

С. І. РЕЗНІКОВ
О. П. ЗІНЬКЕВИЧ
В. М. САФОНОВ
Ю. С. РЕЗНІКОВА

Вища та прикладна математика

НАВЧАЛЬНИЙ
ПОСІБНИК

Вища математика

Теорія ймовірностей
і математична статистика

Математичне
програмування

Рецензенти: д-р фіз.-мат. Наук, проф. **М.А. Мартиненко** (Національний університет харчових технологій); д-р техн. наук, проф. **І.О. Ластівка** (Національний авіаційний університет); канд. фіз.-мат. Наук; доц. **О.М. Нецадим** (Національний університет біоресурсів і природокористування України)

Вища та прикладна математика: навч. посіб./ С. І. Резніков, О. П. Зінкевич, В.М. Сафонов, Ю. С. Резнікова. – К.: НУХТ, 2016. – 343 с.

ISBN 978-966-612-182-3

Містить теоретичні відомості з курсів вищої математики, теорії ймовірностей і математичної статистики, математичного програмування, завдання для самостійної роботи студентів (розрахунково-графічні роботи), таблиці. Наведено приклади розв'язання типових задач, наприкінці кожного розділу – запитання для самоконтролю, а також зразки та приклади розв'язання контрольних робіт.

Для студентів вищих навчальних закладів.

*Рекомендовано Вченою радою
Національного університету
харчових технологій
як навчальний посібник
Протокол № 4 від 24 вересня 2015 р.*

ВСТУП

Вища математика є фундаментальною дисципліною. Основною метою її викладання є формування базових математичних знань і оволодіння основними методами дослідження та розв'язування математичних задач, здобуття навичок формулювання математичних моделей та оптимізації процесів, зокрема туристичного обслуговування, а також розвиток логічного алгоритмічного мислення та вироблення умінь самостійного опрацювання математичної літератури і розширення математичних знань.

До курсу вищої математики включено найголовніші для практичного застосування розділи різних математичних дисциплін: лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії і математичного аналізу.

Елементи *лінійної алгебри* представлено системами лінійних алгебраїчних рівнянь та основними методами їхнього дослідження і розв'язання: методом Крамера та Жордана-Гаусса. Останній метод має багато різних модифікацій, із яких, на думку авторів, найбільш економічною є метод повного виключення, що є універсальним засобом дослідження систем лінійних рівнянь. Його також можна застосовувати для обчислення визначників.

Елементи *векторної алгебри* обмежено поняттями вектора на площині та у просторі, а також лінійними операціями з векторами та скалярним добутком двох векторів.

Аналітична геометрія представлена важливим для практичного застосування розділом: пряма лінія на площині. Провідне місце приділяється побудові різних видів рівнянь прямої лінії на площині та приклади застосування методів аналітичної геометрії до розв'язання деяких геометричних задач.

До контрольної роботи включено задачі знаходження розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь методами Крамера та повного виключення (система сумісна і визначена, сумісна і невизначена, несумісна), задачі векторної алгебри, задачі для прямої на площині.

У курсі *математичного аналізу* досліджуються функції однієї та багатьох змінних за допомогою фундаментальних понять математики: границі та похід-

ної функції, а також вивчаються невизначені та визначені інтеграли, звичайні диференціальні рівняння.

До контрольної роботи включено основні стандартні завдання, розв'язання яких дозволить студентам ознайомитись з основними поняттями та методами математичного аналізу, і здобути практичні навички розв'язання задач: обчислення границь та похідних функцій, проведення дослідження функції однієї змінної на монотонність та екстремум, знаходження градієнта і похідної за напрямком, а також обчислення невизначених та визначених інтегралів, розв'язання диференціальних рівнянь, зокрема задачі Коші для однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Курс "Теорія ймовірностей та математична статистика" складається із двох математичних дисциплін.

Теорія ймовірностей вивчає випадкові явища — випадкові події, величини, процеси — з точки зору їхнього кількісного аналізу.

Курс можна умовно поділити на три розділи: класичний розділ, схема випробувань Бернуллі та основні наближені формули, випадкові величини, способи їхнього задавання та основні числові характеристики.

Класичний розділ є базовим для розуміння основних понять і сутності теорії ймовірностей та ґрунтується на курсі елементарної математики. У цьому розділі вводяться класичне означення ймовірності випадкової події, основні види випадкових подій, операції з подіями та основні теореми для обчислення ймовірностей подій, які виражаються через інші події за допомогою операцій.

