

Т. Погорілий

Інженер

В. Мирончук

Доцент, д-р техн. наук

Український державний університет
харчових технологій,
м. Київ

УДК 536.2

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ТРЬОХ ОБЛАСТЕЙ З ІДЕАЛЬНИМ ТЕПЛОВИМ КОНТАКТОМ МІЖ НИМИ

Розглядається аналітичний розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для трьох областей в одновимірному випадку з різними теплофізичними характеристиками та початковими температурами, що контактують між собою за законом ідеального теплового контакту (крайові умови другого роду) з теплоізованими кінцями та бічними гранями (теплообміну із зовнішнім середовищем не відбувається).

нестационарна задача теплопровідності, ідеальний тепловий контакт

Одним з типів задач математичної фізики є нестационарні задачі параболічного типу (тепло- та масообміну), точний розв'язок яких вдається знайти більшою мірою лише для областей канонічної геометрії. Задачі ці постають у багатьох галузях сучасної техніки, а також у хімічній, фармацевтичній та харчовій промисловості. Одна з таких задач, що стосується розподілу температур у трьох одновимірних областях з різними теплофізичними характеристиками і різною початковою температурою (з теплоізованою бічною поверхнею та зовнішньою межею), між якими відбувається теплообмін за ідеальним законом теплообміну (крайові умови другого роду) — розглядається авторами. Перевірку отриманих результатів проведено шляхом числового розрахунку для трьох областей з однаковими теплофізичними характеристиками (як приклад, взято теплофізичні коефіцієнти для алюмінію) та з різними початковими умовами, що наведено в кінці статті.

Використовуючи для однорідного рівняння теплопровідності [2, 7, 8]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{\lambda}{c\rho}}, \quad (1)$$

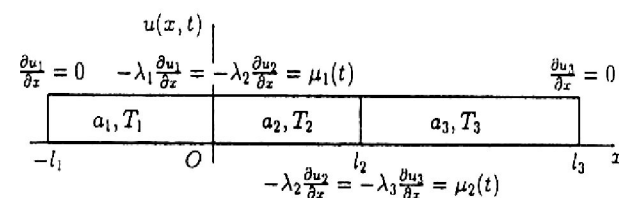


Рис. 1. Розрахункова схема

з неоднорідними крайовими умовами другого роду

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l_1} = -\frac{\mu_1(t)}{\lambda}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l_2} = -\frac{\mu_2(t)}{\lambda}, \quad (t \geq 0), \quad (2)$$

та неоднорідною початковою умовою

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad (l_1 \leq x \leq l_2), \quad (3)$$

де функція розподілу температури в області $u(x, t)$ ($t \geq 0$, $l_1 \leq x \leq l_2$) — обмежена; задана функція початкового розподілу температур $\varphi(x)$ — неперервна обмежена функція; a^2 — коефіцієнт температуропровідності; l — коефіцієнт теплопровідності; c — теплоємність; ρ — густина; $\mu(t)$,

$\mu_i(t)$ — функції теплових потоків на межах області (бічна поверхня теплоізолювана), знайдений авторами розв'язок для одномірної області (рис. 1), що має вигляд

$$u(x, t) = \frac{1}{l_2 - l_1} \int_{l_1}^{l_2} \varphi(\xi) d\xi - \frac{a^2}{\lambda(l_2 - l_1)} \int_0^t (\mu_2(\tau) - \mu_1(\tau)) d\tau + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{2}{l_2 - l_1} \int_{l_1}^{l_2} \varphi(\xi) \cos \frac{n\pi(\xi - l_1)}{l_2 - l_1} d\xi \right) e^{-\left(\frac{n\pi a}{l_2 - l_1}\right)^2 t} + \right. \\ \left. + \frac{a^2}{\lambda(l_2 - l_1)} \int_0^t [\mu_1(\tau) - (-1)^n \mu_2(\tau)] e^{-\left(\frac{n\pi a}{l_2 - l_1}\right)^2 t} d\tau \right\} \cos \frac{n\pi(x - l_1)}{l_2 - l_1}. \quad (4)$$

отримаємо розв'язок задачі теплопровідності для трьох областей з ідеальним тепловим контактом між ними.

