МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Островерхов М.Я., Сільвестров А.М., Кривобока Г.І.

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ КЕРУВАННЯ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 141-«Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», які навчаються за освітньою програмою «Електротехнічні пристрої та електротехнологічні комплекси»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Рецензенти: *А.І. Бідюк*, доктор технічних наук, професор Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
А.П. Ладанюк, доктор технічних наук, професор Національного університету харчових технологій
А.І. Жученко, доктор технічних наук, професор Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Відповідальний редактор *Бойко В.С.,* д-р. техн. наук, професор

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 3 від 05.11.2020 р.) за поданням Вченої ради факультету електроенерготехніки та автоматики (протокол № 3 від 26.10.2020 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Островерхов Микола Якович, д-р техн. наук, професор
Сільвестров Антон Миколайович, д-р техн. наук, професор
Кривобока Галина Іванівна, викладач

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ КЕРУВАННЯ

Ідентифікація електротехнічних об'єктів керування [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», *які навчаються за освітньою програмою «Електротехнічні пристрої та електротехнологічні комплекси»*/ М. Я. Островерхов, А.М. Сільвестров, Г.І. Кривобока; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 22 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 353 с.

Навчальний посібник призначено для вивчення та використання в лабораторних роботах студентами, науковими працівниками – в роботі по дослідженню реальних об'єктів керування в різних областях науки і техніки. Для високоякісного керування реальними об'єктами необхідно побудувати математичну модель причинно – наслідкових зв'язків. В посібнику подано матеріал, як від загального підходу, використовуючи принцип орієнтації на головну ціль, побудувати за апріорними даними і результатами натурного експерименту на об'єкті, таку математичну модель, за якої якнайкраще вирішується головна задача (управління об'єктом).

Призначено для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», які навчаються за освітньою програмою «Електротехнічні пристрої та електротехнологічні комплекси» факультету електроенерготехніки та автоматики.

© М. Я. Островерхов, А.М. Сільвестров, Г.І. Кривобока
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

ВСТУП

Існує декілька фундаментальних законів, пізнання яких необхідне для людства. «Свобода — це усвідомлена необхідність», тобто необхідність слідування цим фундаментальним законам світу. Один із них, непізнання якого часто призводить до негативних наслідків у техніці, суспільстві, здоров'ї та інших сферах, це *закон причино-наслідкового зв'язку*.

Засновник кібернетики Норберт Вінер вважав, що вміння жити — це жити з перспективою, тобто діючи зараз, треба чітко розуміти, до чого це призведе в майбутньому (через мить, хвилину, час, рік і т. д.). Чим конкретніше, точніше математична модель зв'язку між причиною і її наслідком, тим своєчасніше можна вплинити на зміну причини так, щоб наслідок був якомога кращим.

На основі попередньої (апріорної) і поточної (апостеріорної) інформації про причини (вхідні змінні об'єкта) і наслідки (вихідні змінні) теорія ідентифікації (особливо її прикладна частина) займається визначенням якомога більш точної математичної моделі, що зв'язує ці змінні. На жаль, абсолютно точну ізоморфну реальному об'єкту модель побудувати неможливо, оскільки за іншими законами реального світу не існує ідеально ізольованого автономного об'єкта (все з усім взаємно пов'язане); не існує нічого стаціонарного (сталого), бо рух і матерія світу нероздільні, а виходячи з цього, як наслідок, не існує лінійних стаціонарних систем. Отже, будь-яка математична модель реального об'єкта буде наближеною. Для отримання якісного наслідку в задачах керування об'єктом, діагностики внутрішніх параметрів і змінних стану об'єкта, необхідно методами теорії ідентифікації побудувати таку математичну модель об'єкта, за якої якнайкраще вирішується головна задача (керування, прогноз, діагностика, тощо). Резюмуючи, можна сказати, що «Теорія ідентифікації» — це фактично формалізована математична теорія пізнання об'єктів реального світу. Останні можна проранжирувати за важливістю наслідків того, наскільки якісно вирішено задачу ідентифікації.

Від якості моделі залежить якість керування об'єктом, безпека, інколи навіть життя людей. Виходячи з цього, «Теорія ідентифікації» посідає одне з найважливіших навчальних курсів.

Важливим інструментом для розв'язання складних задач ідентифікації є системний підхід (розділ 1). Система ідентифікації розглядається як підсистема багаторівневої системи, де використано принципи декомпозиції, композиції, оптимізації. Для грубого визначення причинно-наслідкових зв'язків у техніці, економіці, та ін. детально розглянуто апарат регресійного аналізу (розділ 2). У розділі 3 подано декомпозицію статистично оптимальних методів ідентифікації від баєсівського методу до гауссівського. Реальність, на жаль, така, що не завжди виконуються умови, за яких статистичні методи оптимальні. Так у розділі 4 розглянуто низку методів, які враховують неточність вимірювання не лише наслідків, а й причини. Суттєве спрощення задачі вибору структури моделі досягається урахуванням законів фізики процесів у об'єкті. Такий підхід подано в розділі 5. Конкретні моделі динамічних об'єктів і методи їх активної ідентифікації наведено в розділах 6, 7, 8. Ці методи гарантують високу точність і об'єктивність задачі ідентифікації динаміки і статики динамічних об'єктів.

Автори щиро дякують рецензентам за багато корисних зауважень, завдяки яким вдалося істотно покращити структуру і зміст посібника, призначеного для студентів, аспірантів, докторантів вищих навчальних закладів України та наукових працівників.

Розділ 1

СИСТЕМНИЙ ПІДХІД ДО ЗАДАЧІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

1.1. Визначення системи

Початковим кроком вирішення задачі ідентифікації є етап формалізації. На цьому етапі повинна бути поставлена задача. Постановка полягає у відображенні невизначеної ситуації, що пов'язана з реальним об'єктом, у формалізовану задачу, визначену на множині кількісно порівнянних елементів. Такими елементами є система, процеси, що в ній протікають, критерії (цілі) і стратегії їх оптимізації (досягнення цілей).

Загальне математичне визначення системи дано Р. Калманом [1], де з урахуванням умов фізичної реалізованості наведено визначення стаціонарної, дискретної, безперервної, скінченновимірної, лінійної, гладкої і динамічної систем з точки зору їх зовнішньої поведінки; визначено необхідні умови існування математичних моделей. Для гладких систем доведено теорему про те, що перехідна функція стану відображає вигляд

$$T \times T \times X \times \Omega \to X ,$$

який водночас є розв'язанням диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x, u\right), \tag{1.1}$$

де $x \in X$, $u\left(t\right) = \omega\left(t\right) \in \Omega$; $t \in T$; T — впорядкована множина моментів часу Ω; X — множина вхідних впливів і змінних стану.

Стан системи — це та мінімальна інформація про минуле, яка необхідна для повного опису майбутньої поведінки (тобто вихідних змінних) системи, якщо поведінка її вхідних змінних відома, починаючи з поточного часу t_0.

Якщо множина X належить скінченновимірному простору, то модель (1.1) являє собою скінченновимірну систему нелінійних нестаціонарних диференціальних рівнянь першого порядку.

Із системи (1.1) за певних припущень можуть бути отримані системи лінійних і (або) стаціонарних рівнянь, дискретна система також лінійна і (або) стаціонарна. Що вужча область визначення змінних $\{X, \Omega, T\}$, то ближче в просторі X буде спрощена модель (1.2) до повної (1.1). Для гладкої системи (1.1), має місце існування таких $X_1 \subset X, \omega_1 \subset \Omega, T_1 \subset T$, що (з точністю до наперед заданої малої ε) системі (1.1) буде еквівалентна система лінійних диференціальних рівнянь з матрицями A і B постійних коефіцієнтів:

$$\dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + Bu_1(t); \quad y_1(t) = Cx_1(t), \tag{1.2}$$

де $\dot{x}_1(t)$ — вектор-функція $\{x_i(t)\}$; $i = \overline{1,n}$; $u_1(t)$ — вектор-функція $\{u_j(t)\}$, $j = \overline{1,m}$; $\dot{x}_1(t)$ — вектор-функція похідних $\{\dot{x}_1(t)\}$, $i = \overline{1,n}$; $y_1(t)$ — вектор-функція вимірювань $\{y_1(t)\}$, $i = \overline{1,r}$; A, B, C — матриці розміру $(n \times n), (n \times m), (r \times n)$ відповідно.

Структура і рангові властивості матриць A, B, C визначають умови *керованості, спостережуваності й ідентифікаційності* системи (1.2) [2; 3].

Критерій оптимізації або мета, поставлена системою більш високого рівня ієрархії, може мати «розмитий» характер. Однак у багатьох випадках формалізація критерію (цілі) досягається шляхом завдання функціонала, який однозначно визначає ефективність поведінки системи. Мета системи — забезпечення екстремального значення цього функціоналу. Під функціоналом розуміють відображення

$$T \times T \times X \times \Omega \to R,$$

де R — множина дійсних чисел.

Системі (1.1) для фіксованих початкових $t_0 \in T$ і кінцевих $t_1 \in T$ моментів часу, станів $x_0 \in X, x_1 \in X$, поведінки системи $x(t)$, викликаної не нульовими початковими умовами та керуючим впливом $u(t)$, відповідає конкретне дійсне число I з R.

Управління $u^*(t)$ оптимальне, якщо число I з урахуванням початкових умов, рівняння (1.1) та інших обмежень на $x(t)$ і $u(t)$

приймає екстремальне (мінімальне або максимальне) значення $I^* \in R$. Для знаходження оптимальної стратегії управління $u^*(t)$ реальним об'єктом необхідна його модель (1.1), тобто вид і параметри функціонального відображення f.

Визначення відображення f у (1.1) за результатами вимірів x(t), u(t) є задачею ідентифікації.

Оптимальність моделі $\hat{f}$ відображення f оцінюється критерієм якості ідентифікації J, який також є функціоналом, що відображає множини реалізацій або конкретні реалізації $x(t)$ і $x_м(t)$ в дійсне число J, де $x_м(t)$ є розв'язком рівняння моделі

$$\frac{dx_м}{dt} = \hat{f}\left(t, x_м, u\right) \tag{1.3}$$

для спільної з об'єктом вхідної дії $u(t)$.

Так як в загальному випадку $\hat{f} \neq f$, то значення $\hat{I}^*$ отримане при керуючому впливі на об'єкт $u(t)$, для моделі (1.3), буде гірше істинного оптимального значення I^*.

Модель (1.3), побудовану з урахуванням не тільки функціонала J, але і I, називають цілеорієнтированою [3].

Якщо на множині $\{f_i\}$ (i = 1, 2, …n) допустимих відображень відображення $\hat{f}$ (1.3) для фіксованого управління $u(t)$ дає екстремальне значення $\hat{I}^*$, тобто

$$\hat{f} = arg \underset{\hat{f}_i \in \{\hat{f}_i\}}{extr}\ I,$$

то таку модель називають *цілеорієнтованою оптимальною*.

Близькість моделі до *цілеорієнтованої* оптимальної визначається близькістю вимірюваних змінних $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ до дійсних змінних $x(t)$ і $u(t)$ реального об'єкта.

При розв'язанні задачі ідентифікації в (1.3) і в $J(x, x_м)$ підставляють не $x(t)$ і $u(t)$, а їх оцінки $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$, формування яких є задачею ідентифікації сигналів об'єкта.

Оцінки $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ сигналів $x(t)$ і $u(t)$ в (1.1) отримають за допомогою фільтрів $f_ф$:

$$\frac{d\hat{z}}{dt} = f_{\text{ф}}\left(t, \hat{z}, z\right), \tag{1.4}$$

де $z(t)$ — вектор-функція виміряних первинними перетворювачами сигналів $x(t)$ і $u(t)$ $z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix}$, N_x, N_u — помилки вимірювання x і u відповідно.

