

М.А. Мартыненко

Киевский госуниверситет

К ИССЛЕДОВАНИЮ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА,
ОСЛАБЛЕННОГО ПАРАБОЛОИДАЛЬНЫМ РАЗРЕЗОМ

Задача о равновесии упругого пространства, ослабленного параболоидальным разрезом, рассматривалась в работе [1]. В ней показано, что с помощью метода парных уравнений задача сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода с неособыми, ограниченными ядрами. На основании результатов работ [1, 2] ниже представлены формулы для расчета локального поля напряжений у вершины параболоидального разреза, найдены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений, а также выведено условие, определяющее начальное направление распространения трещины.

Для определения напряжений в произвольной точке рассматриваемой области необходимо воспользоваться формулами для усилий на площадках с нормалью $\bar{n} = \bar{e}_\xi$ [1] и аналогичными формулами для усилий на площадках с нормалью $\bar{n} = \bar{e}_\eta$:

$$\begin{aligned} hR/\bar{n}=\bar{e}_\eta &= 2 \frac{m-1}{m} (\theta\xi - \omega\eta) - \frac{\partial u_z(\xi, \eta)}{\partial \xi} - \frac{u_r(\xi, \eta)}{\eta}, \\ hZ/\bar{n}=\bar{e}_\eta &= -2 \frac{m-1}{m} (\theta\eta + \omega\xi) + \frac{\partial u_r(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{u_r(\xi, \eta)}{\xi}. \end{aligned} \quad (1)$$

При этом напряжения в параболоидальных координатах вычисляются по формулам

$$\sigma_{\xi\xi} = R/\bar{n}=\bar{e}_\xi \cos\alpha + Z/\bar{n}=\bar{e}_\eta \sin\alpha, \quad (2)$$

$$\sigma_{\xi\eta} = R/\bar{n}=\bar{e}_\xi \sin\alpha - Z/\bar{n}=\bar{e}_\eta \cos\alpha,$$

$$\sigma_{\eta\eta} = R/\bar{n}=\bar{e}_\eta \sin\alpha - Z/\bar{n}=\bar{e}_\xi \cos\alpha,$$

где

$$\cos\alpha = \eta/h; \quad \sin\alpha = \xi/h; \quad h = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Заметим, что при вычислении напряжений во внутренних по отношению к поверхности разреза $\xi = \xi_0$ точках области решения для перемещений

u_r, u_z и функций ω, θ выражаются через модифицированные функции Бесселя I_0, I_1 , а для внешней области соответственно — через функции Макдональда K_0, K_1 .

Неизвестные плотности внешней задачи выражаются через вспомогательные функции следующим образом:

$$\delta'(\tau) = [I_1(\tau\xi_0) - \tau\xi_0 I_0(\tau\xi_0)] \int_0^{\eta_0} \psi(t) \cos \tau t dt - \tau\xi_0 I_1(\tau\xi_0) \int_0^{\eta_0} \psi(t) \sin \tau t dt,$$

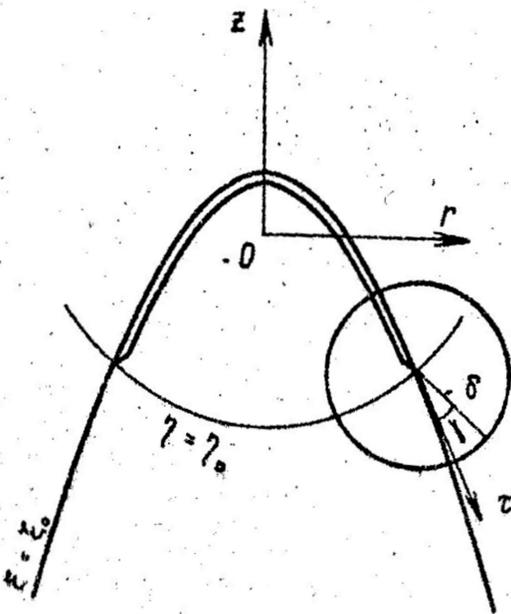
$$\tau\gamma(\tau, \xi_0) = [(\tau\xi_0)^2 I_1(\tau\xi_0) - \tau\xi_0 I_0(\tau\xi_0) + 2 \frac{m-1}{m} I_1(\tau\xi_0)] \int_0^{\eta_0} \psi(t) \cos \tau t dt \quad (3)$$

$$\times dt + (\tau\xi_0)^2 I_0(\tau\xi_0) \int_0^{\eta_0} \psi(t) \sin \tau t dt.$$

Следует отметить, что функция $\psi(t)$ должна удовлетворять такому интегральному условию:

$$\int_0^{\eta_0} \psi(t) dt = 0. \quad (4)$$

Формулы (2) позволяют определять поле напряжений в любой точке упругого пространства, но сингулярность напряжений наблюдается только в окрестности края трещины. Поэтому для исследования напряженного состояния у вершины параболического разреза введем в меридиональном сечении локальную полярную систему координат ρ, γ , как показано на рисунке.



