vartheta_0 + 1) R_{s-1} P_{s-1} + \\ &\quad + s(s-1) \operatorname{ctg} \vartheta_0 (R_{s-1} P_{s-1}^1 - P_{s-1} R_{s-1}^1) \left[ 2 \frac{m-1}{m} - s(s-1) \sin^2 \vartheta_0 + \cos^2 \vartheta_0 \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Наступні перетворення системи рівнянь (19) основані на використанні інтегральних представлень (17), а також наступних залежностей

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(3/2 - s/2) \Gamma(s/2)}{\Gamma(1 - s/2) \Gamma(1/2 + s/2)} &= \frac{1-s}{\pi} \frac{\sin \pi s}{[P_{s-1}^1(0)]^2}, \quad \frac{\Gamma(s/2) \Gamma(1 - s/2)}{\Gamma(1/2 + s/2) \Gamma(1/2 - s/2)} = \operatorname{ctg} \frac{\pi s}{2}, \\ \frac{\Gamma(1 - s/2) \Gamma(1/2 + s/2)}{\Gamma(1/2 - s/2) \Gamma(1 + s/2)} &= \frac{\sin \pi s}{\pi s [P_{s-1}(0)]^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Ці рівності отримано на основі співвідношень [13]

$$P_s^\nu(0) = \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}} \cos \left[ \frac{\pi}{2} (s + \nu) \right] \Gamma \left( \frac{1}{2} + \frac{s}{2} + \frac{\nu}{2} \right) \left[ \Gamma \left( 1 + \frac{s}{2} - \frac{\nu}{2} \right) \right]^{-1}, \quad \Gamma \left( \frac{1}{2} + s \right) \Gamma \left( \frac{1}{2} - s \right) = \frac{\pi}{\cos \pi s}.$$

Після підстановки (16) у (19) з використанням інтегральних представлень (17) та зміни порядку інтегрування, дістанемо наступні рівняння Абеля

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \left\{ \int_0^{r_0} [\varphi(t) L_{11}(t, x) + \psi(t) L_{12}(t, x)] dt \right\} &= -r^2 f_1(r), \\ \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \left\{ \int_0^{r_0} [\varphi(t) L_{21}(t, x) + \psi(t) L_{22}(t, x)] dt \right\} &= -r f_2(r), \end{aligned} \quad (22)$$



$$\begin{aligned} \text{де } L_{11} &= \frac{\sin \vartheta_0}{2i} \int_{(L)} \frac{x \alpha_{11}}{s \sin \pi s} \frac{\Gamma(3/2 - s/2) \Gamma(s/2)}{\Gamma(1 - s/2) \Gamma(1 + s/2)} \left(\frac{x}{t}\right)^{-s} ds, \\ L_{12} &= \frac{\sin \vartheta_0}{2i} \int_{(L)} \frac{x \alpha_{12}}{s \sin \pi s} \frac{\Gamma(3/2 - s/2) \Gamma(1/2 + s/2)}{\Gamma(1 - s/2) \Gamma(1 + s/2)} \left(\frac{x}{t}\right)^{-s} ds, \\ L_{21} &= \frac{\sin \vartheta_0}{2i} \int_{(L)} \frac{\alpha_{21} [s(s-1)]^{-1}}{\sin \pi s} \frac{\Gamma(1 - s/2) \Gamma(s/2)}{\Gamma(1/2 - s/2) \Gamma(1/2 + s/2)} \left(\frac{x}{t}\right)^{-s} ds, \\ L_{22} &= \frac{\sin \vartheta_0}{2i} \int_{(L)} \frac{\alpha_{22} [s(s-1)]^{-1}}{\sin \pi s} \frac{\Gamma(1 - s/2) \Gamma(1/2 + s/2)}{\Gamma(1/2 - s/2) \Gamma(1/2 + s/2)} \left(\frac{x}{t}\right)^{-s} ds. \end{aligned} \quad (23)$$

Та властивість, що при  $s = 0,5 + i\tau$  функції  $P_{s-1}^k(\cos \vartheta_0)$ ,  $R_{s-1}^k(\cos \vartheta_0)$  є парними та дійсними відносно аргумента  $\tau$  [5] дозволяє перейти від комплексних інтегралів для  $L_{ij}(t, x)$  (23) до дійсних інтегралів по змінній  $\tau$ . Покладаючи в (23)  $s = 0,5 + i\tau$  та враховуючи, що інтеграли від непарних функцій у симетричних межах дорівнюють нулю, для  $L_{ij}(t, x)$  дістанемо наступні представлення