Оптимальність фільтрів (1.4) оцінюється критерієм якості фільтрації $J_{\text{ф}}$ — функціоналом від сигналів $\hat{z}, z$ або їх спектральних характеристик.

Оскільки $f_{\text{ф}}$ не дає ідеального перетворення z в (x, u), то від критерію $J_{\text{ф}}$ в задачі ідентифікації сигналів $\hat{z}, z$ буде залежати значення критерію J в задачі ідентифікації відображення $\hat{f}$ в (1.3), від якого, у свою чергу, залежить значення критерію I якості управління реальним об'єктом. Так само як і для моделі (1.3), для фільтра (1.4) введемо поняття цілеорієнтованості та оптимальності. Фільтр (1.4) цілеорієнтований, якщо при його побудові певним чином бралася до уваги задача ідентифікації $\hat{f}$ в (1.3). Якщо на множині допустимих відображень $\left\{ f_{\text{ф}i} \right\}$ відображення $f_{\text{ф}}$ в (1.4) при фіксованому $\hat{f}$ забезпечує екстремальне значення J^*, тобто

$$f_{\text{ф}} = arg \underset{f_{\text{ф}i} \in \left\{ f_{\text{ф}i} \right\}}{extr} J,$$

то фільтр (1.4) буде *цілеорієнтованим оптимальним.*

Оптимізація функціоналів I, J, $J_{\text{ф}}$ пов'язана з поняттям *релаксаційного процесу* [4]. Множина $\{Q_k\}$, $k \geq 0$, кожен елемент якої належить деякій (зазвичай опуклій) області G нормованого простору, називають *релаксаційним процесом* (РП) щодо оптимізуємої функції $F(Q_k)$, якщо послідовність $F(Q_k)$, для упорядкованого за значенням k також упорядкована. Так, в задачі мінімізації послідовність $F(Q_k)$ така, що $F(Q_0) \geq F(Q_1) \geq F(Q_2) \geq$ $\geq$...РП збігається за функціоналом, якщо

$$\lim_{k \to \infty} (F\left(Q_k\right) - F(Q^*)) = 0,$$

і просто збігається, якщо

$$\lim_{k\to\infty} Q_k = Q^*,$$

де Q^* — істинне значення.

Визначення РП спробуємо розширити на випадок, якщо елементи Q_k належать області G простору, в якому не задано поняття норми або відстані, знак ≥ розуміється як символ відношення порядку. Так, наприклад, в задачі ідентифікації при введенні підмножини структур Σ моделей і множин методів *Opt* оцінювання вектора β параметрів моделі (Σ, β) РП не є строго релаксаційним. Множину $\{Q_k\}$, $k \geq 0$, назвемо РП щодо $F(Q_k)$, якщо для будь-якого $k > 0$, існує таке значення $j > 0$, що $F_{k+j} \leq F_k$. Такий РП не є релаксаційним, і збіжність його за функціоналом F або за Q_k залежить від розмірності і впорядкованості підмножини ненормованих елементів (у нашому випадку це {Σ, *Opt*}).

Системою ідентифікації в загальному вигляді будемо називати прямий добуток підмножин {Σ, ß}, {*Opt*, α}, {*J*}, {*I*}, {*T*}, що позначається як {Σ, β}, {*Opt*, α}, {*J*}, {*I*}, {*T*} і наділений структурою, яка дозволяє реалізувати релаксаційний процес $\{Q_k\}$ відносно показника F, такий що $F_{k+j} \leq F_k$, $k = 1, 2\ldots$; $j > 0$; $Q_k \in \{\{\Sigma,\beta\},\{Opt,\alpha\}\} F_k \in \{\{J\},\{I\}\}$. Тут $\{\Sigma,\beta\}$ — підмножина моделей; $\{Opt,\alpha\}$ — підмножина методів оцінювання вектора параметрів моделей $\{\Sigma,\beta\}$; α — вектор параметрів методу *Opt*; {*J*} — підмножина оптимізуємих за β методами $\{Opt,\alpha\}$ функціоналів від $\varepsilon(\beta,t)$; $\varepsilon(\beta,t)$ — різниця вимірюваних координат реального об'єкта Σ_∞ і моделі; {*I*} — підмножина основних функціоналів, що визначають якість розв'язання основної задачі для реальної системи Σ_∞ з використанням моделі $\{\Sigma,\beta\}$; $\{T\}$ — підмножина моментів t_k часу, на якому реальну систему Σ_∞ представлено набором даних $\{u(t_k), y(t_t)\}$ у вигляді системи з погляду її зовнішнього поводження [1].

У практичному застосуванні система ідентифікації тим ефективніша, чим менше потрібно для її роботи апріорної інформації. Забезпечення необхідної якості ідентифікації досягається *адаптацією* [3; 5; 10; 20], *що полягає в цілеспрямованій*

зміні одного або всіх елементів підмножини $\{Q_k\}$ *з метою досягнення екстремуму головного показника F.* За інших рівних умов, чим краще алгоритм адаптації, тим ефективніша система. Якщо не враховувати фактор складності, то у разі адаптації $\{Q_k\}$ результат тим ефективніший, чим ширша підмножина $\{Q_k\}$. При врахуванні в показнику *F* складності системи існує оптимальна за *F* потужність підмножини $\{Q_k\}$.

Зазвичай в адаптивних системах ідентифікації підмножина $\{Opt, \alpha\}$ за типом методу *Opt* одноелементна. Спільним для всіх видів систем ідентифікації є наявність РП $\{\beta_k\}$ щодо показника *J*, різним — склад підмножин $\{Q_k\}$ і $\{F_k\}$.

У табл. 1.1 визначено різні за $\{Q_k\}$ і $\{F_k\}$ системи ідентифікації.

Таблиця 1.1

Систематизація систем ідентифікації

№ з/п	Тип сигналу	$\{\beta_k\}$	$\{Q_k\}$		$\{Opt_k\}$	$\{F_k\}$	
		β	Σ	α	*Opt*	*J*	*I*
1	сі	$\{\beta_k\}$	Σ	α	*Opt*	*J*	–
2	СІ	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma\}$	α	*Opt*	*J*	–
3	асі	$\{\beta_k\}$	Σ	$\{\alpha_k\}$	*Opt*	*J*	–
4	АСІ	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma\}$	$\{\alpha_k\}$	*Opt*	*J*	–
5	басі	$\{\beta_k\}$	Σ	$\{\alpha_k\}$	$\{Opt\}$	$\{J_k\}$	*I*
6	БАСі	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma\}$	$\{\alpha_k\}$	$\{Opt\}$	$\{J_k\}$	*I*
7	СС	$\{\beta_k\}$	$\{\Sigma\}$	$\{\alpha_k\}$	$\{Opt\}$	$\{J_k\}$	$\{I_q\}$

1. Системи ідентифікації у вузькому сенсі (сі) реалізують РП $\{\beta_k\}$ щодо *J* за постійних Σ, *Opt*, α і порожній множині *I*, тобто $Q_k = \{\beta_k\}$, $F = J$. Тут задача ідентифікації є еквівалентною задачі оптимізації функції $J(\beta_k)$, яка, залежно від виду *J*, може бути вирішена методами теорії лінійного або нелінійного оцінювання або алгоритмами математичного програмування.

2. Системи ідентифікації в широкому сенсі (СІ) реалізують РП $\{\Sigma_k, \beta_k\}$ щодо *J* за постійних *Opt* α, і порожній множині *I*, тобто $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k\}$, $F = J$. Наприклад, у працях [3; 5; 6] розглянуто динамічні ортогональні, ноніусні або регресійні моделі з вектором

β_k змінної розмірності, для яких оптимальна по J пара $\{\Sigma^*, \beta^*\}$ визначається за умови

$$\left\{\Sigma^*, \beta^*\right\} = \arg \min_{\{\Sigma_k, \beta_k\}.} J\left\{\Sigma_k, \beta_k\right\}.$$

3. Адаптивні системи ідентифікації у вузькому сенсі (асі) реалізують РП $\left\{\beta_k, \alpha_k\right\}$ щодо J при постійному *Opt* і порожній множині I, тобто $Q_k = \left\{\beta_k, \alpha_k\right\}$, $F = J$.

Так, системи [7; 8; 15], що використовують прискорений градієнтний спуск $\{\beta_k\}$ по J, як α_k мають параметр регуляризації, що оптимізується за допоміжної умови мінімуму різниці середньоквадратичних значень похибок для двох однотипних моделей, що настроюються однаковими алгоритмами *Opt*, але відрізняються параметром α: для першого $\alpha = \alpha_k$, для другого $\alpha = \alpha_k + \Delta$, де $\Delta > 0, \alpha_k > 0$.

4. Адаптивні системи ідентифікації в широкому сенсі (АСІ) реалізують РП $\left\{\Sigma_k, \beta_k, \alpha_k\right\}$ щодо показника J при постійному *Opt* і порожній множині I, тобто $Q_k = \left\{\Sigma_k, \beta_k, \alpha_k\right\}$, $F = J$. Наприклад, системи вибору «найкращої регресії», при оцінюванні вектора β, який розширюється за розмірністю, із застосуванням регуляризувального параметра α, підбираємо за алгоритмом гребеневої регресії [11].

5. Багаторазово адаптивні системи ідентифікації у вузькому сенсі (басі) реалізують щодо основного показника I РП $\left\{\beta_k, Opt_k, \alpha_k\right\}$ у вигляді композиції двох РП:

а) РП $\left\{\beta_{kn}\right\}, n = 1, 2, ...,$ щодо J_k;

б) РП $\left\{Opt_k, \alpha_k, I_k\right\}$, k = 1,2,..., щодо I; тобто $Q_k = \left\{\beta_k, Opt_k, \alpha_k\right\}$, $F = \left\{\left\{I_k\right\}, \left\{I\right\}\right\}$. Поняття багаторазовості пов'язано з повторенням РП $\left\{\beta_{kn}\right\}$ для кожного елемента $\left\{Opt_k, \alpha_k, I_k\right\}$ РП більш високого рангу.

Часто кожному показнику J_k відповідає конкретний метод *Opt* або для евристичних алгоритмів показник J_k взагалі відсутній, тоді відносно *I* оптимізується пара «метод–його параметри» $\{Opt_k, \alpha_k\}$.

Прикладом може служити система «БАСІ-1» [5; 10], в якій для заданої за одним із п'яти показників *I* (або їх зваженої сумі), що включають критерії регулярності та незміщеності [11], точності прогнозування по моделі і т. п., із семи методів $\{Opt_k\}$ і їх параметрів $\{\alpha_k\}$ — визначався оптимальний елемент $\{\beta^*, Opt^*, \alpha^*\}$ згідно з пп. 5*а* і *б*.

6. Багаторазові адаптивні системи ідентифікації в широкому сенсі (БАСІ) реалізують відносно головного показника *I* РП $\{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$ у вигляді композиції двох РП:

а) РП $\{\beta_{kn}\}$ n = 1, 2,…, щодо J_k;

б) РП $\{\Sigma_k, Opt_k, \alpha_k, I_k\}$, k = 1,2,..., щодо *I*, тобто $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$, $F = \{\{I_k\}, I\}$, де *I* — показник більш високого рівня.

Прикладом БАСІ (при одноелементної множині $\{Opt\}$) є системи, побудовані на основі методу групового обліку аргументів [11], у яких структуру Σ і параметри β підбирають з умови екстремуму *I*. За інших рівних умов обґрунтоване [10] розширення множини $\{Opt_k\}$ дозволить отримати моделі, більш ефективні за критерієм *I*.