У другому розділі розглядається один із основних способів організації експерименту — схема незалежних випробувань Бернуллі. Вводяться класична формула Бернуллі та відповідні наближені формули, доведення яких потребує ґрунтовних знань з математичного аналізу, але до програми, яка реалізується, входить тільки їхнє практичне застосування.

У третьому розділі вводиться одне з основних понять теорії ймовірностей — випадкова величина, яка дозволяє перейти від класичного розділу та елементарних методів вивчення випадкових подій до застосування потужного апарату

математичного аналізу для дослідження випадкових явищ. У цьому розділі розглядаються основні закони розподілу випадкових величин – Бернуллі, Пуассона, геометричний, нормальний – та практичні задачі, які до них приводять.

Математична статистика – це математична дисципліна, яка вивчає випадкові явища, використовуючи практичні результати випробувань або спостережень за випадковою величиною (вибірку). Теоретичним підґрунтям математичної статистики є теорія ймовірностей. До програми входить знайомство з основними задачами математичної статистики: оцінюванням невідомого закону розподілу досліджуваної випадкової величини, знаходженням оцінок його невідомих параметрів та перевіркою статистичних гіпотез, які висуваються відносно випадкової величини. Розв'язання вказаних основних задач можна умовно назвати первинною обробкою статистичних даних.

Треба підкреслити, що розв'язання практичних задач з теорії ймовірностей і математичної статистики вимагає навичок у використуванні основних таблиць значень різних функцій та статистичних критеріїв, які наведено у "Додатках".

Теорія ймовірностей і математична статистика знаходять застосування в різних дисциплінах, зокрема економічного циклу. Характерним прикладом є "Економетрія", яка дозволяє вивчати економічні процеси методами математичної статистики. За своєю сутністю будь-який економічний процес, і не тільки, має випадковий характер, хоча б тому, що для його дослідження не можна розглядати величезну кількість факторів, які впливають на його перебіг. Тому використовуються тільки суттєві фактори, і будь-яку формулу математичної економіки можна розглядати як економетричну модель.

Математичне програмування – це математична наука, яка використовує математичні моделі і методи для оптимізаційних задач, тобто знаходження найкращого варіанту прийняття рішення.

Багато завдань економіки та управління, що пов'язані з оптимальним плануванням виробництва і перевезень, розподілом інвестицій, розв'язуються методами математичного програмування, які використовують основні поняття та

методику розв'язання задач лінійної алгебри і математичного аналізу, зокрема задачу про знаходження оптимальних значень функції багатьох змінних на деякій множині.

У теоретичній частині відображені основні поняття і методи лінійного програмування. Головна увага приділяється методам розв'язання задач, які пропонуються у контрольній роботі.

До контрольної роботи з математичного програмування включено три задачі, які зводяться здебільшого до лінійних математичних моделей.

Перша задача про знаходження оптимального асортиментного плану випуску продукції є головною для розуміння основних понять і методів розв'язання лінійних задач математичного програмування. Розглядаються пряма і двоїста задачі, використовуються симплексний і графічний методи, а також перевіряється узгодженість одержаних розв'язків з теоремами двоїстості, проводиться економічна інтерпретація розв'язків задачі. Треба підкреслити, що пряма задача має безліч розв'язків, що дозволяє вибирати конкретний розв'язок за допомогою додаткового критерію, наприклад, асортиментних співвідношень.

Другою є класична транспортна задача, яка в деяких варіантах має безліч оптимальних планів перевезень. Для її розв'язання використовується стандартний метод потенціалів.

При постановці та розв'язанні задач про оптимальний асортиментний план випуску продукції і транспортної чітко використовується загальна схема: економічна модель, математична модель, розв'язання задачі математичними методами, економічна інтерпретація розв'язку.