Розглянемо задачу теплопровідності про розповсюдження тепла в трьох різних областях із теплоізолюваною бічною поверхнею з функціями розподілу температур $u_1(x, t)$ ($-l_1 \leq x \leq 0$, $t \geq 0$), $u_2(x, t)$ ($0 \leq x \leq l_2$, $t \geq 0$) та $u_3(x, t)$ ($l_2 \leq x \leq l_3$, $t \geq 0$), різною температуропровідністю (a_1 , a_2 та a_3) та різною початковою температурою ($T_1 = \text{const}$, $T_2 = \text{const}$ і $T_3 = \text{const}$ відповідно), що в початковий момент часу ($t=0$) почали контактувати між собою за законом ідеального теплового контакту, а по краях ($x=-l_1$, $x=l_3$) теплообміну із зовнішнім середовищем не відбувається (див. рис. 1). Позначимо функції теплових потоків на межах контакту двох областей через $m_1(t)$ та $m_2(t)$:

$$-\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = \mu_1(t); \\ -\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=l_2} = -\lambda_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} \Big|_{x=l_2} = \mu_2(t). \quad (5)$$

Ця задача математично формулюється так. Знайти розв'язок системи лінійних однорідних рівнянь параболічного типу в частинних похідних (6, а, з, є):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, & (-l_1 \leq x \leq 0, t \geq 0), & (a) \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=-l_1} = 0; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{\mu_1(t)}{\lambda_1}, & (б) \\ u_1|_{t=0} = T_1 = \text{const}, & (в) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, & (0 \leq x \leq l_2, t \geq 0), & (г) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{\mu_1(t)}{\lambda_2}; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=l_2} = -\frac{\mu_2(t)}{\lambda_2}, & (д) \\ u_2|_{t=0} = T_2 = \text{const}, & (е) \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = a_3^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}, & (l_2 \leq x \leq l_3, t \geq 0), & (з) \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} \Big|_{x=l_2} = -\frac{\mu_2(t)}{\lambda_3}; \quad \frac{\partial u_3}{\partial x} \Big|_{x=l_3} = 0, & (ж) \\ u_3|_{t=0} = T_3 = \text{const}, & (и) \\ u_1|_{x=0} = u_2|_{x=0}, & (і) \\ u_2|_{x=l_2} = u_3|_{x=l_2}, & (к) \end{cases} \quad (6)$$

з крайовими (6, б, д, ж) та початковими умовами (6, в, е, з) відповідно для лівої ($-l_1 \leq x \leq 0$), середньої ($0 \leq x \leq l_2$) та правої ($l_2 \leq x \leq l_3$) областей, крайові умови (6, б, д, ж) для функцій $u_1(0, t)$, $u_2(0, t)$ та $u_3(0, t)$ відповідно, знаходяться з рівняння (5). Допоміжні умови (6, і, к) відображають неперервність функцій температур лівої та правої областей у зонах їхнього контакту ($x=0$ та $x=l_2$), що безпосередньо впливає з фізичного змісту задачі ("умови зшивання").

У рівнянні (6) через a_i^2 , l_i ($i=1, 2, 3$) позначено коефіцієнти температуро- та теплопровідності для лівої, середньої та правої областей відповідно.

Використовуючи для трьох окремих задач (6, а — в), (6, г — е) та (6, з — и) розв'язок (4) задачі про зміну температури обмеженої області з крайовими умовами другого роду, запишемо розподіл температур у кожній з областей:

$$u_1(x, t) = T_1 - \frac{a_1^2}{\lambda_1 l_1} \int_0^t \mu_1(\tau) d\tau - \\ - \frac{2a_1^2}{\lambda_1 l_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{n\pi(x + l_1)}{l_1} \int_0^t \mu_1(\tau) e^{-\left(\frac{n\pi a_1}{l_1}\right)^2 t} d\tau, \quad (7)$$

$$u_2(x, t) = T_2 - \frac{a_2^2}{\lambda_2 l_2} \int_0^t (\mu_2(\tau) - \mu_1(\tau)) d\tau + \\ + \frac{2a_2^2}{\lambda_2 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{l_2} \int_0^t (\mu_1(\tau) - \\ - (-1)^n \mu_2(\tau)) e^{-\left(\frac{n\pi a_2}{l_2}\right)^2 t} d\tau, \quad (8)$$

$$u_3(x, t) = T_3 + \frac{a_3^2}{\lambda_3 (l_3 - l_2)} \int_0^t \mu_2(\tau) d\tau + \\ + \frac{2a_3^2}{\lambda_3 (l_3 - l_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi(x - l_2)}{(l_3 - l_2)} \int_0^t \mu_2(\tau) e^{-\left(\frac{n\pi a_3}{l_3 - l_2}\right)^2 t} d\tau. \quad (9)$$