Якісною відмінністю систем за пп. 5, 6 є їх цілеорієнтація на показник *I*, який регулює і оптимізує задачу вибору $\{\Sigma^*, \beta^*, Opt^*, \alpha^*\}$. У багаторазово адаптивних системах знімається традиційне для систем за пп. 1–4 питання: як оцінити якість моделі, отриманої в результаті ідентифікації [9]? Якість моделі оцінюють за показником *I*. Це найбільш об'єктивна оцінка, так як хороша та модель, застосування якої дає найкраще рішення основної задачі, якість якої визначено показником *I*.

7. Системи керування, що самоорганізуються (СС) реалізують щодо деякого показника Λ (*I*) РП $\{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k, J_k, I_k\}$, у вигляді композиції трьох РП:

а) РП, $\{\beta_{qkn}\}$, n = 1, 2,.. (q і k постійні), щодо J_{qk} зі стаціонарною точкою

$$\beta_{qk} = \arg \underset{\beta_{qkn}}{\text{extr}}\, J_{qk}(\beta_{qkn}, \Sigma_q, Opt_{qk}, \alpha_{qk}) = \arg J_{qk}^*;$$

б) РП $\left\{J_{qk}^*\left(\beta_{qk}, \Sigma_{qk}, Opt_{qk}, \alpha_{qk}\right)\right\}$, k = 1, 2,... (q постійне), щодо I_q зі стаціонарною точкою

$$J_q^* = J_q\left(\beta_q, \Sigma_q, Opt_q, \alpha_q\right) = \arg \text{extr}\, I_q\left(J_{qk}^*\right) = \arg I_q^*;$$

в) РП $\left\{J_q^*\left(\beta_q, \Sigma_q, Opt_q, \alpha_q\right)\right\}$, q = 1, 2, ..., щодо показника Λ більш високого рівня зі стаціонарною точкою

$$I^* = \arg \text{extr}\, \Lambda\left(I_q^*\right) = \arg \Lambda^*,$$

тобто $Q_k = \{\Sigma_k, \beta_k, Opt_k, \alpha_k\}$, $F = \{J, I_k\}$.

Наприклад, задача вдосконалення процесу автоматизованого керування складним енергетичним агрегатом.

Нехай Λ — показник ефективності підприємства $\{I_q\} = \{I_1, I_2\}$; I_1 — показник якості стабілізації технологічних змінних x агрегату в області робочих режимів x_0, що задаються експертами (технологами); I_2 — показник якості роботи агрегата; $\{J_{qk}\}$ — множина показників якості ідентифікації локальними моделями $\{\Sigma_{q1}, \beta_{q1}\}$, що відображають перетворення управління u в x (k = 1), і моделями якості $\{\Sigma_{q2}, \beta_{q2}\}$, що відображають перетворення u в I_2 (k = 2). На першому етапі автоматизації ($I_q = I_1$) за J_{1k} визначають локальні моделі $\{\Sigma_{1k}, \beta_{1k}\}$ за допомогою найпростіших методів ідентифікації $\{Opt_{1k}, \alpha_{1k}\}$.

За моделями $\{\Sigma_{1k}, \beta_{1k}\}$ підбирають локальні регулятори, стабілізуючі x в області x_0 за критерієм мінімуму I_1. Згідно РП пп. 7*а*, 7*б* визначають оптимальний по I_1 елемент. На другому етапі, після автоматизації процесу збирання і обробки інформації, переходять до побудови більш повної моделі $\{\Sigma_{q2}, \beta_{q2}\}$, що

пов'язує I_2 зі змінними *x*, *u*. По моделям $\{\Sigma_{q2}, \beta_{q2}\}$, які містять в собі моделі $\{\Sigma_{q1}, \beta_{q1}\}$, уточнюють параметри локальних регуляторів та оптимальне значення x_0^* робочих режимів x_0. Далі оптимальний (уже за I_2) елемент $\{\Sigma_2^*, \beta_2^*, Opt_2^*, \alpha_2^*\}$ визначають уже за результатом РП пп. 7*а*, 7*б*. Таким чином, перехід від Σ_1 до Σ_2 привів до заміни (згідно РП п. 7*в*) основного показника I_1^* на I_2^*.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. Чому більшість реальних систем «гладкі»?
2. Що означає поняття «стан системи»?
3. Що дає теорема Р. Калмана для визначення ММ реальних об'єктів?
4. В чому полягає редукція ММ?
5. В чому полягає задача ідентифікації?
6. Чому важлива цілеорієнтація ММ?
7. Які задачі і як вирішуються в системах ідентифікації Таблиці 1.?
8. Яка принципова різниця між системами (сі, СІ, асі, АСІ) і БАСІ?
9. Наведіть приклад СС для будь-якого відомого вам підприємства.

1.2. Багаторівнева декомпозиція систем

Декомпозиція систем є зручним прийомом, що дозволяє точно або наближено представити систему великої розмірності зі складною мережею прямих і зворотних зв'язків системою більш простих підсистем, які краще піддаються формалізації.

Уявімо (рис. 1.1) завдання проектування системи і саму систему оптимального адаптивного управління реальним об'єктом у вигляді трьох підзадач і відповідних їм підсистем:

– оптимального управління реальним об'єктом;
– ідентифікації відображення вхід–вихід об'єкта;
– ідентифікації сигналів об'єкта.

Ці елементи всередині кожної підсистеми утворюють замкнену за місцевим показником якості систему оптимізації, працюючу за алгоритмом систем зі зворотним зв'язком:

– видача керуючого впливу на об’єкт;

– вимір або розрахунок реакції об’єкта;

– оцінка оптимальності підсистеми за критерієм її рівня.

Між собою підсистеми об’єднано прямими (знизу вгору) і зворотними (зверху вниз) зв’язками. Крайні підсистеми об’єднано такими самими зв’язками з нерозглянутими тут системами більш низького та високого рівнів. Наведемо позначення і фізичний зміст елементів, внутрішніх і зовнішніх прямих і зворотних зв’язків.

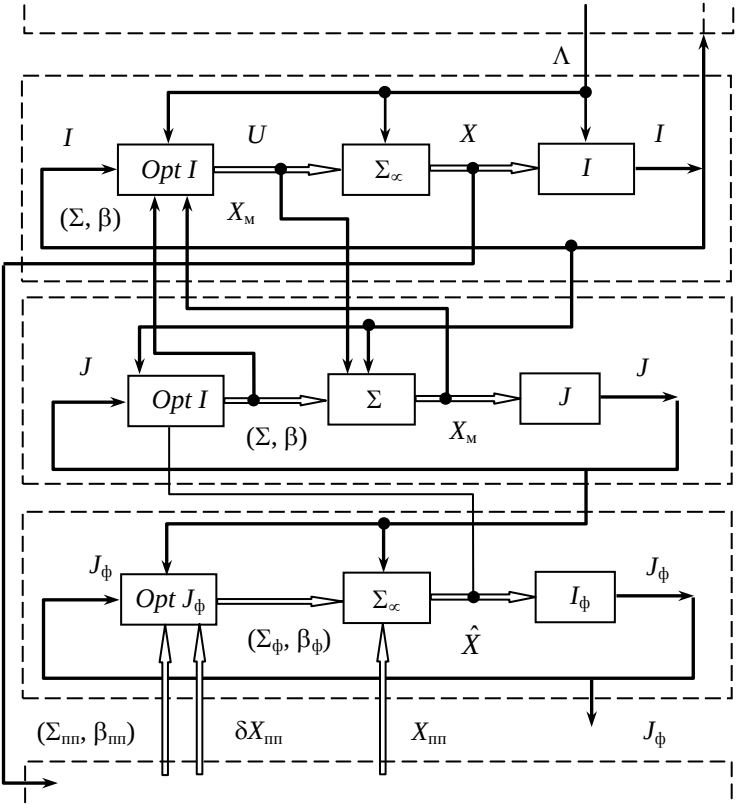


Рис. 1.1. Три рівні оптимізації в багаторівневій системі

Підсистема ідентифікації сигналів має такі елементи та зв’язки:

$J_ф$ — формувач показника якості ідентифікації (фільтрації) вектора *x* сигналів об’єкта;

$\Sigma_ф$ — фільтр, що перетворює сигнал виходу первинного перетворювача $X_{пп}$ в його оцінку $\hat{X}$;

Opt $J_ф$ — оптимізатор по $J_ф$ структури $\Sigma_ф$ і вектора $\beta_ф$ параметрів фільтра;

$\Sigma_{пп}$, $\beta_{пп}$ — інформація про структуру і параметри первинних перетворювачів (датчиків) фізичних змінних об'єкта $\Sigma_\propto$ — передатна функція датчика, статична (тарувальна) характеристика і т. п.;

$\delta X_{пп}$ — інформація про помилки датчиків: систематичні, випадкові, часові, частотні та ймовірнісні характеристики (закон розподілу, його параметри, кореляційні функції і т. п.);

J, $J_ф$ — інформація про критерії оптимальності систем ідентифікації об'єкта і його сигналів: J надходить по каналу зворотного зв'язку в дану підсистему, $J_ф$ — в підсистему первинних перетворювачів.

Підсистема ідентифікації об'єкта містить:

J — формувач показника якості ідентифікації об'єкта;

Σ, β — модель об'єкта зі структурою Σ і вектором β параметрів;

Opt J — оптимізатор за показником J структури Σ і вектора β параметрів моделі;

$\Sigma_\propto$, $\beta_\propto$, $\hat{X}$ — інформація про фільтр і оцінку $\hat{X}$ сигналу X, отриману з сигналу $X_{пп}$ первинного перетворювача;

Σ, β, $X_м$ — інформацію про модель (Σ, β) об'єкта управління і оцінку $X_м$ сигналу X, отриману за сигналом $\hat{X}$ фільтра;

I, J — коригуючи зворотні зв'язки з системи управління в систему ідентифікації і з системи ідентифікації об'єкта в систему ідентифікації сигналів.

Підсистема оптимального управління об'єктом містить:

I — формувач показника якості управління;

$\Sigma_\propto$ — реальний об'єкт (його вхідні і вихідні змінні u і x);

Opt I — оптимізатор показника I по керуючому впливу u;

x — вихід об'єкта — вхід підсистеми первинних перетворювачів;

u — вхід об'єкта і моделі;

Λ, I — коригуючи зворотні зв'язки із системи більш високого рівня в систему управління і з системи управління в систему ідентифікації відповідно.