Третя задача про оптимальний розподіл інвестицій є прикладом задачі динамічного програмування і зводиться до нелінійної моделі, але для її розв'язання застосовується простий метод поетапної оптимізації, який не використовує складних аналітичних методів теорії оптимізації та оптимального керування, зокрема, рівняння Беллмана.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
Частина I. Вища математика.....	7
Розділ 1. Елементи лінійної алгебри.....	7
1.1. Визначники та їхні властивості.....	7
1.2. Матриці. Дії з матрицями.....	11
1.3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Класифікація.....	14
1.4. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера.....	15
1.5. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом повного виключення.....	18
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>22</i>
Розділ 2. Елементи векторної алгебри	23
2.1. Поняття вектора.....	23
2.2. Лінійні операції з векторами.....	24
2.3. Лінійна незалежність (залежність) векторів.....	26
2.4. Базис. Розкладання вектора. Координати вектора.....	27
2.5. Координати вектора в прямокутній системі координат.....	27
2.6. Проекція вектора.....	29
2.7. Скалярний добуток векторів.....	30
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>33</i>
Розділ 3. Елементи аналітичної геометрії	34
3.1. Предмет аналітичної геометрії.....	34
3.2. Найпростіші задачі аналітичної геометрії.....	35
3.3. Різні види рівнянь прямої на площині.....	38
3.4. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.....	45
3.5. Відстань від точки до прямої.....	46
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	<i>46</i>
Розділ 4. Зразок та приклад розв'язання модульної контрольної роботи №1.....	48
4.1. Зміст контрольної роботи №1.....	48
4.2. Розв'язання контрольної роботи №1.....	49
Розділ 5. Вступ до математичного аналізу.....	57
5.1. Функції. Класифікація функцій.....	57
5.2. Поняття границі функції.....	59
5.3. Границя на нескінченності. Нескінченно великі функції.....	60
5.4. Односторонні границі.....	61
5.5. Нескінченно малі функції та їхні властивості.....	62
5.6. Зв'язок між нескінченно малими і нескінченно великими функціями...	62
5.7. Основні теореми про границі.....	64
5.8. Обчислення границь.....	65
5.9. Поняття неперервності функції.....	68
5.10. Властивості функцій неперервних на відрізку	69

5.11. Точки розриву функції та їхня класифікація.....	70
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	72
Розділ 6. Диференціальне числення функції однієї змінної.....	73
6.1. Поняття похідної функції.....	73
6.2. Задачі, які приводять до поняття похідної.....	75
6.3. Зв'язок між неперервністю і диференційовністю функції.....	77
6.4. Правила диференціювання.....	79
6.5. Похідна складеної функції.....	80
6.6. Похідна оберненої функції.....	80
6.7. Формули диференціювання основних елементарних функцій.....	81
6.8. Похідні вищих порядків.....	84
6.9. Рівняння дотичної і нормалі.....	84
6.10. Монотонність і екстремум функції.....	86
6.11. Диференціал функції.....	91
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	92
Розділ 7. Диференціальне числення функції багатьох змінних.....	93
7.1. Означення функції кількох змінних.....	93
7.2. Частинні похідні першого порядку.....	93
7.3. Частинні похідні вищих порядків.....	95
7.4. Похідна за напрямом. Градієнт.....	98
7.5. Екстремум функції кількох змінних.....	101
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	103
Розділ 8. Невизначений інтеграл.....	104
8.1. Первісна. Означення невизначеного інтегралу.....	104
8.2. Властивості невизначеного інтеграла.....	106
8.3. Таблиця основних інтегралів.....	107
8.4. Методи інтегрування.....	108
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	117
Розділ 9. Визначений інтеграл.....	118
9.1. Задача про площу криволінійної трапеції.....	118
9.2. Означення визначеного інтеграла.....	119
9.3. Властивості визначеного інтеграла.....	120
9.4. Інтеграл із змінною верхньою межею інтегрування.....	121
9.5. Формула Ньютона-Лейбніца.....	122
9.6. Заміна змінної інтегрування у визначеному інтегралі.....	124
9.7. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.....	126
9.8. Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування.....	127
9.9. Обчислення площ плоских фігур в декартовій системі координат.....	129
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	131
Розділ 10. Диференціальні рівняння першого порядку.....	132
10.1. Загальні поняття та означення.....	132
10.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.....	134
10.3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.....	137
10.4. Лінійні диференціальні рівняння.....	138
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	139