Щоб знайти розв'язок задачі про розподіл температур у лівій (6, а — в), середній (6, г — е) та правій (6, з — и) областях у вигляді (7) — (9), треба знайти функції $\mu_1(t)$ та $\mu_2(t)$. Для цього скористаємося умовами (6, і) та (6, к).

Записавши значення функцій $u_1(0, t)$, $u_2(0, t)$ та $u_3(l_2, t)$ і $u_3(l_2, t)$, використовуючи вирази (7) — (9) та попарно прирівнявши їх на основі (6, і) та (6, к), після нескладних перетворень кожного з рівнянь, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\frac{a_1^2}{\lambda_1 l_1} \int_0^t \mu_1(\tau) d\tau - \frac{a_2^2}{\lambda_2 l_2} \int_0^t (\mu_2(\tau) - \mu_1(\tau)) d\tau +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2a_2^2}{\lambda_2 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l (\mu_1(\tau) - (-1)^n \mu_2(\tau)) e^{-\left(\frac{n\pi a_2}{l_2}\right)^2 (l-\tau)} d\tau + \\
& + \frac{2a_1^2}{\lambda_1 l_1} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \mu_1(\tau) e^{-\left(\frac{n\pi a_1}{l_1}\right)^2 (l-\tau)} d\tau + T_2 - T_1 = 0, \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{a_2^2}{\lambda_2 (l_3 - l_2)} \int_0^l \mu_2(\tau) d\tau + \frac{a_2^2}{\lambda_2 l_2} \int_0^l (\mu_2(\tau) - \mu_1(\tau)) d\tau + \\
& + \frac{2a_2^2}{\lambda_2 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l (\mu_2(\tau) - (-1)^n \mu_1(\tau)) e^{-\left(\frac{n\pi a_2}{l_2}\right)^2 (l-\tau)} d\tau + \\
& + \frac{2a_3^2}{\lambda_3 (l_3 - l_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \mu_2(\tau) e^{-\left(\frac{n\pi a_3}{l_3 - l_2}\right)^2 (l-\tau)} d\tau + T_3 - T_2 = 0. \quad (11)
\end{aligned}$$

Система рівнянь (10), (11) є системою інтегральних рівнянь Вольтера 2-го роду [1] відносно невідомих функцій $m_1(t)$ та $m_2(t)$. Одним з методів розв'язування інтегральних рівнянь такого типу є застосування операційного методу числення на основі прямого

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad p = s + i\sigma \quad (12)$$

та оберненого

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (13)$$

перетворень Лапласа [4, 9].

Система рівнянь (10), (11) після перетворення за Лапласом з використанням властивостей лінійності, інтегрування, теореми про згортку, а також перетворення одиничної функції та експоненти набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
& \frac{a_1^2}{\lambda_1 l_1} \frac{1}{p} \bar{\mu}_1(p) + \frac{a_2^2}{\lambda_2 l_2} \frac{1}{p} (\bar{\mu}_1(p) - \bar{\mu}_2(p)) + \\
& + \frac{2a_2^2}{\lambda_2 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\mu}_1(p) - (-1)^n \bar{\mu}_2(p)) \frac{1}{p + \left(\frac{n\pi a_2}{l_2}\right)^2} + \\
& + \frac{2a_1^2}{\lambda_1 l_1} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}_1(p) \frac{1}{p + \left(\frac{n\pi a_1}{l_1}\right)^2} + \frac{1}{p} (T_2 - T_1) = 0, \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{a_3^2}{\lambda_3 (l_3 - l_2)} \frac{1}{p} \bar{\mu}_2(p) + \frac{a_2^2}{\lambda_2 l_2} \frac{1}{p} (\bar{\mu}_2(p) - \bar{\mu}_1(p)) + \\
& + \frac{2a_2^2}{\lambda_2 l_2} \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{\mu}_2(p) - (-1)^n \bar{\mu}_1(p)) \frac{1}{p + \left(\frac{n\pi a_2}{l_2}\right)^2} +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{2a_3^2}{\lambda_3 (l_3 - l_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}_2(p) \frac{1}{p + \left(\frac{n\pi a_3}{l_3 - l_2}\right)^2} + \frac{1}{p} (T_3 - T_2) = 0. \quad (15)$$