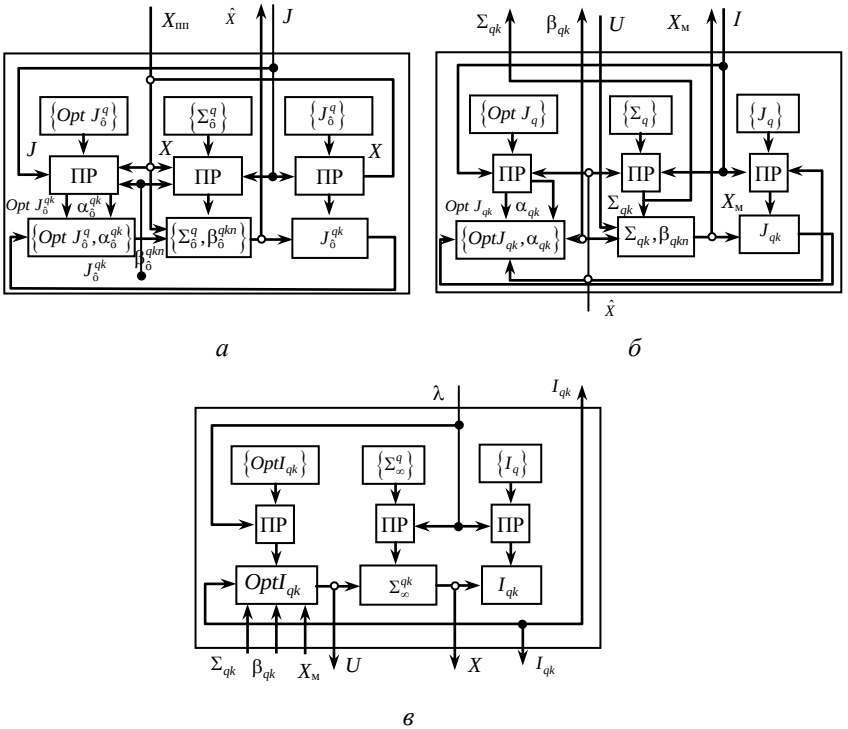
Кожен елемент (оптимізатор, модель, формувач критерію) має три складові:

– безпосередньо елемент, зав'язаний на розв'язанні своєї задачі;

– множину таких елементів, упорядкованих за їх властивостями;

– проектор (ПР), що вибирає з множини елементів оптимальний за показником якості системи більш високого рангу.

На рис. 1.2 подано схеми задач проектування і самі системи I, II і III рівнів. Індекси *q*, *qk*, *qkn* відповідають позначенням кроків композиційного релаксаційного процесу оптимізації системи. Наприклад, *q* — номер ітерації зміни виду показника *I*; *qk* — відповідно зміни *J*; *qkn* — номер кроку в оптимізації β в системі ідентифікації об'єкта.



а *б*

в

Рис. 1.2. Цілеорієнтована підсистема:
а — ідентифікація сигналів; *б* — об'єкта;
в — оптимального адаптивного керування об'єктом

Уся система складається з 27 елементів, серед яких елементи – $\{Opt\ J_{\delta}^{q}\}$, $\{Opt\ J_{q}\}$, $\{Opt\ I_{q}\}$ множини методів оптимізації, критеріїв $\{J_{\delta}^{q}\}, \{J_{q}\}, \{I_{q}\}$ і моделей $\{\Sigma_{\delta}^{q}\}, \{\Sigma_{q}\}, \{\Sigma_{\infty}^{q}\}$, складаються з множин наявних упорядкованих елементів. Для конкретного критерію теоретично існує єдиний оптимальний набір цих елементів і їх параметрів. Задача полягає у виборі «відповідного» (близького за I_q до оптимального) набору при обмежених витратах на його пошук в системі. Для повної апріорної невизначеності про всі елементи системи та їх властивості проблема знаходження «підходящого» набору може здійснюватися методом перебирання варіантів. Повне перебирання гарантує відшукання оптимального набору, якщо в критерій оптимальності не входять витрати на пошук оптимуму. Якщо ці витрати істотні, то вони впливають на оптимальність рішення. Тому, для того щоб дана декомпозиція не призвела до ускладнень, необхідний ретельний аналіз підсистем та їх елементів, який дозволяє з допомогою проекторів ПР систем кожного рівня (рис. 1.2) істотно звузити вихідні множини елементів до обмежених підмножин претендентів на оптимальні для конкретної ситуації.

Принцип декомпозиції ефективний для складних систем та їх елементів. Так, неможливість одним функціоналом сформулювати всі вимоги до створюваної системи призвела до розв'язання на практиці задачі декомпозиції цього неформалізованого критерію на множини критеріїв, які піддаються чіткій формалізації, і розв'язанням багатокритеріальної задачі оптимізації. Таке розв'язання не дає єдиного результату. Воно лише дозволяє виділити обмежену область (підмножина Парето) у просторі критеріїв-функціоналів від оптимізованих змінних. Остаточний варіант розв'язання, що обирається проектувальником, належить цій підмножині.

Найпоширеніший принцип декомпозиції для методів оптимізації:

– метод координатної оптимізації *I* (метод Гаусса–Зейделя), а також метод групової релаксації реалізують декомпозицію простору оптимізованих змінних і почергової покоординатної або групової оптимізації;

– для лінійних оптимальних за квадратичним функціоналом стохастичних систем управління декомпозиція загальної задачі на підзадачі оптимального оцінювання станів та пошуку оптимальної стратегії управління [16] дозволяє суттєво спростити складну задачу дуального управління;

– для задачі спільного оцінювання параметрів і станів стохастичних об'єктів (розширений фільтр Калмана [17], метод квазілінеаріазції і інваріантного занурення [15]), поділ (декомпозиція) на незалежні підзадачі оцінювання сигналів, їх коваріаційних матриць, а далі параметрів, дозволяє отримати рішення, близьке до оптимального, досить простими алгоритмами.

Особливу зацікавленість являє задача декомпозиції моделі (1.1), яка описана системою нелінійних нестаціонарних рівнянь

$$\dot{x}_g(t) = f_g(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m),\ g = \overline{1,n}, \qquad (1.5)$$

множиною лінійних систем (1.2), що описують з необхідною точністю поведінку системи (1.1) в обмежених областях визначення змінних *t, x, u.* Ці локальні моделі виду (1.2) дають змогу у межах лінійно-пропорційних систем легко розв'язувати задачі аналізу, синтезу і реалізації оптимальних стратегій керування та ідентифікації.

По локальних моделях можна розв'язати задачу ідентифікації структури невідомої нелінійної залежності *F* моделі (1.1). Уведемо в (1.5) позначення вектора *ν* з компонентами ν_i:

$$\nu_i = \begin{cases} x_i, i = \overline{1,n}; \\ u_i, i = \overline{n+1, n+m}; \\ t, i = n+m+1 = s. \end{cases} \qquad (1.6)$$

У силу безперервності і *l*-кратної диференційованості залежності (1.1) залежність (1.5) може бути представлена рядом Тейлора:

$$y(\nu(t)) = y(\nu_0) + \sum_{i=1}^{s} \left.\frac{\partial y}{\partial \nu_i}\right|_{\nu_0} \Delta\nu_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \left.\frac{\partial^2 y}{\partial \nu_i \partial \nu_j}\right|_{\nu_0} \Delta\nu_i \Delta\nu_{j+} +$$

$$+\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\left.\frac{\partial^3 y}{\partial\nu_i\partial\nu_j\partial\nu_k}\right|_{\nu_0}\Delta\nu_i\Delta\nu_j\Delta\nu_k+\ldots+R_l(\nu),\qquad(1.7)$$

де $\Delta\nu_i(t)=\nu_i(t)-\nu_{i0};\ \nu\in G;\nu_0\in G$.

$Sup\ R_l(\nu)\le\delta$; δ — допустима похибка апроксимації залежності (1.1) рядом (1.7).

Розіб'ємо область G завдання змінних ν на підобласті G_r так, що

а) $\overset{m}{\underset{r=0}{U}}G_r=G,\nu_{r0}\in G_r,G_r\cap G_{r'}=\phi,r\ne r';$

б) $(\forall G_r)\ \left(\exists\beta_r=\underset{\beta_r\in R}{\arg\min}\left(\underset{\nu_{r0}\in G_r}{sup}\left\|\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\nu_{r0}}\right\|\beta_r<h\right)\right),$

де β_r — вектор параметрів лінійної моделі

$$\Delta y_1(t)=\beta_r^{\mathrm{T}}\Delta\nu(t)\qquad(1.8)$$

i-а компонента β_{ri} якого є оцінка з точністю до *h* коефіцієнта $\left.\frac{\delta y}{\delta\nu}\right|_{\nu_0}$, розкладання (1.7) навколо центру ν_{r0}.

Для області G_0, яка містить глобальний центр ν_0 розкладання (1.7) за моделлю (1.8) і даними $y_1(t)$, $\nu(t)$, знайдемо вектор β_r, який дорівнює (з точністю до *h*) вектору $\left.\frac{\delta y}{\delta\nu}\right|_{\nu_0}$, тобто отримаємо оцінки перших похідних в $\left.\frac{\delta y}{\delta\nu}\right|_{\nu_0}$ (1.7).

Аналогічно обчислимо вектори β_r часткових моделей (1.8) для решти областей $G_r\in G$. Тепер за значеннями β_r і ν_{r0} можна оцінити похідні більш високих порядків. Так, якщо об'єднати сусідні з G_0 підобласті в розширену $G_{01}=\bigcup_{r=1}^{m_1}G_r, m_1\ge s$, (для простоти позначень будемо вважати, що області перенумеровані з віддаленням від «центральної» G_0), таку, що

$$\sup_{\nu \in G_{0j}} R_3(\nu) \le \delta,$$

то розклад (1.7), з точністю до δ, буде містити члени не вище другого порядку. Продиференціюємо (1.7) в області G_{01} по ν_j, тоді (з точністю до $\partial R_3(\nu)/\partial \nu_j$)

$$\frac{\partial y(\nu(t))}{\partial \nu_j} = \left.\frac{\partial y}{\partial y_j}\right|_{\nu_0} + \sum_{i=1}^{s} \left.\frac{\partial^2 y}{\partial \nu_i \partial \nu_j}\right|_{\nu_0} \Delta\nu_i, \qquad (1.9)$$

де $\left.\frac{\delta y}{\delta \nu}\right|_{\nu_0}$ визначено з (1.8) для підобласті G_0.

Якщо різниця $\Delta\nu_i = \nu_{r0i} - \nu_{0i}$, то їй наближено відповідає похідна

$$\left.\frac{\partial y(\nu(t))}{\partial \nu_j}\right|_{\nu_{r0}} \approx \beta_{rj}.$$

Отже, вираз (1.9) можна подати у вигляді

$$\beta_{rj} = \beta_{0j} + \sum_{i=1}^{s} \left.\frac{\partial^2 y}{\partial \nu_i \partial \nu_j}\right|_{\nu_0} (\nu_{r0i} - \nu_{0i}). \qquad (1.10)$$

Звідси для $r \ge s$ і, за умови лінійної незалежності хоча б s з r векторів $(\nu_{r0} - \nu_0)$ однозначно визначають s других похідних $\left.\frac{\partial^2 y}{\partial \nu_i \partial \nu_j}\right|_{\nu_0}$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Для знаходження всіх коефіцієнтів $\left.\frac{\partial^3 y}{\partial \nu_i \partial \nu_j \partial \nu_k}\right|_{\nu_0}$ ряду (1.7) необхідно мати не менше s розширених навколо G^*_{r1} підобластей G^*_{r1}, подібних G_{01} (число таких центральних підобластей повинно бути не менше s).

Для кожної G_{r1}^{*} із рівняння (1.10) (в якому замість β_{0j} і ν_{0i} взято значення, отримані для центральної підобласті G_{r^*}) знаходять другі похідні $\left.\frac{\partial^2 y}{\partial \nu_i \partial \nu_j}\right|_{\nu_{r^*0}}$. Двічі диференціюючи (1.7), отримаємо

$$\left.\frac{\partial^2 y(t)}{\partial \nu_i \partial \nu_j}\right|_{\nu_{r^*0}} = \left.\frac{\partial^2 y}{\partial \nu_i \partial \nu_j}\right|_{\nu_0} + \sum_{k=1}^{s} \left.\frac{\partial^3 y}{\partial \nu_i \partial \nu_j \partial \nu_k}\right|_{\nu_0} \left(\nu_{r^*0k} - \nu_{0k}\right).$$

Звідси для $r^* \geq s$ і за умови лінійної незалежності хоча б s векторів $\left(\nu_{r^*k} - \nu_k\right)$ однозначно визначають треті похідні. Аналогічно отримують всі похідні ряду (1.7) і тим самим визначають його структуру.