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{\sqrt{tx}}{\pi} \int_0^\infty \alpha_{11}' \left[ \frac{1}{2} \cos\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) + \tau \sin\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) \right] d\tau, \\ L_{12} &= \sqrt{tx} \int_0^\infty \alpha_{12}' \left\{ \left( \frac{1}{8} - \frac{3}{2} \tau^2 \right) \left[ \cos\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) - sh \pi \tau \sin\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \tau \left( \tau^2 - \frac{3}{4} \right) \left[ \sin\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) + sh \pi \tau \cos\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) \right] \right\} d\tau, \\ L_{21} &= \sqrt{tx} \int_0^\infty \alpha_{21}' \left[ \left( \tau - \frac{1}{2} sh \pi \tau \right) \sin\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) - \left( \frac{1}{2} + \tau sh \pi \tau \right) \cos\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) \right] d\tau, \\ L_{22} &= -\frac{\sqrt{tx}}{\pi} \int_0^\infty \alpha_{22}' \left[ \frac{1}{2} \cos\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) + \tau \sin\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{де } \alpha_{11}' &= \frac{\alpha_{11} \sin \vartheta_0}{[P_{-0,5+i\tau}^1(0)]^2}, \quad \alpha_{12}' = \frac{\alpha_{12} \sin \vartheta_0}{ch^2 \pi \tau (\tau^2 + 1/4)^2}, \quad \alpha_{21}' = \frac{\alpha_{21} \sin \vartheta_0}{ch^2 \pi \tau (\tau^2 + 1/4)}, \\ \alpha_{22}' &= \frac{\alpha_{22} \sin \vartheta_0}{(\tau^2 + 1/4)^2 [P_{-0,5+i\tau}^2(0)]^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Зазначимо, що у рівностях (24)  $\alpha'_{ij}$  визначаються формулами (19), в яких необхідно покласти  $s = 0,5 + i\tau$ .

Дослідимо асимптотичну поведінку підінтегральних виразів (24) при достатньо великих  $\tau$ , а також їх особливі точки на скінченному інтервалі  $[0; \tau_0]$ . З властивостей функцій конуса випливає, що інтеграли (24) існують на довільному скінченному інтервалі. Для дослідження збіжності інтегралів при  $\tau \gg 1$  скористаємось асимптотичними формулами вигляду

$$P_{-0,5+i\tau}^1(\cos \vartheta) \approx \frac{e^{i\vartheta} \sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi} \sin \vartheta} \left[ 1 - \frac{3t}{8\tau} - \frac{8+15t^2}{2^7 \tau^2} - \frac{3t(32+35t^2)}{2^{10} \tau^3} - \frac{4725t^4 + 6000t^2 + 1216}{2^{15} \tau^4} + O(\tau^{-5}) \right].$$

Легко показати, що при  $\tau \gg 1$

$$\alpha'_{11} \approx 1 + 3t_0^2/8\tau^2 = \bar{\alpha}'_{11}, \quad \alpha'_{12} \approx 4ae^{-\pi\tau} \tau^{-3} = \bar{\alpha}'_{12}, \quad \alpha'_{21} \approx 4ae^{-\pi\tau} \tau^{-1} = \bar{\alpha}'_{21},$$

$$\alpha'_{22} \approx 1 + b\tau^{-2} = \bar{\alpha}'_{22}, \quad t = ctg \vartheta, \quad t_0 = ctg \vartheta_0, \quad a = -\frac{m-4}{4\pi m} t_0, \quad b = \frac{3m+16}{8m} t_0^2. \quad (26)$$

Додаючи та віднімаючи під знаками інтегралів (24) асимптотичні доданки (26) і використовуючи наступні інтеграли

$$\int_0^\infty \cos\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) d\tau = \pi \delta\left(\ln \frac{t}{x}\right) = \pi t \delta(t-x), \quad \int_0^\infty \tau^{-1} \sin\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) d\tau = \pi/2 \operatorname{sgn}(t-x),$$

$$\int_0^\infty \tau \sin\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) d\tau = -\pi \delta'_{\ln t}(\ln t - \ln x) = -\pi/2 t \delta(t-x) - \pi^{3/2} x^{1/2} \delta'_t(t-x),$$

дістанемо такі вирази для  $L_{ij}(t, x)$

$$L_{11}(t, x) = \sqrt{tx} \left[ \frac{1}{2} \delta\left(\ln \frac{t}{x}\right) - \delta'_{\ln t}\left(\ln \frac{t}{x}\right) \right] + K_{11}(t, x),$$

$$L_{12}(t, x) = -2a\pi \sqrt{tx} \delta\left(\ln \frac{t}{x}\right) + K_{12}(t, x) \quad (27)$$

$$L_{21}(t, x) = -2a\pi \sqrt{tx} \delta\left(\ln \frac{t}{x}\right) - K_{21}(t, x),$$

$$L_{22} = \sqrt{tx} \left[ \delta'_{\ln t}\left(\ln \frac{t}{x}\right) - \frac{1}{2} \delta\left(\ln \frac{t}{x}\right) \right] - K_{22},$$