Отже, від системи інтегральних рівнянь (10), (11) відносно невідомих функцій $m_1(t)$ та $m_2(t)$ за допомогою перетворення Лапласа (12) ми перейшли до системи алгебричних рівнянь (14), (15) відносно невідомих поки що функцій зображення $\bar{\mu}_1(p)$ та $\bar{\mu}_2(p)$. Знайшовши явний вигляд для функцій $\bar{\mu}_1(p)$ та $\bar{\mu}_2(p)$, використаємо обернене перетворення Лапласа (13), і отримаємо шукані функції теплових потоків $m_1(t)$ та $m_2(t)$ на межах ($x=0$) лівої і середньої та ($x=l_2$) середньої і правої областей відповідно, між якими попарно відбувається ідеальний тепловий контакт (5), після чого задача (6) буде розв'язана.

В отриманій системі алгебричних рівнянь (14), (15) обчислити нескінченні суми (ряди) в замкненому вигляді вдається, використовуючи відомий вираз для збіжності рядів [6]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 \pm b^2} = \pm \frac{1}{2b^2} \pm \frac{\pi}{2b} \left\{ \begin{matrix} cth & \pi b \\ ctg & \pi b \end{matrix} \right\}. \quad (16)$$

Вибираючи в нашому випадку знак "+" і зважаючи на те, що в (14), (15) суми розпочинаються з $n=1$, запишемо:

$$\frac{2a_1^2}{\lambda_1 l_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p + \left(\frac{n\pi a_1}{l_1}\right)^2} = -\frac{a_1^2}{\lambda_1 l_1} \frac{1}{p} + \frac{a_1}{\lambda_1} \frac{1}{\sqrt{p}} cth \left(\frac{l_1}{a_1} \sqrt{p} \right). \quad (17)$$

Застосовуючи (17) до системи рівнянь (14), (15), після зведення спільних членів та перетворень, кінцево отримуємо таку систему відносно невідомих функцій $\bar{\mu}_1(p)$ та $\bar{\mu}_2(p)$:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{a_1}{\lambda_1} \sqrt{p} cth \left(\frac{l_1}{a_1} \sqrt{p} \right) + \frac{a_2}{\lambda_2} \sqrt{p} cth \left(\frac{l_2}{a_2} \sqrt{p} \right) \right) \sqrt{p} \bar{\mu}_1(p) - \\
& - \frac{a_2}{\lambda_2} \sqrt{p} \frac{1}{sh \left(\frac{l_2}{a_2} \sqrt{p} \right)} \bar{\mu}_2(p) = T_1 - T_2, \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{a_2}{\lambda_2} \sqrt{p} cth \left(\frac{l_2}{a_2} \sqrt{p} \right) + \frac{a_3}{\lambda_3} \sqrt{p} cth \left(\frac{l_3 - l_2}{a_3} \sqrt{p} \right) \right) \sqrt{p} \bar{\mu}_2(p) - \\
& - \frac{a_2}{\lambda_2} \sqrt{p} \frac{1}{sh \left(\frac{l_2}{a_2} \sqrt{p} \right)} \bar{\mu}_1(p) = T_2 - T_3. \quad (19)
\end{aligned}$$