За недостатньої кількості підобластей G_r можливо відновлення частини структури з тих ν_j, які змінюються від області до області.

Під час проведення активного експерименту мінімізація числа областей G_r і оптимізація точності оцінок похідних в (1.7) досягається застосуванням композиційного планування експерименту, яке забезпечує ортогональність векторів $\left(\nu_{r0} - \nu_0\right), \left(\nu_{r^*0} - \nu_0\right)$.

Перевагою такого підходу є обмежена (на кожному кроці розширення) розмірність вектора невідомих параметрів, можливість аналізу на кожному кроці значущості знайдених коефіцієнтів ряду (1.7) і відкидання незначущих.

Приклад 1.1. Нехай невідома залежність (1.6) має вигляд

$$y(\nu) = \nu_1(t) + 0{,}5\nu_1(t)\nu_2(t) + \nu_2^2(t),$$

де змінні $y(\nu), \nu_i(t)$ визначені так $(\nu_{01} = 0, \nu_{02} = 0) \in G_0$; $(\nu_{11} = -1, \nu_{12} = 0) \in G_1$; $(\nu_{21} = 0, \nu_{22} = -1) \in G_2$; $y(0) = 0$.

У кожній області є по два вимірювання $\nu_i\left(t_{jr}\right)$, відхилення яких від центрів для кожної області однакові: $\Delta\nu_1\left(t_{1r}\right)=0{,}1$; $\Delta\nu_2\left(t_{1r}\right)=0$; $\Delta\nu_1\left(t_{2r}\right)=0$, $\Delta\nu_2\left(t_{2r}\right)=-0{,}1$. Враховуючи ці відхилення, отримуємо $\Delta y\left(t_{10}\right)=0{,}1;\Delta y\left(t_{20}\right)=0{,}005;\Delta y\left(t_{11}\right)=0{,}1;$

$$\Delta y\left(t_{20}\right)=0{,}055;\Delta y\left(t_{12}\right)=0{,}5;\Delta y\left(t_{22}\right)=0{,}105.$$

Потрібно визначити структуру і параметри невідомої залежності $y(\nu)$.

Розв'язання:

а) для G_0 складемо рівняння (1.8)

$$\Delta y\left(t_{j0}\right)=\beta_{01}\Delta\nu_i\left(t_{j0}\right)+\beta_{02}\Delta\nu_2\left(t_{j0}\right);$$

підставивши дані, отримаємо

$$0{,}1=\beta_{01}\times 0{,}1+\beta_{02}\times 0;\ 0{,}005=\beta_{01}\times 0+\beta_{02}\times(-0{,}1);$$

Звідси маємо шукані перші члени ряду (1.7):

$$\beta_{01}=1;\ \beta_{02}=-0{,}05;$$

б) для G_1:

$$\Delta y\left(t_{j1}\right)=\beta_{11}\Delta\nu_1\left(t_{j1}\right)+\beta_{12}\Delta\nu_2\left(t_{j1}\right),$$

звідси $\beta_{11}=1;\beta_{12}=0{,}55$;

в) для G_2:

$$\Delta y\left(t_{j2}\right)=\beta_{21}\Delta\nu_1\left(t_{21}\right)+\beta_{22}\Delta\nu_2\left(t_{j1}\right);$$

звідси $\beta_{21}=0{,}5;\beta_{22}=1{,}05$;

г) маючи β_{ir}, можна, згідно з рівнянням (1.10), переходити до знаходження других похідних у (1.7):

$$\left.\frac{\partial y}{\partial\nu_1}\right|_{\nu_{r0}}-\left.\frac{\partial y}{\partial\nu 1}\right|_{\nu_0}=\left.\frac{\partial^2 y}{\partial\nu_1^{\,2}}\right|_{\nu_0}\left(\nu_{r01}-\nu_{01}\right)+\left.\frac{\partial^2 y}{\partial\nu_1\partial\nu_2}\right|_{\nu_0}\left(\nu_{r02}-\nu_{02}\right),$$

де зліва різниця β_{r1}, r = 1, 2, і β_{01}, а $\left(\nu_{r0j}-\nu_{0j}\right)$, j = 1,2 — різниця координат центрів r-й і нульової області.

Аналогічно друге рівняння

$$\left.\frac{\partial y}{\partial \nu_2}\right|_{\nu_{r0}} - \left.\frac{\partial y}{\partial \nu_2}\right|_{\nu_0} = \left.\frac{\partial^2 y}{\partial {\nu_2}^2}\right|_{\nu_0} (\nu_{r02} - \nu_{02}) + \left.\frac{\partial^2 y}{\partial \nu_1 \partial \nu_2}\right|_{\nu_0} (\nu_{r01} - \nu_{01}).$$

Підставивши дані для першого рівняння, отримаємо систему

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{\partial^2 y}{\partial {\nu_1}^2}\right|_{\nu_0} \times (-1) + \left.\frac{\partial^2 y}{\partial \nu_1 \partial \nu_2}\right|_{\nu_0} \times 0; \\ -0,5 &= \left.\frac{\partial^2 y}{\partial {\nu_1}^2}\right|_{\nu_0} \times 0 + \left.\frac{\partial^2 y}{\partial \nu_1 \partial \nu_2}\right|_{\nu_0} \times (-1). \end{aligned}\right\}$$

Її розв'язок відразу вказує (!) на відсутність квадратичної залежності від x_1:

$$\left.\frac{\partial^2 y}{\partial {\nu_2}^2}\right|_{\nu_0} = 0; \left.\frac{\partial^2 y}{\partial \nu_1 \partial \nu_2}\right|_{\nu_0} = 0,5.$$

Аналогічно, з другого рівняння

$$\begin{cases} 0.5 = \left.\frac{\partial^2 y}{\partial {\nu_2}^2}\right|_{\nu_0} \cdot 0 + \left.\frac{\partial^2 y}{\partial \nu_1 \partial \nu_2}\right|_{\nu_0} \cdot (-1); \\ -1 = \left.\frac{\partial^2 y}{\partial {\nu_2}^2}\right|_{\nu_0} \cdot (-1) + \left.\frac{\partial^2 y}{\partial \nu_1 \partial \nu_2}\right|_{\nu_0} \times (0); \end{cases}$$

отримаємо рішення

$$\left.\frac{\partial^2 y}{\partial {\nu_2}^2}\right|_{\nu_0} = 1; \left.\frac{\partial^2 y}{\partial \nu_1 \partial \nu_2}\right|_{\nu_0} = 0,5.$$

Отримані значення перших і других похідних підставимо в (1.7). Враховуючи, що $\nu_0 = 0$, $y_0 = 0$, знаходимо оцінку $\hat{y}(\nu)$ невідомої залежності $y(\nu)$:

$$\hat{y}(\nu) = \nu_1(t) - 0,05\nu_2(t) + 0,5\nu_1(t)\nu_2(t) + \nu_2^2(t).$$

Оцінка $\hat{y}(\nu)$ відрізняється від $y(\nu)$ на неістотну для області G величину $-0{,}05\,\nu_2(t)$, яка з'явилася внаслідок наближеності обчислення перших похідних.

Не менш ефективний принцип декомпозиції має місце і під час опису сигналів. Можна говорити про часове і частотне розбиття сигналів. Часове розбиття можна будувати за різними ознаками, наприклад виділення інтервалів, відповідних статичним і динамічним режимам об'єкта, для незалежного вивчення його статики та динаміки; виділення сильно- і слабозашумленних ділянок записів змінних для оптимального вибору інтервалів і алгоритмів оцінювання сигналів; виділення «інформативних» (в сенсі ідентифікації моделі об'єкта) ділянок записів з некорельованими або ортогональними змінними.

Частотне розбиття еквівалентно розкладенню сигналів у ряд Фур'є. Перехід в частотну область дозволить достатньо просто синтезувати оптимальний фільтр Вінера для оцінювання сигналів [17]. Сучасна спектральна теорія аналізу і синтезу систем [19] також заснована на розкладанні сигналів і їх функціональних відображень.

Розкладання проводиться за системою ортогональних функцій. Декомпозиція сигналів складних коливальних систем дозволяє виділити окремі тони і побудувати для них часткові спрощені моделі літака [18]. Отже, принцип декомпозиції доцільний на всіх рівнях і для всіх елементів складних систем.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. *В чому полягає структурна ідентичність підсистем трьох рівнів (рис. 1.1) і, разом з тим, принципова різниця завдань кожної підсистеми?*
2. *Які прямі і зворотні зв'язки існують між підсистемами різних рівнів (рис. 1.1)?*
3. *З яких 27 елементів складено ціле орієнтовані підсистеми (рис. 1.2)?*
4. *Як за допомогою кратного ряду Тейлора і розбиття області змінних стану на малі підобласті, визначити структуру і параметри багатомірної нелінійної залежності?*

1.3. Принцип узгодженості критеріїв

Для ієрархічної системи управління (див. рис. 1.1) існує одне значення для елементів множини

$$\{I, OptI, J, Opt\,J, \Sigma, \beta, I_{\text{ф}}, OptI_{\text{ф}}, \Sigma_{\text{ф}}, \beta_{\text{ф}} I_{\text{пп}}, OptI_{\text{пп}}, \beta_{\text{пп}}\},$$

за якого головний показник Λ оптимальний, якщо не враховувати витрати на пошук цього значення.

Реальні оптимізаційні задачі не можуть не враховувати ці втрати. Тому релаксаційний процес відшукання абсолютного екстремуму (наприклад, мінімуму) зупиняється на певному етапі, якщо подальший приріст утрат на пошук перевищить зменшення решти частини функціоналу.

За повній відсутності інформації про залежність Λ від елементів множини пошук абсолютного екстремуму виконується методом перебору: з усіх n можливих значень m змінних множини F вибирається m оптимальних значень. Загальне число кроків РП $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ для реальних значень m *і* n надмірно велике.

Задача набагато порядків спрощується, якщо кожен з функціоналів $\Lambda, I, ..., I_{\text{пп}}$ оптимізується на підмножині змінних свого рівня: X, u, ..., $(\Sigma_{nn}, \beta_{nn})$. Це призводить до композиції умовно оптимальних рішень

$$\begin{aligned}\Lambda^* = extr\,\Delta \\ x\big|_{I^*=extrI} \\ u\big|_{J^*=extr\,J} \\ (\Sigma,\beta)\big|_{J_{\text{ф}}^*=extrJ_{\text{ф}}} \\ (\Sigma_{\text{ф}},\beta_{\text{ф}})\big|_{J_{nn}^*=extrJ_{nn}} \\ (\Sigma_{\text{пп}},\beta_{\text{пп}})\big|_{\dots},\end{aligned} \tag{1.11}$$

де зліва від кожної вертикальної риски змінна, що оптимізує функціонал «свого» рівня, праворуч — результат умовної оптимізації на нижніх рівнях.

Оптимізаційна задача кожного рівня піддається досить строгій формалізації, що дозволяє інтенсифікувати процес пошуку умовного екстремуму.

Проблема розмірності знімається, але залишається проблема ефективності вирішення (1.11).

Щоб процедура (1.11) давала рішення, близьке до абсолютного екстремуму головного функціонала, необхідно забезпечити непротирічність критеріїв $\Lambda, I, ..., J_{\text{пп}}$.

Критерії $\Lambda, I, ..., J_{\text{пп}}$. називають *абсолютно узгодженими*, якщо композиція умовних рішень (1.11) призводить до глобального екстремуму Λ.