Розділ 11. Диференціальні рівняння вищих порядків.....	140
11.1. Основні поняття.....	140
11.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку.....	141
11.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.....	143
<i>Запитання для самоконтролю</i>	148
Розділ 12. Зразок та приклад розв'язання модульної контрольної роботи №2.....	149
12.1. Зміст контрольної роботи № 2.....	149
12.2. Розв'язання контрольної роботи № 2.....	150
Розділ 13. Завдання для розрахунково-графічних робіт. Вища математика.....	156
Література.....	177
Частина II. Теорія ймовірностей та математична статистика	178
Розділ 14. Основні поняття та теореми класичного розділу теорії ймовірностей.....	178
14.1. Предмет теорії ймовірностей. Випадкові події. Операції з подіями Повна група подій. Простір елементарних подій.....	178
14.2. Відносна частота події. Емпіричний закон стійкості відносних частот. Статистичне та класичне означення ймовірності події.....	181
14.3. Основні поняття та формули комбінаторики.....	185
14.4. Теорема додавання ймовірностей. Наслідки.....	187
14.5. Умовна ймовірність, незалежні та залежні події. Теореми множення ймовірностей. Формула повної ймовірності, формули Байєса.....	189
14.6. Обмеженість класичного означення. Аксиоматичне означення ймовірності події.....	193
<i>Запитання для самоконтролю</i>	195
Розділ 15. Повторні незалежні випробування (схема випробувань Бернуллі).....	196
15.1. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі. Найбільш ймовірна кількість разів появи події.....	196
15.2. Наближені формули в схемі випробувань Бернуллі.....	197
<i>Запитання для самоконтролю</i>	198
Розділ 16. Випадкові величини.....	199
16.1. Дискретні випадкові величини.....	199
16.2. Закони розподілу дискретних випадкових величин.....	200
16.3. Основні числові характеристики дискретних випадкових величин....	201
16.4. Числові характеристики розподілів Бернуллі, Пуассона, геометричного.....	205
16.5. Неперервні випадкові величини.....	206
16.6. Основні числові характеристики неперервних випадкових величин..	209
16.7. Закони розподілу неперервних випадкових величин.....	209
<i>Запитання для самоконтролю</i>	214
Розділ 17. Основні задачі математичної статистики. Статистичний розподіл вибірки.....	215

17.1. Предмет математичної статистики. Генеральна та вибіркова сукупності.....	215
17.2. Основні задачі математичної статистики. Незміщеність та обґрунтованість статистичних оцінок.....	216
17.3. Оцінювання ймовірності події в схемі випробувань Бернуллі.....	217
17.4. Варіаційний ряд, частота, відносна частота, статистичний розподіл вибірки. Полігон частот або відносних частот	217
17.5. Інтервальний статистичний розподіл вибірки. Емпірична функція . розподілу, гістограма частот або відносних частот.....	219
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	223
Розділ 18. Оцінювання невідомих параметрів закону розподілу: точкове та інтервальне.....	224
18.1. Точкові оцінки невідомих параметрів розподілу: математичного сподівання, дисперсії та середнього квадратичного відхилення.....	224
18.2. Ефективність статистичних оцінок.....	225
18.3. Інтервальні оцінки параметрів розподілу, довірча ймовірність та довірчий інтервал.....	227
18.4. Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при відомому значенні дисперсії.....	228
18.5. Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при невідомому значенні дисперсії.....	229
18.6. Довірчий інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення нормального розподілу	230
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	231
Розділ 19. Поняття статистичної гіпотези.Перевірка статистичної гіпотези.	232
19.1. Поняття статистичної гіпотези, основної та альтернативної. Помилки першого та другого роду. Критерій перевірки гіпотези. Потужність критерію.....	232
19.2. Перевірка статистичної гіпотези про закон розподілу за допомогою критерію згоди Пірсона χ^2 (“хі-квадрат“)......	233
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	234
Розділ 20. Зразок та приклад розв’язання модульної контрольної роботи №3.....	235
20.1. Зміст контрольної роботи № 3.....	235
20.2. Розв’язання модульної контрольної роботи № 3.....	236
Розділ 21. Завдання для розрахунково-графічної роботи.	
Теорія ймовірностей та математична статистика.....	252
Розділ 22. Додатки.....	264
Література.....	279
Частина III. Математичне програмування.....	281
Розділ 23. Лінійне програмування.....	281
23.1.Різні форми запису задач лінійного програмування.....	282
23.2. Симплекс-метод.....	285
23.2. Метод штучного базису.....	288
23.4.Двоїсті задачі.....	289

23.5. Транспортна задача.....	292
<i>Запитання для самоконтролю.....</i>	297
Розділ 24. Зразок та приклад розв'язання модульної контрольної роботи №4.....	298
24.1. Зміст контрольної роботи № 4.....	298
24.2. Розв'язання модульної контрольної роботи № 4.....	299
Розділ 25. Завдання для розрахунково-графічної роботи. Математичне програмування.	317
Розділ 26. Додатки.....	333
26.1. Алгоритм симплексного методу.....	333
26.2. Алгоритм двоїстого симплексного методу.....	334
26.2. Алгоритм методу потенціалів.....	335
Література	337

ЧАСТИНА I. ВИЩА МАТЕМАТИКА

РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1.1. Визначники та їхні властивості.

Алгебраїчний вираз $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, складений з елементів a_{ij} , $i, j = 1, 2$, квадратної таблиці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

яку називають матрицею, називається **визначником** другого порядку матриці, і позначається:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

де a_{ij} , $i, j = 1, 2$, – елементи визначника, перший індекс означає номер рядка, другий – номер стовпця, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij} (поняття визначника ввів Гаусс¹ в 1801 р.).