Тогда в окрестности устья разреза связь между параболическими и полярными координатами можно представить приближенными зависимостями

$$\xi - \xi_0 \approx \frac{\rho \sin \gamma}{h}; \quad (5)$$

$$\eta - \eta_0 \approx \frac{\rho \cos \gamma}{h}.$$

Для вычисления компонент тензора напряжений (2) вблизи вершины разреза необходимо воспользоваться асимптотическими значениями функции

Бесселя и Макдональда для больших значений аргумента [3]

$$I_n(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 - \frac{4n^2 - 1^2}{1! 8x} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2! (8x)^2} - \dots \right], \quad (6)$$

$$K_n(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + \frac{4n^2 - 1^2}{1! 8x} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2! (8x)^2} + \dots \right],$$

а также полученными приближенными значениями интегралов следующего типа:

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau(\xi - \xi_0 - i\eta_0)} J_0(\tau\eta) d\tau \approx \frac{h^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\gamma}{2}}}{\sqrt{2\rho\eta_0}}, \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau(\xi - \xi_0 - i\eta_0)} \tau J_1(\tau\eta) d\tau \approx \frac{h^{\frac{3}{2}} e^{\frac{i3\gamma}{2}}}{\rho^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\rho\eta_0}}$$

при ξ, η , близких к ξ_0, η_0 .

На основании (6), (7) напряженное поле в точках, расположенных вблизи начала полярной системы координат, описывается (с точностью до членов более высокого порядка относительно переменной ρ) простыми формулами:

$$\sigma_{\xi\xi} \approx \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \left[K_1 \cos \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \sin \gamma \left(K_1 \sin \frac{3\gamma}{2} + K_2 \cos \frac{3\gamma}{2} \right) \right], \quad (8)$$

$$\sigma_{\xi\eta} \approx \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \left[K_2 \cos \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} \sin \gamma \left(K_1 \cos \frac{3\gamma}{2} - K_2 \sin \frac{3\gamma}{2} \right) \right],$$

$$\sigma_{\eta\eta} \approx \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \left[K_2 \cos \frac{\gamma}{2} - 2K_2 \sin \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \sin \gamma \left(K_2 \sin \frac{3\gamma}{2} + K_1 \cos \frac{3\gamma}{2} \right) \right],$$

где

$$K_1 = \frac{\eta_0 \psi(\eta_0) + \xi_0 \psi(\xi_0)}{2h^{3/2} \sqrt{\eta_0}}, \quad (9)$$

$$K_2 = \frac{\varepsilon_0 \psi(\eta_0) - \eta_0 \psi'(\eta_0)}{2h^{3/2} \sqrt{\eta_0}}$$

— коэффициенты интенсивности нормальных и касательных напряжений.

Для дальнейшего исследования структуры локального напряженного состояния запишем компоненты тензора напряжений в полярной системе координат

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &\approx \frac{1}{2\sqrt{2\rho}} \left[K_1 (3 - \cos \gamma) \cos \frac{\gamma}{2} + K_2 (3 \cos \gamma - 1) \sin \frac{\gamma}{2} \right], \\ \sigma_{\gamma\gamma} &\approx \frac{1}{2\sqrt{2\rho}} \left[K_1 (1 + \cos \gamma) \cos \frac{\gamma}{2} - 3K_2 \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2} \right], \\ \sigma_{r\gamma} &\approx \frac{1}{2\sqrt{2\rho}} \left[K_1 \sin \gamma \cos \frac{\gamma}{2} + K_2 (3 \cos \gamma - 1) \cos \frac{\gamma}{2} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Из анализа этих формул следует, что напряженное состояние у вершины параболического разреза соответствует состоянию, которое локально является состоянием плоской деформации. Этот вывод совпадает с выводом Ирвина [4], сделанным им для дискообразной трещины. Применяя критерий разрушения, основанный на том, что трещина растет по нормали к направлению наибольшего растягивающего напряжения, для определения начального направления распространения трещины получаем следующее уравнение:

$$K_1 \sin \bar{\gamma} + K_2 (3 \cos \bar{\gamma} - 1) = 0. \quad (11)$$

Критические значения внешней нагрузки находим из уравнения предельного равновесия, которое записываем в виде [5]

$$\cos^3 \frac{\bar{\gamma}}{2} (K_1 - 3K_2 \operatorname{tg} \frac{\bar{\gamma}}{2}) = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi} i} \quad (12)$$

K_{IC} характеризует сопротивление материала разрушению и определяется экспериментально.

Л и т е р а т у р а

1. Куценко Г.В., Улитко А.Ф. — Докл. АН УССР, 1976, № 2.
2. Улитко А.Ф. — Докл. АН УССР, 1968, № 12.
3. Ивэйт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М., Наука, 1977.
4. Irwin G.R. — J. Appl. Mech., 1957, 24, № 3.
5. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. К., На думка, 1968.