Два сусідніх за рівнями функціонала назвемо *локально несуперечливими*, якщо їх варіації подібні в обмеженій області G простору змінних підсистеми нижнього рівня:

$$\left.\begin{aligned} \delta\Lambda\left(u+\delta u\right) &= k_1\delta I\left(u+\delta u\right);\\ \delta I\left(\beta+\delta\beta\right) &= k_2\delta J\left(\beta+\delta\beta\right);\\ \delta J\left(\beta_{\text{ф}}+\delta\beta_{\text{ф}}\right) &= k_3\delta J_{\text{ф}}\left(\beta_{\text{ф}}+\delta\beta_{\text{ф}}\right);\\ \delta J_{\text{ф}}\left(\beta_{\text{пп}}+\delta\beta_{\text{пп}}\right) &= k_4\delta J_{\text{пп}}\left(\beta_{\text{пп}}+\delta\beta_{\text{пп}}\right). \end{aligned}\right\}.$$

Якщо перетин областей G_i існування змінних i-х рівнів представляє не порожню множину, що включає точку, що визначає глобальний екстремум за Λ, то їх багаторазова послідовна оптимізація від $J_{\text{пп}}$ до Λ та назад від Λ до $J_{\text{пп}}$ в принципі дозволяє відшукати глобальний екстремум Λ. Проте досягти його не просто. Пояснюється це тим, що оптимально будувати функціонали зверху вниз неможливо через незнання оптимальних по верхньому функціоналу значень елементів нижніх рівнів. Так, не можна синтезувати функціонал I управління u на об'єкті Σ_∞ не знаючи якою математичною моделлю (Σ, β) він буде описаний, який рівень і вид шумів є в оцінках $X_{\text{м}}$, отриманих за оцінками підсистеми фільтрації і т. д.

Можна застосувати мінімаксний підхід [14], і будувати I так, щоб для найгіршої моделі (Σ, β) та оцінок $X_{\text{м}}$ сигналу отримати найкраще гарантоване вирішення. Але ж у загальній системі (див. рис. 1.1) є підсистема ідентифікації, яка в результаті

оптимізації дасть завжди рішення не гірше гіршого, тому, застосовуючи мінімаксний підхід, програємо в оптимальності.

Доцільним є такий алгоритм побудови локально несуперечливих функціоналів:

1. На підставі апріорної інформації про об'єкт Σ_∞, головний функціонал Λ і наявних елементах підсистем усіх рівнів, з урахуванням принципу раціонального ускладнення [20] на першому кроці багаторівневого РП приймають найпростіші, що задовольняють апріорно відомим даним, підсистеми первинних перетворювачів оцінювання сигналів X і моделі (Σ, β) і оптимального управління u.

2. Вибрані підсистеми i-го рівня оптимізують методом перебору структур і методом оптимізації за апріорно прийнятим критерієм підсистем $i + 1$-го рівня: $\Sigma_{\text{пп}}$ по $J_\text{ф}$, $\left(\Sigma_\text{ф}, OptJ_\text{ф}\right)$ по J, $\left(\Sigma, OptJ\right)$ по I, $(Opt\ I)$ по Λ. Оскільки розмірності цих змінних невеликі, то витрати на пошук допустимі. У результаті цієї оптимізації отримаємо оптимальну систему першого наближення.

3. Методами теорії чутливості, або моделювання і планування експерименту [23], проектують несуперечливі критерії I, J, $J_\text{ф}$, $J_{\text{пп}}$.

Розглянемо підхід, заснований на аналітичному обчисленні чутливості функціоналів. Нехай є оптимальна система першого наближення, в якій реальний об'єкт Σ_∞ замінено його моделлю (Σ, β). Знайдемо варіацію основного функціоналу Λ відносно його екстремального значення $\Lambda^*\left(u^*\right)$, викликану варіацією δu оптимального управління об'єктом. Нехай

$$u(t) = u^*(t) + \varepsilon\delta u(t),$$

де ε — мала величина; $u\left(t\begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}\right)$ — вектор-функція часу t.

Нехай

$$\Lambda\left(u(t)\right) = \int_{\theta_1} \lambda\left(u^*(t) + \delta u(t)\varepsilon\right) dt,$$

де $\int\limits_{\theta_1}$ — оператор інтегрування на інтервалі θ_1 часу t; $\lambda(\cdot)$ — скалярна функція векторного аргументу u.

Знайдемо першу варіацію Λ:

$$\delta\Lambda = \frac{\partial\Lambda}{\partial\varepsilon} = \int\limits_{\theta_1} \frac{\partial\lambda}{\partial\varepsilon} dt = \int\limits_{\theta_1} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^T \frac{\partial u}{\partial\varepsilon} dt = \int\limits_{\theta_1} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^T \delta u dt,$$

де

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\lambda}{\partial u_m} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial u}{\partial\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial\varepsilon} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial\varepsilon} \end{bmatrix}.$$

Тепер візьмемо другу варіацію:

$$\delta^2\Lambda = \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\varepsilon^2} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\Lambda}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int\limits_{\theta_1}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^T \delta u dt =$$

$$= \int\limits_{\theta_1} \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)^T \cdot \delta u \cdot dt = \int\limits_{\theta_1} \frac{\partial}{\partial u}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)\delta u\right]^T \frac{\delta u}{\partial\varepsilon} dt, \qquad (1.12)$$

де

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u^T \partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_1 \partial u_1} & \cdots & \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_1 \partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_m \partial u_1} & \cdots & \frac{\partial^2\lambda}{\partial u_m \partial u_m} \end{bmatrix}.$$

Якщо Λ визначено на $x(t)$, а не на $u(t)$, то, діючи аналогічно, отримаємо

$$\delta^2\Lambda = \int_{\theta_1} \delta x^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^T \partial x} \delta x dt,$$

або

$$\delta^2\Lambda = \int_{\theta_1} \partial u^T \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^T \partial x} \frac{\partial x}{\partial u} \delta u dt, \qquad (1.13)$$

де

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial u} \delta u,$$

$$\delta x = \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \vdots \\ \delta x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \delta u = \begin{bmatrix} \delta u_1(t) \\ \vdots \\ \delta u_m(t) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial x}{\partial u_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots \frac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots \frac{\partial x_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}.$$

Зіставляючи (1.16) і (1.17), бачимо, що

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^T \partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^T \partial x} \frac{\partial x}{\partial u}.$$

На екстремалі $x^*(t)$, $u^*(t)$ перша варіація дорівнює нулю, друга варіація (1.12) або (1.13) визначає еталонну [для функціонала $I(u)$] поверхню у функціональному просторі варіацій $\delta u(t)$. Нехай $\delta u(t) = 1(t)$ — одинична вектор-функція від t, тоді (1.13) являє еталонну для I матрицю A_1 дійсних чисел

$$\delta^2\Lambda = A_1 = \int_{\theta} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^T \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^T \partial x} \frac{\partial x}{\partial u} dt. \qquad (1.14)$$

При побудові функціонала I будемо прагнути, щоб аргументи екстремумів Λ та I співпали, а другі варіації були подібні.

Приклад 1.2. Нехай задано квадратичний показник якості керування:

$$I = \int_{\theta_2} (x^T G x + u^T Q u) dt, \tag{1.15}$$

де G, Q — вагові матриці; θ_2 — інтервал керування.

Тоді

$$\frac{\partial I}{\partial \varepsilon} = \int_{\theta_2} \left[\delta u^T \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G x + x^T G \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \delta u^T Q u + u^T Q \delta u \right] dt,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial \varepsilon^2} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} = \int_{\theta_2} [\delta u^T \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \delta u^T Q \delta u] du = \tag{1.16}$$

$$= \int_{\theta_2} \delta u^T \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G \frac{\partial x}{\partial u} + + Q \right] \delta u dt \ .$$

Для тих же, що і в (1.14), одиничних варіацій δu функціонал (1.15) буде несуперечливим основному, якщо варіації (1.14) і (1.16) будуть подібними:

$$\int_{\theta_2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G \frac{\partial x}{\partial u} + Q \right] dt = k_1 A_1,$$

або в скалярному вигляді

$$\sum_{i=1-}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \int_{\theta_2} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_k} dt + \int_{\theta_2} q_{lk} dt = k_1 \alpha_{lk}^1, l, k = \overline{1, m}, \tag{1.17}$$

де k_1 — коефіцієнт подібності; α_{lk}^1 — елемент матриці A в (1.14); g_{ij}, q_{lk} — елементи матриць G і Q відповідно.

Оскільки A_1 симетрична, то загальна кількість рівнянь (1.23) $0{,}5m(m + 1)$, а коефіцієнтів, що необхідно підібрати, g_{ij}, q_{lk} $0{,}5n(n + 1)$ і $0{,}5\ m(m + 1)$ відповідно. Це дозволяє підбором їх задовольнити $m(m + 1)$ вимогам (1.17) несуперечності I до Λ, а також ряду інших вимог, що визначаються системою оптимізації I. При такому підході до побудови функціоналу I істотно полегшується задача [22] задàння матриць G і Q.

Наступний крок полягає в побудові критерію J підсистеми ідентифікації. Нехай на попередньому кроці було отримано несуперечливий з Λ функціонал I (1.15) з ваговими G^* і Q^*, що

задовольняють умову (1.17). Знайдемо другу варіацію I вже в просторі параметрів β моделі (Σ,β) і задамо її як еталонну для функціоналу J:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 I}{\partial \varepsilon^2} = \int_{\theta_2} \delta u^T \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G^* \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + Q^* \right] \delta u dt,$$

де

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial \beta}\delta\beta, \quad \frac{\partial u}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial u_{r1}}{\partial \beta_2} & \cdots \frac{\partial u_1}{\partial \beta_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial \beta_1} & \frac{\partial u_n}{\partial \beta_2} & \cdots \frac{\partial u_n}{\partial \beta_r} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\delta^2 I(\beta) = \int_{\theta_2} \delta\beta^T \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^T \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^T G^* \frac{\partial x}{\partial u} + Q^* \right] \frac{\partial u}{\partial \beta} \delta\beta dt =$$

$$= \delta\beta^T \left[\int_{\theta_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^T \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^T \times G^* \frac{\partial x}{\partial u} + Q^* \right] \frac{\partial u}{\partial \beta} dt \right] \delta\beta = \delta\beta^T A_2 \delta\beta. \quad (1.18)$$

У функціоналі

$$J = \int_{\theta_3} i(\hat{x}, x_{\text{і}}, \alpha) dt \quad (1.19)$$

в точці $\hat{x} = x_{\text{і}}$, що відповідає оцінці $\hat{\beta}$, що дорівнює β, перша варіація J повинна дорівнювати нулю, а друга

$$\delta^2 J(\beta) = \delta\beta^{\text{T}} \left[\int_{\theta_3} \left(\frac{\partial x_{\text{м}}}{\partial \beta} \right)^{\text{T}} \frac{\partial^2 i(\alpha)}{\partial x_{\text{м}}^T \partial x_{\text{м}}} \cdot \frac{\partial x_{\text{м}}}{\partial \beta} dt \right] \delta\beta$$

подібна (1.18), тобто:

$$A_3 = \int_{\theta_3} \left(\frac{\partial x_{\text{м}}}{\partial \beta} \right) \frac{\partial^2 i(\alpha)}{\partial x_{\text{м}}^{\text{T}} \partial x_{\text{м}}} \cdot \frac{\partial x_{\text{м}}}{\partial \beta} dt = k_2 A_2, \quad (1.20)$$

де A_2 містить $0{,}5r\,(r+1)$ різноманітних елементів α_{ij}^2.