Елементи a_{11} , a_{22} утворюють головну діагональ, інші – побічну.

Отже, значення визначника другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної і побічної діагоналей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Приклад. Обчислити визначник другого порядку $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot (-\sin \alpha) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

¹ Карл Фрідріх Гаусс (1777 – 1855) – німецький математик, фізик, астроном і геодезист.

Вираз $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$,

складений з елементів квадратної таблиці (матриці) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

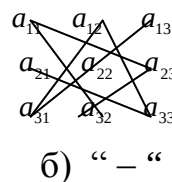
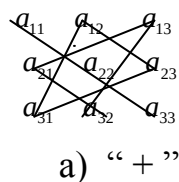
називається **визначником** третього порядку і позначається:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad (1)$$

Отже, визначник третього порядку є алгебраїчною сумою шести доданків (членів), кожен з яких є добутком трьох елементів, узятих по одному з кожного стовпця і кожного рядка з певним знаком.

Правило обчислення визначника третього порядку можна записати у вигляді двох таблиць (правило трикутника):



В таблиці а) лініями з'єднані ті елементи, добуток яких береться із знаком “плюс”, а в таблиці б) ті елементи, добуток яких береться із знаком “мінус”.

Приклад. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 1 = 28 - 28 = 0.$$

Правило обчислення визначника 3-го порядку можна також побудувати за іншою схемою (*правило Саррюса*¹), за якою праворуч від визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

дописуємо його перші два стовпці і дістаємо прямокутний

вираз. З нього члени визначника (1) з додатними знаками є сума добутків елементів, які з'єднані суцільною лінією, а члени з від'ємними знаками – сума добутків елементів, які з'єднані пунктирною лінією.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

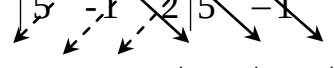

$$- - - + + +$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Приклад. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$


$$- - - + + +$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \cdot 5 + 0 \cdot 2 \cdot (-1) - 0 \cdot 3 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot (-1) - 0 \cdot 2 \cdot 2 = 6 + 4 = 10.$$

Властивості визначників.

Основні **властивості** визначників розглянемо на прикладі визначників 2-го порядку.

1. Визначник не зміниться, якщо рядки (стовпці) замінити відповідними стовпцями (рядками):

¹ П'єр Фредерік Саррюс (1798 – 1861) – французький математик.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

2. Якщо будь-який рядок (стовпець) визначника складається лише з нулів, то визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (стовпці) (не обов'язково сусідні), то зміниться знак визначника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

4. Якщо визначник містить два однакові рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.

5. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника помножити на довільне число $\alpha \neq 0$, то сам визначник помножиться на це число:

$$\begin{vmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

6. Визначник, який містить два пропорційні рядки (стовпці), дорівнює нулю.

7. Визначник не змінюється, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на число $\alpha \neq 0$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \alpha \cdot a_{21} & a_{12} + \alpha \cdot a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

1.2. Матриці. Дії з матрицями.

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де a_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, – елементи матриці (індекс i – номер рядка, j – номер стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}).

Матриця, яка має m рядків і n стовпців ($m \neq n$) називається **прямокутною** матрицею розмірності $m \times n$ (позначається $A_{m \times n}$ і читається так: матриця A розміру m на n). Термін «**матриця**» першим став вживати Д. Сильвестр¹.

Матриця, для якої $m = n$, називається **квадратною** матрицею n -го порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ утворюють головну діагональ матриці, а елементи $a_{1n}, \dots, a_{n1}$ – побічну діагональ.

Квадратна матриця називається **діагональною**, якщо її елементи $a_{ij} = 0$, $i \neq j$.

Одиничною матрицею називається діагональна матриця, в якій всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Транспонуванням матриці називається таке її перетворення, при якому рядки матриці стають стовпцями з тими ж самими номерами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A^T.$$

¹ Джеймс Джозеф Сильвестр (1814 – 1897) – англійський математик.

Матриця розміру $1 \times n$ називається **матрицею-рядком**, або **вектором**.

Наприклад, $A_{1 \times 4} = (1; 2; 3; 4)$.

Матриця розміру $m \times 1$ називається **матрицею-стовпцем**, або **вектором**.

Наприклад,

$$A_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Нульовою називається матриця, усі елементи якої дорівнюють нулю (позначається O).

Дві матриці A і B одного розміру називаються **рівними** (позначається $A = B$), якщо рівні їхні відповідні елементи: $a_{ij} = b_{ij}$.