де регулярні доданки  $K_{ij}(t, x)$  знаходяться з невласних інтегралів



$$\begin{aligned}
 K_{11}(t, x) &= \frac{3}{16} t_0^2 \sqrt{tx} \operatorname{sgn}(t-x) + \frac{\sqrt{tx}}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ (\alpha'_{11} - 1) \cos\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) + 2 \left( \alpha'_{11} - 1 - \frac{3t_0^2}{8\tau^2} \right) \tau \sin\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) \right\} d\tau, \\
 K_{12}(t, x) &= -3 \frac{m-4}{8m} t_0 \sqrt{tx} \operatorname{sgn}(t-x) + \\
 &\quad + \sqrt{tx} \int_0^\infty \left( \alpha'_{12} \tau^3 \operatorname{sh} \pi \tau + \frac{m-4}{2\pi m} t_0 \right) \left[ \frac{3}{2\tau} \sin\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) - \cos\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) \right] d\tau - \\
 &\quad - \sqrt{tx} \int_0^\infty \alpha'_{12} \tau^3 \operatorname{sh} \pi \tau \left[ \left( 1 - \frac{3}{4\tau^2} + \frac{\operatorname{sh} \pi \tau}{8\tau^3} \right) \sin\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) + \left( \frac{3}{2\tau} - \frac{3}{4\tau^2} \operatorname{sh} \pi \tau - \frac{1}{8\tau^3} \right) \cos\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) \right] d\tau, \\
 K_{21}(t, x) &= -\frac{m-4}{8m} t_0 \sqrt{tx} \operatorname{sgn}(t-x) + \\
 &\quad + \sqrt{tx} \int_0^\infty \left( \alpha'_{21} \operatorname{sh} \pi \tau + \frac{m-4}{2\pi m} t_0 \right) \left[ \cos\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) + \frac{1}{2\tau} \sin\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) \right] d\tau - \\
 &\quad - \sqrt{tx} \int_0^\infty \alpha'_{21} \left[ \tau \sin\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) \right] d\tau, \\
 K_{22}(t, x) &= \frac{1}{2} b \sqrt{tx} \operatorname{sgn}(t-x) + \frac{\sqrt{tx}}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ (\alpha'_{22} - 1) \cos\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) + 2 \left( \alpha'_{22} - 1 - \frac{b}{\tau^2} \right) \tau \sin\left(\tau \ln \frac{t}{x}\right) \right\} d\tau.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Розглядаючи (22) як інтегральне рівняння Абеля відносно виразів у фігурних дужках, дістанемо наступну систему взаємозв'язаних інтегро-диференціальних рівнянь відносно функцій  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$

$$x(x^2\varphi)' + \frac{m-4}{2m} t_0 x^2 \psi(x) + \int_0^{t_0} [\varphi(t) K_{11}(t, x) + \psi(t) K_{12}(t, x)] dt = F_2(x), \tag{29}$$

$$x(x^2\psi)' - \frac{m-4}{2m} t_0 x^2 \varphi(x) + \int_0^{t_0} [\varphi(t) K_{21}(t, x) + \psi(t) K_{22}(t, x)] dt = F_1(x)$$

$$F_1(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u^3 f_1(u) du}{\sqrt{x^2 - u^2}}, \quad F_2(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u^2 f_2(u) du}{\sqrt{x^2 - u^2}}.$$

При чисельному розв'язанні системи (29) зручно ввести заміни  $x^2\varphi = \bar{\varphi}$ ,  $x^2\psi = \bar{\psi}$ .

Чисельний розв'язок системи інтегро-диференціальних рівнянь (29) можна провести одним із методів, достатньо висвітлених, наприклад, у [6, 7]. Знайдені допоміжні функції  $\varphi(t)$  та  $\psi(t)$  дозволяють дослідити напружений і деформований стан у довільній точці областей  $V_1$  і  $V_2$ . Для цього достатньо у

формули (1) і (2) замість коефіцієнтів  $a_2(s)$ ,  $c_2(s)$  підставити їхні вирази через інтегральні оператори  $I_n^{(1)}, I_n^{(2)}$  (18), а потім виконати відповідні обчислення. В точках, розташованих на деякій відстані від граничного кола кінчного розрізу чисельне підсумовування дає достатню точність та гладкість результатів і відображає реальну картину напружено-деформованого стану в тілі. При підході до кінчного розрізу обчислення, наприклад, полів напружень прямим інтегруванням стає складним, а в безпосередній близькості до розрізу – неможливим, оскільки значення інтегралів при  $s \rightarrow 0$  ( $s$  – найкоротша відстань від точки граничного кола кінчного розрізу) прямують до нескінченності.

Дослідження полів напружень і деформацій в околі граничного кола розрізу є досить складною, але необхідною задачею. Потрібно також знайти формули для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень, величини розкриття тріщини та інших характеристик механіки руйнування. Це буде зроблено у наступних повідомленнях.

#### Література

1. Улитко А.Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости. – Киев: Академперіодика, 2002. – 341 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1974. – Т.1. – 294 с.
4. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М. – Л.: Физматгиз, 1963. – 358 с.
5. Справочник по специальным функциям / Под ред. М.Абрамовица, И.Стигана. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
6. Мартиненко М.А., Лебедева І.В. Осесиметрична задача для пружного середовища зі сферичним включенням, послабленого тріщиною на міжфазовій межі // Вісник Київськ.ун-ту. Сер.:фіз.-мат. науки. – 2002. - №4.. С. 102-111.
7. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. - Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с.

Надійшло до редакції 29.10.2003р.