Для того, щоб повністю задовольнити (1.20) функціонал (1.19) повинен містити не менше ніж $0{,}5r(r+1)$ керованих параметрів α.

Нехай, як приклад, модель (Σ,β) подано у вигляді

$$x_{\text{і}}(t)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i W_i(p)u(t),$$

де $W_i(p)$ — задані оператори від $p=\dfrac{d}{dt}$.

Покладемо, що в (1.18)

$$A_2=diag\left[\alpha_{ij}^2\right].$$

Із умови (1.20), тобто з умови $k_2\alpha_{ij}^2=\alpha_{ij}^3$, знайдемо $u(t)$ і представимо набором ортогональних функцій $\varphi_k(t)$:

$$u(t)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varphi_k(t), \tag{1.21}$$

де m — кількість членів $\varphi_k(t)$, що надають адекватне уявлення $u(t)$ на інтервалі ідентифікації $\theta_3=[0\ T]$; $\varphi_k(t), k=\overline{1,n}$ — система ортогональних функцій, наприклад косинусний ряд

$$\varphi_k(t)=\cos\left(\frac{2k-1}{2}\right)\frac{\pi}{T}t. \tag{1.22}$$

Якщо $J=\int_0^I\varepsilon^2(t)\,t$, де $\varepsilon(t)=\hat{x}(t)-x_{\text{і}}(t)$, то в (1.20) елементи

$$\alpha_{ij}^2=\alpha_{ij}^3/k_2=\int_0^T\left[W_i(p)u(t)\right]\left[W_j(p)u(t)\right]dt.$$

Позначимо

$$W_i(p)u(t)=y_i(t), i=\overline{1,n},$$

де з урахуванням (1.21), (1.22)

$$y_i(t)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left[W_i(p)\varphi_k(t)\right]=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k y_{ij}(t);$$

$$y_{ij}(t)=W_i(p)\varphi_k(t).$$

Тоді

$$\frac{\alpha_{ij}^3}{k_2} = \int_0^T \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k y_{ik}(t) \right) \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k y_{jk}(t) \right) dt =$$

$$= \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^m \alpha_k \alpha_q \int_o^T y_{ik}(t) y_{jq}(t) dt = \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^m \alpha_k \alpha_q y_{ik},$$

де $y_{ik} = \int_0^I y_{ik}(t) y_{jq}(t) dt$ розраховується заздалегідь.

Оптимальне значення α знайдемо з умови

$$\alpha^* = \arg\min_{\alpha \in R} \left\| \frac{\alpha_{ij}^3}{k_2} - \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^m \alpha_k \alpha_q y_{ij}^{kq} \right\|, \qquad (1.23)$$

$$i, j = \overline{1, n},$$

де всі змінні, крім α, заздалегідь розраховані. Якщо розмірність α дорівнює або більше 0,5 $r(r + 1)$, то мінімум норми в (1.23) дорівнює нулю і маємо точну подібність варіацій функціоналів J та I.

Аналогічно попереднім, отримавши J і визначивши його варіацію від вектора $\beta_ф$ параметрів фільтра, підбираємо показник $J_ф$ якості фільтра $\left(\Sigma_ф \beta_ф\right)$ з умови подібності (1.18), а показник $J_{пп}$ якості первинних перетворювачів — подібним $J_ф$, отриманому на попередньому кроці.

Зважаючи на складність аналітичного розв'язання задачі узгодження функціоналів конструктивним є підхід, що полягає у плануванні комп'ютерного експерименту.

Створення систем автоматизованого проектування (САПР) критеріїв ієрархічних систем за наявності відповідного математичного забезпечення істотно полегшує задачу. На ЕВМ послідовно імітуються підсистеми двох суміжних рівнів, починаючи з верхнього; здійснюється експеримент, напрямлений на визначення других варіацій функціоналів відносно їх екстремального значення; формується додатковий функціонал [типу (1.23)], що визначає близькість (подібність) других варіацій заданого (верхній рівень) і синтезованого (нижній рівень) функціоналів; додатковий функціонал оптимізується шляхом підстроювання параметрів підсистеми нижнього рівня. Для скорочення варіантів доцільно застосовувати оптимальні плани експерименту [23].

Якщо експеримент виконується для дослідження області екстремуму функціоналу, то за відомого значення екстремуму, для визначення других варіацій, необхідно і достатньо виконувати «зірковий експеримент», що полягає в почерговому відхиленні на величину «зоряного плеча» $\pm\alpha$ кожної зі змінних, за якими знаходиться друга варіація функціонала; якщо координати екстремуму функціоналу невідомі, то оптимальним експериментом, з метою побудови квадратичної моделі виду буде

$$y(x) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2 \qquad (1.24)$$

— центральний композиційний план Бокса [23; 25]. Цей план можливо зробити ортогональним. Нормовані змінні моделі (1.31) приймають п’ять значень –0, +1, –1, $+\alpha$, $-\alpha$. План експерименту містить:

1) повний факторний — експеримент 2^n або дрібні репліки (якщо $n >> 5$) [23];

2) «зірковий план»;

3) точку в центрі плану (всього N експериментів).

Для побудови ортогонального плану модель (1.24) перетворюють до виду

$$y(x) = b_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{x}_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} \tilde{x}_i \tilde{x}_{j+} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} \tilde{x}_i^2,$$

де

$$b_0 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2, \tilde{x}_i^2 = x_i^2 - c, c = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_i^2(k),$$

де k — номер досліду.

Нові змінні $\tilde{x}_i^2$ будуть зміщуватися на значення $-c$. Це дасть змогу підібрати α так, щоб усі стовпці матриці експерименту були попарно ортогональні.

Наприклад, для n = 3 та моделі (1.24) матриця плану Боксу подана в табл. 1.2, де c = (1/15) 2

$$\sum_{k=1}^{15} x_i^2(k) = (8 + 2\alpha^2)/15$$

для будь-якого i.

«Зоряне плече» α підбирають згідно з табл. 1.2 за умови ортогональностіі $\tilde{x}_i^2$:

$$\sum_{k=1}^{N} x_i^2(k)\, x_j^2(k) = 8(1-c)^2 - 4c\left(\alpha^2 - c\right) + 3c^2 = 0.$$

Підставивши сюди вирази для *c*, отримаємо

$$\alpha = \sqrt{30} - 4 \approx 1{,}5,\ \tilde{n} \approx 0{,}83.$$

Таблиця 1.2

Матриця плану оптимального експерименту

Вид плану	Нормовані змінні $X(k)$										
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$\tilde{x}_1^2$	$\tilde{x}_2^2$	$\tilde{x}_3^2$	$y(k)$
1	1	–1	–1	–1	1	1	1	$1-c$	$1-c$	1 – c	$y(1)$
	1	1	–1	–1	–1	–1	1	$1-c$	$1-c$	$1-c$	$y(2)$
	1	–1	1	–1	–1	1	–1	$1-c$	$1-c$	$1-c$	$y(3)$
	1	1	1	–1	1	–1	–1	$1-c$	$1-c$	$1-c$	$y(4)$
	1	–1	–1	1	1	–1	–1	$1-c$	$1-c$	$1-c$	$y(5)$
	1	1	–1	1	–1	1	–1	$1-c$	$1-c$	$1-c$	$y(6)$
	1	–1	1	1	–1	–1	1	$1-c$	$1-c$	$1-c$	$y(7)$
	1	1	1	1	1	1	1	$1-c$	$1-c$	$1-c$	$y(8)$
2	1	$-\alpha$	0	0	0	0	0	α^2-c	$-c$	$-c$	$y(9)$
	1	α	0	0	0	0	0	α^2-c	$-c$	$-c$	$y(10)$
	1	0	$-\alpha$	0	0	0	0	$-c$	α^2-c	$-c$	$y(11)$
	1	0	α	0	0	0	0	$-c$	α^2-c	$-c$	$y(12)$
	1	0	0	$-\alpha$	0	0	0	$-c$	$-c$	α^2-c	$y(13)$
	1	0	0	α	0	0	0	$-c$	$-c$	α^2-c	$y(14)$
	1	0	0	0	0	0	0	$-c$	$-c$	$-c$	$y(15)$

Унаслідок взаємної ортогональності коефіцієнти $b_0, \alpha_i, \alpha_{ij}, \alpha_{jj}$, моделі (1.24) визначають за методом найменших квадратів незалежно.

Від цих коефіцієнтів легко перейти до коефіцієнтів моделі (1.24), а від неї до моделі з ненормованими змінними. Для цього α_j — ділять на модуль кроку варіювання *i*-ї змінної, α_{ij} — на добуток цих модулів *j*-ї та *i*-ї змінної, $i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}, i = j$.

За наявності моделей (1.31) функціоналів підсистем верхнього і нижнього рівнів, нижній конструюють по верхньому шляхом варіювання структури і параметрів нижньої підсистеми за умови мінімуму додаткового функціонала різниці коефіцієнтів $\alpha_i, \alpha_{ij}, \alpha_{ii}$ моделей (1.24) двох рівнів.

Тут також можна досягти скорочення кількості різних варіантів, застосовуючи методику планування експерименту для побудови моделі залежності цього додаткового функціоналу від структур і параметрів підсистем нижнього рівня. Узгодивши критерії підсистем усіх рівнів та оптимізувавши їх, одержимо оптимальну систему другого наближення. Повторивши для неї процедуру узгодження критеріїв і оптимізувавши їх, отримаємо третє наближення. Процес узгодження припиняється, якщо результати подальших ітерацій мало відрізняються.

Забезпечення несуперечності критеріїв теоретичним або імітаційним моделюванням на ЕОМ певною мірою наблизить задачу умовної оптимізації до задачі знаходження найкращого рішення (визначення глобального екстремуму головного критерію Λ).

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. Що означає принцип узгодженості критеріїв (1. п)?

2. Як в задачі САПР скористатися композиційним планом Бокса для вирішення задачі узгодження критеріїв підсистем двох сусідніх рівнів ієрархічної системи?

1.4. Композиція підсистем різних рівнів в єдину систему

Третім, завершальним, етапом розробки близьких до оптимальних по Λ структури і алгоритмів функціонування багаторівневої системи оптимізації, є етап композиції (сполуки) окремих підсистем в єдиний комплекс.

Сформульовані визначення системи, релаксаційних процесів, принципу раціонального ускладнення [10] дозволяють окреслити коло основних підходів до проблеми композиції:

- упорядкування елементів множин моделей і методів оптимізації;
- вибір оптимальної системи першого наближення;
- організація релаксаційних процесів ускладнення і вдосконалення окремих елементів систем і, можливо, структури самої системи, починаючи з оптимальної системи першого наближення і закінчуючи оптимальною за Λ.

Упорядкування елементів підсистем реалізується проекторами ПР, звужуючими на першому кроці початкову множину елементів до підмножин допустимих, а потім до підмножини претендентів на оптимальні елементи. Наприклад, допустимими за неповної спостережуваності об'єкта Σ_∞ є методи нелінійної ідентифікації, які не потребують повної спостережуваності Σ_∞. На першому рівні проекторів $ПР_1$ виділяють ті елементи (методи і моделі), які можуть бути застосовані в цій ситуації, яка визначається сигналами $\hat{u}, \hat{x}$, що спостерігаються, і заданими критеріями $J_ф$, J, I, Λ. Тут проектори є багатовимірними дискримінаторами, що пропускають на вихід ті елементи, властивості яких повністю узгоджуються з факторами, що визначають реальну ситуацію.