Сумою (різницею) двох матриць одного розміру $A = A_{m \times n} = (a_{ij})$ і $B = B_{m \times n} = (b_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, називається матриця $C = C_{m \times n} = (c_{ij})$, елементи якої дорівнюють сумам (різницям) відповідних елементів a_{ij} і b_{ij} матриць A і B : $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Позначення: $C = A \pm B$.

Добутком матриці A на число λ називається матриця B , усі елементи якої є добутками відповідних елементів матриці A на задане число λ . Позначення:

$$B = A\lambda = \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Добутком матриці $A = A_{m \times k} = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, k}$, на матрицю $B = B_{k \times n} = (b_{ij})$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, n}$, називається матриця $C = C_{m \times n} = (c_{ij})$, яка має m рядків, n стовпців і довільний елемент якої c_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}. \text{ Позначення: } C = AB.$$

Зауваження.

1) Перемножити матриці A і B можна лише у разі, якщо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої. При цьому отримаємо матрицю C , яка має стільки рядків, скільки їх у матриці A , і стільки стовпців, скільки їх у матриці B .

2) Взагалі, для добутку матриць A та B не виконується властивість комутативності: $AB \neq BA$. Якщо ж $AB = BA$, то матриці A і B **комутативні**.

Приклад. Обчислити AB і BA , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до квадратної матриці A , якщо

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Для того, щоб матриця A мала обернену необхідно і достатньо, щоб її визначник не дорівнював нулю.

Квадратна матриця A називається *виродженою*, якщо її визначник Δ дорівнює нулю, і *невиродженою*, якщо $\Delta \neq 0$.

1.3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Класифікація.

Системою m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими називається сукупність рівнянь, для яких ставиться задача про знаходження їхніх спільних розв'язків:

[illegible]

де $x_j, j = \overline{1, n}$, – невідомі, $a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, – коефіцієнти при невідомих, $b_i, i = \overline{1, m}$, – вільні члени рівнянь системи.

Якщо хоча б один з вільних членів системи (2) не дорівнює нулю, то вона називається **неоднорідною**, а якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, то – **однорідною**.

Розв'язком системи (2) називається така впорядкована множина чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, підстановка яких відповідно замість $x_1, x_2, \dots, x_n$ перетворює кожне рівняння системи на тотожність.

Система називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв'язок; сумісна система називається **визначеною**, якщо вона має тільки один розв'язок, і **невизначеною**, якщо вона має безліч розв'язків; система називається **несумісною**, якщо вона не має жодного розв'язку.

1.4. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера.

Нехай задано систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими x_1, x_2 .

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (3)$$

Припустимо, що $a_{ij} \neq 0, i, j = 1, 2$. Помножимо обидві частини першого рівняння на a_{22} , другого – на $(-a_{12})$ і додамо їх; потім помножимо обидві частини першого рівняння на $(-a_{21})$, другого – на a_{11} і додамо їх, у результаті дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ x_2(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases} \quad (4)$$

Множники при x_1, x_2 і вирази в правих частинах системи (4) побудовані за одним правилом.

Наприклад, вираз $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ є визначником $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ матриці

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ коефіцієнтів системи (3).

Запишемо систему (4) у вигляді:
$$\begin{cases} x_1 \cdot \Delta = \Delta_1, \\ x_2 \cdot \Delta = \Delta_2, \end{cases}$$

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Отже, у випадку, коли $\Delta \neq 0$, невідомі x_1, x_2 можна знайти за формулами:

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, які називають формулами **Крамера**¹ (він запропонував метод в 1750 р.).

Визначник Δ , складений з коефіцієнтів системи (3), називається головним визначником системи. Визначники Δ_1 та Δ_2 утворюються з визначника Δ відповідно заміною стовпців при невідомих вільними членами та називають допоміжними.

Зауваження. Систему можна розв'язувати за формулами Крамера у випадку, коли кількість рівнянь системи дорівнює кількості невідомих.

Формули можна використати для **дослідження** системи (теорема Крамера). Можливі такі випадки:

1) $\Delta \neq 0$. Тоді система (3) має єдиний розв'язок (визначена), який можна знаходити за формулами Крамера.

2) $\Delta = 0$, а хоча б одне з чисел Δ_1, Δ_2 не дорівнює нулю, то система не має жодного розв'язку (несумісна).

¹ Габрієль Крамер (1704 – 1752) – швейцарський математик, один із творців лінійної алгебри.

3) $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Тоді система сумісна, невизначена (безліч розв'язків).

Можна довести, що теорема Крамера справджується також у випадках, коли деякі із коефіцієнтів a_{ij} дорівнюють нулю.