Розв'язуючи систему (18), (19) за методом Крамера відносно невідомих функцій $\bar{\mu}_1(p)$ та $\bar{\mu}_2(p)$, отримаємо:

$$\bar{\mu}_1(p) = \frac{1}{\bar{\Delta}(p)} \left((T_2 - T_3) \frac{a_2}{\lambda_2} \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{l_2}{a_2} \sqrt{p}\right)} + \right. \\ \left. + (T_1 - T_2) \left(\frac{a_2}{\lambda_2} \operatorname{cth}\left(\frac{l_2}{a_2} \sqrt{p}\right) + \frac{a_3}{\lambda_3} \operatorname{cth}\left(\frac{l_3 - l_2}{a_3} \sqrt{p}\right) \right) \right), \quad (20)$$

$$\bar{\mu}_2(p) = \frac{1}{\bar{\Delta}(p)} \left((T_1 - T_2) \frac{a_2}{\lambda_2} \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\frac{l_2}{a_2} \sqrt{p}\right)} + \right. \\ \left. + (T_2 - T_3) \left(\frac{a_1}{\lambda_1} \operatorname{cth}\left(\frac{l_1}{a_1} \sqrt{p}\right) + \frac{a_2}{\lambda_2} \operatorname{cth}\left(\frac{l_2}{a_2} \sqrt{p}\right) \right) \right), \quad (21)$$

де через $\bar{\Delta}(p)$ позначено визначник Крамера:

$$\bar{\Delta}(p) = \sqrt{p} \left(\frac{a_2^2}{\lambda_2^2} + \frac{a_1 a_2}{\lambda_1 \lambda_2} \operatorname{cth}\left(\frac{l_1}{a_1} \sqrt{p}\right) \operatorname{cth}\left(\frac{l_2}{a_2} \sqrt{p}\right) + \right. \\ \left. + \frac{a_2 a_3}{\lambda_2 \lambda_3} \operatorname{cth}\left(\frac{l_2}{a_2} \sqrt{p}\right) \operatorname{cth}\left(\frac{l_3 - l_2}{a_3} \sqrt{p}\right) + \right. \\ \left. + \frac{a_1 a_3}{\lambda_1 \lambda_3} \operatorname{cth}\left(\frac{l_1}{a_1} \sqrt{p}\right) \operatorname{cth}\left(\frac{l_3 - l_2}{a_3} \sqrt{p}\right) \right). \quad (22)$$

Отже, знайдено функції $\bar{\mu}_1(p)$ та $\bar{\mu}_2(p)$ в області зображень у явному вигляді.

Для отримання функцій оригіналів $m_1(t)$ та $m_2(t)$ потрібно для кожної з функцій $\bar{\mu}_1(p)$ та $\bar{\mu}_2(p)$ провес-ти за формулою (13) обернення за Лапласом. Це приво-дить до задачі про знаходження лишків функцій $\bar{\mu}_1(p)$ та $\bar{\mu}_2(p)$, котрі, в свою чергу, визначаються особливими точками цих функцій.

Знайдемо особливі точки функцій $\bar{\mu}_1(p)$ та $\bar{\mu}_2(p)$ із системи рівнянь (20), (21).

По-перше, з'ясуємо вплив радикала $\sqrt{p}$ на характер поведінки функцій $\bar{\mu}_1(p)$ та $\bar{\mu}_2(p)$. В літературі [3] показано, що для функції $\sqrt{p}$ точка нуль ($p=0$) є точкою багатозначного характеру, або точкою розгалуження.

Досліджуючи точку $p=0$ на багатозначність характеру [1] (від цього залежить розташування контуру інтегрування в (13)), встановлено, що функція $\bar{\mu}(p)$ — мероморфна, тобто, точка $p=0$ не є точкою розгалуження для функцій $\bar{\mu}_1(p)$ та $\bar{\mu}_2(p)$ з системи рівнянь (20), (21). Враховуючи, що вигляд функцій $\bar{\mu}_1(p)$ та $\bar{\mu}_2(p)$ має дробово-раціональний характер, дослідимо їх на полюси.

Досліджуючи функції $\bar{\mu}_1(p)$ та $\bar{\mu}_2(p)$ на особливі точки, встановлено, що всі вони будуть полюсами першого порядку і визначатимуться, як додатні корені рівняння

$$\frac{1}{x} \Delta(x) = 0, \quad (23)$$

де $\Delta(x)$ — функція від дійсного аргументу x :

$$\Delta(x) = x \left(\frac{a_2^2}{\lambda_2^2} - \frac{a_1 a_2}{\lambda_1 \lambda_2} \operatorname{ctg}\left(\frac{l_1}{a_1} x\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{l_2}{a_2} x\right) - \right. \\ \left. - \frac{a_2 a_3}{\lambda_2 \lambda_3} \operatorname{ctg}\left(\frac{l_2}{a_2} x\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{l_3 - l_2}{a_3} x\right) - \right. \\ \left. - \frac{a_1 a_3}{\lambda_1 \lambda_3} \operatorname{ctg}\left(\frac{l_1}{a_1} x\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{l_3 - l_2}{a_3} x\right) \right). \quad (24)$$