Система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими x_1, x_2, x_3 має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (5)$$

Матриця, утворена з коефіцієнтів при невідомих, називається основною матрицею системи:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матриця утворена з коефіцієнтів при невідомих і вільних членів називається розширеною матрицею системи:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right).$$

Визначник, складений з елементів основної матриці системи, називається **головним** визначником системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Визначник, отриманий з головного визначника системи шляхом заміни елементів i – го, $i=\overline{1,3}$, стовпця відповідними вільними членами, називається **допоміжним** визначником системи:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Формули Крамера для системи 3-х рівнянь прийmemo без доведення, вони мають вигляд:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \Delta \neq 0.$$

При розв'язуванні системи (5) можливі такі випадки (теорема Крамера):

1) $\Delta \neq 0$. Тоді система (5) має єдиний розв'язок (визначена), який можна знаходити за формулами Крамера.

2) $\Delta = 0$, а хоча б одне з чисел $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ не дорівнює нулю, то система не має жодного розв'язку (несумісна).

3) $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Тоді система сумісна, невизначена (безліч розв'язків) або несумісна.

Якщо задано *однорідну* ($b_1 = b_2 = b_3 = 0$) систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими x_1, x_2, x_3 , то вона завжди сумісна, так як вона має розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, який називається нульовим або тривіальним.

Якщо визначник системи $\Delta \neq 0$, то тривіальний розв'язок буде єдиним розв'язком системи. Якщо $\Delta = 0$, тоді система має нескінченну множину розв'язків.

1.5. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом повного виключення невідомих.

Існує ефективний метод розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь з довільною кількістю рівнянь, який називається методом повного виключення невідомих.

Алгоритм методу:

1) Складається розширена матриця системи: основна – матриця коефіцієнтів при невідомих та стовпчик правих частин.

2) Вибирається ключовий (розв'язувальний) елемент, який повинен бути відмінним від нуля (ключовий елемент можна вибирати тільки один раз у кожному рядку та стовпчику). Рядок, у якому стоїть ключовий елемент, називається робочим, стовпчик – ключовим.

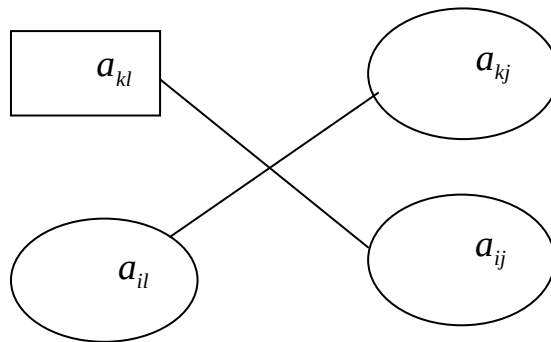
3) Елементи робочого рядка переписуються без змін.

4) Елементи ключового стовпчика, крім ключового, замінюються нулями.

5) Елементи рядка, який містить нуль у ключовому стовпчику, переписуються без змін.

6) Елементи стовпчика, який містить нуль у робочому рядку, множаться на ключовий елемент.

7) Всі інші елементи перераховуються за правилом прямокутника:
 $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} \cdot a_{kl} - a_{kj} \cdot a_{il}$, де a_{kl} – ключовий елемент, a_{ij} – елемент, який перераховується, $\tilde{a}_{ij}$ – перерахований елемент.



8) Пункти 2)–7) повторюються.

9) Процес перетворювань закінчується, якщо використано всі можливі рядки або стовпчики для вибору ключових елементів, або зроблено висновок про несумісність системи.

10) Кожний рядок розширеної матриці ділиться на відповідний ненульовий елемент основної матриці, який стоїть на місці ключового.

11) Якщо після закінчення перетворень основна матриця перетворилась на квадратну, то система визначена. Її рядки переставляються так, щоб основна матриця перетворилась на одиничну. Тоді останній стовпчик розширеної матриці містить розв'язок системи.

12) Якщо після закінчення перетворень основна матриця перетворилась на прямокутну, причому кількість її рядків менша кількості стовпчиків, то система невизначена. Змінні, які відповідають ключовим стовпчикам, є залежними (базисними), інші незалежними та набувають довільних значень із множини дійсних чисел. Залежні змінні виражаються через незалежні, та записується множина розв'язків системи.

13) Якщо на будь-якому кроці перетворень всі елементи деякого рядка основної матриці перетворились на нулі, а відповідний елемент стовпчика правих частин відмінний від нуля, то система несумісна.

Зауваження.