Встановлено, що достатньо розглянути лише додатні корені рівняння (23). Корінь $x=0$ не розглядається в силу існування обмеженої границі для кожної з функцій

$\lim_{p \rightarrow 0} \bar{\mu}_1(p)$ та $\lim_{p \rightarrow 0} \bar{\mu}_2(p)$, тобто точка $p=0$ не є полюсом

для функцій $\bar{\mu}_1(p)$ та $\bar{\mu}_2(p)$. Вона є усувною особли-вою точкою для кожної з них [3].

Далі, для знаходження функцій оригіналів $\bar{\mu}_1(p)$ та $\bar{\mu}_2(p)$, проводячи інтегрування за формулою обернення (13) з використанням леми Жордана, отримуємо явний вигляд функцій оригіналів теплових потоків $m_1(t)$ та $m_2(t)$:

$$\mu_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\Delta'(x_k)} \left((T_2 - T_3) \frac{a_2}{\lambda_2} \frac{1}{\sin\left(\frac{l_2}{a_2} x_k\right)} + \right. \\ \left. + (T_1 - T_2) \left(\frac{a_2}{\lambda_2} \operatorname{ctg}\left(\frac{l_2}{a_2} x_k\right) + \frac{a_3}{\lambda_3} \operatorname{ctg}\left(\frac{l_3 - l_2}{a_3} x_k\right) \right) \right) e^{-x_k t}, \quad (25)$$

$$\mu_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\Delta'(x_k)} \left((T_1 - T_2) \frac{a_2}{\lambda_2} \frac{1}{\sin\left(\frac{l_2}{a_2} x_k\right)} + \right. \\ \left. + (T_2 - T_3) \left(\frac{a_2}{\lambda_2} \operatorname{ctg}\left(\frac{l_2}{a_2} x_k\right) + \frac{a_1}{\lambda_1} \operatorname{ctg}\left(\frac{l_1}{a_1} x_k\right) \right) \right) e^{-x_k t}, \quad (26)$$

де x_k ($k \geq 1$) — додатні корені рівняння (23); $\Delta'(x)$ — значення похідної від функції $\Delta(x)$ (24) в точках $x=x_k$:

$$\Delta'(x_k) = \Delta'(x)|_{x=x_k} = \frac{l_2}{\lambda_2} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{l_2}{a_2} x_k\right)} \left(\frac{a_1}{\lambda_1} \operatorname{ctg}\left(\frac{l_1}{a_1} x_k\right) + \right. \\ \left. + \frac{a_3}{\lambda_3} \operatorname{ctg}\left(\frac{l_3 - l_2}{a_3} x_k\right) \right) + \frac{l_1}{\lambda_1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{l_1}{a_1} x_k\right)} \left(\frac{a_2}{\lambda_2} \operatorname{ctg}\left(\frac{l_2}{a_2} x_k\right) + \right.$$

$$+ \frac{a_3}{\lambda_3} \operatorname{ctg} \left(\frac{l_3 - l_2}{a_3} x_k \right) + \frac{l_3 - l_2}{\lambda_3} \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{l_3 - l_2}{a_3} x_k \right)} \times$$

$$\times \left(\frac{a_1}{\lambda_1} \operatorname{ctg} \left(\frac{l_1}{a_1} x_k \right) + \frac{a_2}{\lambda_2} \operatorname{ctg} \left(\frac{l_2}{a_2} x_k \right) \right) \quad (27)$$

Таким чином, кінцево розв'язок задачі теплопровідності (6) для трьох областей запишеться у вигляді (7) — (9), за умови, що функції теплових потоків $\mu_1(t)$ та $\mu_2(t)$ визначаються з системи рівнянь (25) — (26), де величини $x_k (k \geq 1)$ — додатні корені рівняння (23).