- 1) За ключовий елемент зручно вибирати одиницю.
- 2) Елементи рядка розширеної матриці можна ділити або множити на число, відмінне від нуля.
- 3) Із рівних або пропорційних рядків розширеної матриці один залишається, інші відкидаються (еквівалентні рівняння).
- 4) Рядок розширеної матриці, який складається із нулів, відкидається (одержано тотожність).

Приклад. Розв'язати систему однорідну систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-1) \cdot 10 + 4 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \cdot 5 - 3 \cdot 4 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 =$$

$$= -30 + 80 + 4 + 10 - 24 - 40 = 0.$$

Система є однорідною та має нескінченну множину розв'язків, оскільки $\Delta = 0$. Знайдемо множину розв'язків методом повного виключення.

Матриця коефіцієнтів системи і матриця-стовпець вільних членів відповідно мають вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Складемо розширену матрицю системи

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 10 & 0 \end{array} \right).$$

За ключовий елемент можна брати будь-який ненульовий елемент матриці A . Для спрощення обчислень, при наявності, бажано вибирати елемент, який дорівнює одиниці. Тому, можна вибрати за ключовий елемент $a_{21} = 1$. Далі пункти 3), 4) і 7) алгоритму. Знаком $\sim$ (еквівалентність) позначено, що перетворення не змінюють розв'язку системи.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 0 \\ [1] & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 10 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & -10 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \end{array} \right).$$

Після першого кроку одержали два пропорційні рядки (перший і третій), тому перший рядок залишили, а третій відкинули. Зробимо ще один крок методу повного виключення. Ключовим елементом виберемо $a_{12} = 7$ (можна було б вибрати і інший елемент матриці, при цьому елементи другого рядка і першого стовпчика участі не приймають, так як перед цим ключовим було вибрано a_{21}). Повторимо пункти 3), 4) і 7) алгоритму.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & -10 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & [7] & -10 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -10 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & -10 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 18 & 0 \end{array} \right) \div 7 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \frac{-10}{7} & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 18 & 0 \end{array} \right).$$

Кількість рядків основної матриці менша, ніж кількість стовпчиків, тому система невизначена, тобто має безліч розв'язків. Змінні x_1 та x_2 , які відповідають ключовим стовпчикам, є залежними (базисними), а x_3 — незалежною змінною і приймає будь-які значення із множини дійсних чисел.

Випишемо систему рівнянь, яка відповідає останній матриці, та виразимо залежні змінні x_1 і x_2 через незалежну x_3 .

$$\begin{cases} x_2 - \frac{10}{7} x_3 = 0, \\ x_1 + \frac{18}{7} x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{10}{7} x_3, \\ x_1 = -\frac{18}{7} x_3. \end{cases}$$

Зробимо перевірку розв'язку підстановкою у рівняння.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0; \\ 5x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cdot \left(-\frac{18}{7} x_3\right) + 4 \cdot \frac{10}{7} x_3 + 2x_3 = 0, \\ -\frac{18}{7} x_3 - \frac{10}{7} x_3 + 4x_3 = 0, \\ 5 \cdot \left(-\frac{18}{7} x_3\right) + 2 \cdot \frac{10}{7} x_3 + 10x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{54}{7} x_3 + \frac{40}{7} x_3 + 2x_3 = 0, \\ -\frac{18}{7} x_3 - \frac{10}{7} x_3 + 4x_3 = -0, \\ -\frac{90}{7} x_3 + \frac{20}{7} x_3 + 10x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0x_3 = 0, \\ 0x_3 = 0, \\ 0x_3 = 0. \end{cases}$$

Всі рівності виконуються для будь-яких дійсних значень x_3 .

Відповідь: система невизначена, множина розв'язків має вигляд

$$\vec{x} = \left(\frac{10}{7} x_3; -\frac{18}{7} x_3; x_3 \right), x_3 \in \mathbb{R}.$$

Запитання до самоконтролю

1. Сформулюйте означення визначника.
2. Що називається системами лінійних алгебраїчних рівнянь?
3. Яка система лінійних рівнянь називається сумісною, несумісною, визначеною, невизначеною?
4. Запишіть формули Крамера. Коли застосовуються формули Крамера?
5. Що називається матрицею? Як позначають елементи матриці? Якими символами прийнято позначати матрицю?
6. Дайте визначення розміру матриці. Яка матриця називається квадратною?
7. Яка матриця називається матрицею-рядком, а яка – матрицею-стовпцем?
8. Яка матриця називається діагональною, одиничною?

9. Як за даною матрицею одержати транспоновану матрицю?

10. Дайте визначення оберненої матриці. За яких умов існує матриця обернена заданій?

11. У чому полягає метод повного виключення розв'язання систем лінійних рівнянь?