Проведено числовий розрахунок для трьох областей однакої довжини ($l_1=1$ м, $l_2=1$ м, $l_3=1$ м), виготовлених з однакового матеріалу (алюміній) з такими теплофізичними характеристиками [5]: коефіцієнти теплопровідності $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=204$ Вт/(м·К); коефіцієнти температуропровідності $a_1^2=a_2^2=a_3^2=91,3$ м²/с², та з різними початковими умовами ($T_1=100^\circ\text{C}$, $T_2=0^\circ\text{C}$). Графік отриманих результатів подано на рис. 2. Як видно з графіка, температура в областях остаточно вирівнюється через $t=1,0 \times 10^5$ с, і становить $T=66,67^\circ\text{C}$ в кожній з них, хоч вже через $t=1000$ с в областях встановлюється практично половина між початковою температурою та $T=66,67^\circ\text{C}$. Пояснюється це тим, що величина теплового потоку через межу контакту кожної з двох областей за першим законом Фур'є

$$q = m C \Delta T \quad (28)$$

прямо пропорційна різниці температур між областями, а ΔT , в свою чергу, змінюється (зменшується) з часом, як видно з рис. 2. Це наочно демонструє нерівномірний характер теплообміну між трьома областями.

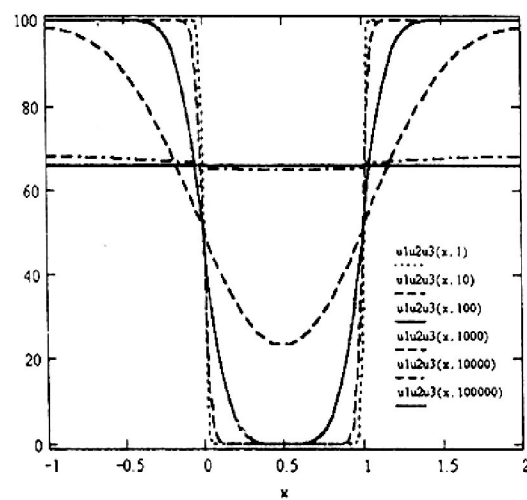


Рис. 2. Графік зміни температури $u(x,t)$ в лівій, середній та правій областях (на графіку функцію температури позначено через $u1u2u3(x,t)$) в залежності від координати x , при різних значеннях часу t

Висновки: 1. Проведено аналітичний розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для трьох областей в одновимірному випадку з різними теплофізичними характеристиками та початковими температурами, що попарно контактують між собою за законом ідеального теплового контакту (крайові умови другого роду) з теплоізованими кінцями та бічними гранями (теплообміну із зовнішнім середовищем не відбувається).

2. При проведенні обернення за Лапласом виділено всі особливості функцій теплових потоків на межах попарно контактуючих областей і подано їх розв'язок у вигляді квадратур, зручних для проведення обчислень.

3. Проведено числовий розв'язок для трьох областей, виготовлених з металу (алюміній), в залежності від координати та часу.

4. Встановлено, що зміна температури має явно нелінійний характер, який виражається в тому, що за 1/30 часу, потрібного для досягнення усталеного режиму (рівність температур лівої, середньої та правої областей), зміна температури кожної з них сягає 50% від практично отриманої протягом всього часу контакту.

Література

1. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. — М.: Наука, 1971. — 288 с.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики: Учебн. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. — М.: Высш. школа, 1970. — 712 с.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987. — 688 с.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. — М.: Высш. школа, 1967. — 599 с.
5. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. — М.: Энергия, 1977. — 343 с.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: элементарные функции. — М.: Наука, 1981. — 798 с.
7. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. — М.: Наука, 1964. — 712 с.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Гостехиздат, 1953. — 679 с.
9. Трантер К.Дж. Интегральные преобразования в математической физике. — М.: Гостехиздат, 1956. — 204 с.

Отримана 17.07.00

T. Pohorilij, V. Myronchuk

Problem of heat conduction for three areas with an ideal thermal contact between them

Ukrainian State University of Foods Technology, Kyiv

The analytical solution of a non-steady problem of heat conduction for three areas in a unidimensional case with the miscellaneous thermal characteristics and reference temperatures is considered, which one mutually contact among themselves behind the law of an ideal thermal contact (boundary conditions of the second kind) to heat-insulated endings and lateral edges (the thermoexchange with an environment does not happen). A numerical solution also is conducted for three areas in the case of a homogeneous material with the miscellaneous entry conditions.