На другому рівні проектори $ПР_2$ виділяють два-три претенденти на оптимальність. Для цього в проекторі $ПР_2$ для кожного елемента закладені регресійні залежності відповідних критеріїв $\hat{J}_ô, ..., \hat{\Lambda}$ (якщо критерії апріорі реалізувати не можна) від кількісно розрахованого вектора факторів θ, який характеризує конкретну ситуацію.

Для елементів-методів лінійного оцінювання чинниками є співвідношення сигнал-шуму за амплітудою і шириною спектрів, корельованість сигналів, наближеність моделі (величина кінцевої

помилки апроксимації) і т. п. Визначивши в просторі цих факторів кілька найбільш характерних для практики регресійного аналізу областей, далі для кожної області будують регресійну залежність відповідного критерію $J_ф$,..., Λ або його оцінки $\hat{J}_ô$,..., $\hat{\Lambda}$ від θ. Тоді проектор $ПР_1$ визначає область, а $ПР_2$ — для кожного елементу значення критерію для конкретного θ, що належить цій області. Задача побудови проекторів належить до етапу проектування і вимагає тим більших витрат, чим точніше проектори і ширше області та розмірності факторів θ.

Вибір оптимальної системи першого наближення було подано вище. Основним процесом на цьому етапі є організація структури системи.

Розглянемо варіант структури системи оптимізації *J* - систему ідентифікації. У табл. 1.1 структурно систематизовані підсистеми ідентифікації від найпростішої до такої, що самоорганізується для створення підсистеми ідентифікації в багаторівневій системі оптимізації Λ (якщо Σ^* і *Opt** апріорно невідомі) з табл. 1.1 як допустиму приймаємо структуру БАСІ. Для цієї системи ідентифікації, на відміну від більш простих, характерна замкненість по основному (для неї) критерію *I* і неодиничність елементу Σ (як для БАСІ).

Складемо функціональну схему БАСІ, визначивши її взаємозв'язок з підсистемами верхніх і нижніх рівнів (рис. 1.3). Характерні частини системи (підсистеми) обведено пунктиром і пронумеровано:

1 — оптимізація Λ;

2 — оптимізація *I*;

3 — оптимізація *J*, що доповнює найпростішу систему ідентифікації (частина 4) до багатократно адаптивної (частини 3 і 4);

5 — оптимізація $J_ф$.

Частина 4 системи містить функціонал J_{qk}, який задається вище, модель Σ_{qk} з вектором β_{qkn}, параметрів, що налаштовуються, оптимізатор $\left(Opt_{qk}, \alpha_{qk}\right)$. Тут реалізується РП $\left\{\beta_{qkn}\right\}$, n = 1,2 ,..., щодо J_{qk} за допомогою оптимізатора Opt_{qk}, α_{qk}. Після закінчення

РП інформація про оптимальні за J_{qk} структурі Σ_{qk} і векторі β_{qk} параметрів моделі надходить у підсистеми верхніх рівнів.

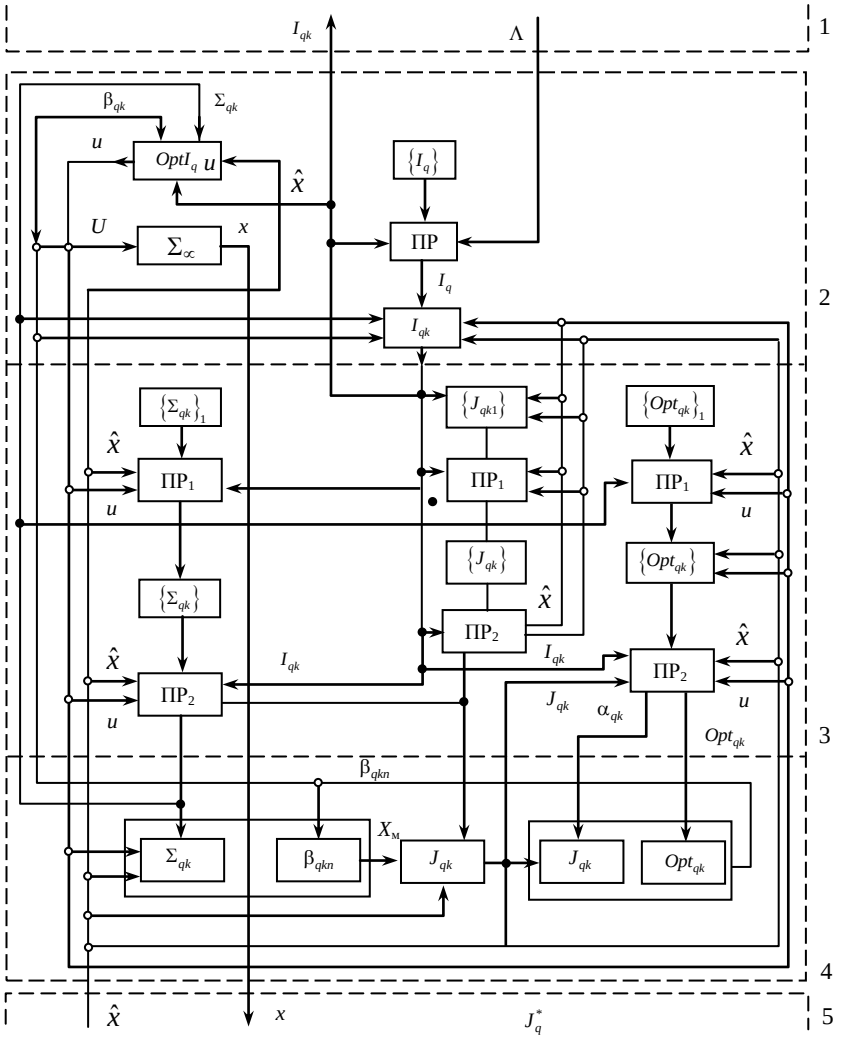


Рис. 1.3 Функціональна схема багатократно адаптивної підсистеми ідентифікації

Частина 3 містить три множини $\{\Sigma_{qk1}\}$, $\{Opt_{qk1}\}$, $\{J_{qk1}\}$; проектори першого рівня $ПР_1$, що звужують ці множини до підмножин $\{\Sigma_{qk}\}$, $\{Opt_{qk}\}$, $\{J_{qk}\}$ допустимих елементів; проектори $ПР_2$ другого рівня, що вибирають з числа допустимих претенденти на оптимальні елементи. Для конкретного виду I_q і потрібного значення I_{qk}, що задається вище, проектори $ПР_1$, $ПР_2$ задають елементи $J_{ql}, \Sigma_{ql}, Opt_{ql}, \alpha_{ql}$ частини 4, де в результаті РП $\{\beta_{qkn}\}$ отримують оптимальну по J_{qk} модель $(\Sigma_{qk}, \beta_{qk})$. У підсистемі частини 2 на реальному об'єкті Σ_∞ або його моделі $(\Sigma_{qk}, \beta_{qk})$ оцінюється значення критерію I_{qk} для *k*-й структури БАСІ, і якщо воно не задовольняє необхідному, то в одному з проекторів $ПР_2$ відбувається зміна претендента. Знову повторюється процес $\{\beta_{qkn}\}$ і так до виконання умови, що I_{qk} буде не гірше необхідного, або до закінчення процесу перебору всіх претендентів.

При зміні I_{qk} в частинах 4 та 5 можливі зміни структури і параметрів підсистеми нижнього рівня. У частинах 3 та 4 має місце композиція двох РП $\{\beta_{qkn}\}$ по *n* і $\{I_{qk}\}$ по *k*, що відповідає визначенню БАСІ.

Частина 2 містить реальний об'єкт Σ_∞, його оптимізатор $\underset{u}{Opt} I_q$, множину $\{I_{qk}\}$ і проектор *Пр*, що визначає (на основі значень I_{qk} і Λ) вид I_q критерію I_{qk}. Сигнал *x* з виходу об'єкта Σ_∞ надходить в підсистему нижнього рівня, з виходу якої його оцінка $\hat{x}$ потрапляє в системи ідентифікації і управління. Оптимізатор $\underset{u}{Opt} I_{qk}$ на основі інформації $\Sigma_{ql}, \beta_{ql}, I_{ql}, \hat{x}$ виробляє керуючий вплив *u*, що надходить на об'єкт або його модель (на стадії пошуку оптимальних елементів системи).

Якщо після закінчення РП $\{\beta_{qk}\}$ по *k* оптимальне значення I_q не задовольняє систему частини 1, то з системи верхнього рівня може

надійти команда в проектор ПР на зміну по q виду функціоналу I_q. Крок по q призводить до повторення кроків по k, а k по n в МАСІ, тобто в частинах 1–4 має місце композиція з трьох РП, що відповідає визначенню системи, яка самоорганізується (СС) (див. табл. 1.1).

Глибокий зворотний зв'язок за критеріями від Λ до I, від I до J, від J до $J_ф$, оптимізуючий і цілеорієнтуючий структуру і параметри підсистеми всіх рівнів, здійснює регуляризацію рішення в широкому сенсі.

Приклад 1.3. Пояснимо ефект регуляризації таким прикладом. Маємо графік $y(t)$ (рис. 1.4), заданий на інтервалі $[0, t_0]$ $t_0 = T$, який відображає невідому дослідникові закономірність

$$y(t) = \beta_0^* + \beta_1^* t + \beta_2^* \sin\omega t + \varepsilon(t),$$

де $\omega = 2\pi / T$, $\varepsilon(t)$ — досить мала складова неврахованих ефектів в Σ_∞.

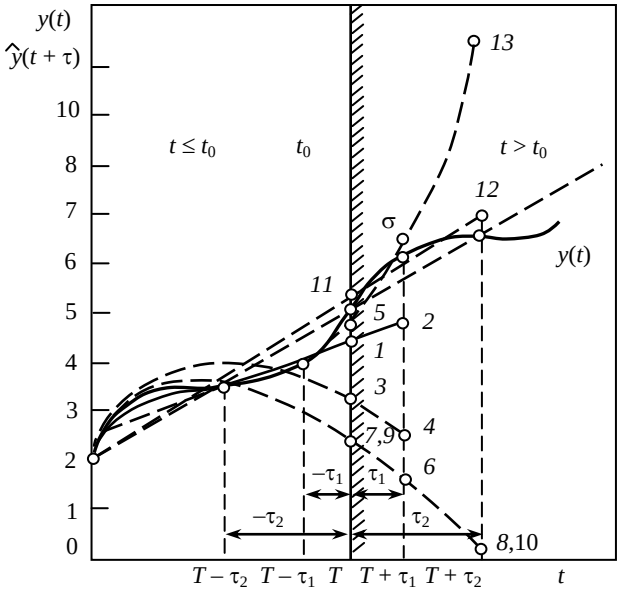


Рис. 1.4. Крива $y(t)$ (суцільні лінії) та її прогнозуючі моделі (пунктирні лінії), які отримані для різноманітних навчальних ($[0, T - \tau_i]$ $i = 1, 2$) і повірочних $[T - \tau_i, T]$ вибірок даних

Нехай множина $\{Opt_{qk}\}$ складається з одного методу найменших квадратів (МНК), для якого вектор α відсутній, а множина $\{\Sigma_{qk}\}$ складена з трьох моделей:

$$\Sigma_{q1}: \hat{y}(t) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t; \Sigma_{q2}: \hat{y}(t) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t + \hat{\beta}_2 t^2;$$

$$\Sigma_{q3}: \hat{y}(t) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t + \hat{\beta}_2 t^2 + \hat{\beta}_3 t^3.$$

Критерій $I = \left| y(t_0 + \tau) - \hat{y}(t_0 + \tau) \right|$, що характеризує точність прогнозу, фізично не може бути реалізованим, тому що на практиці графік $y(t)$ відомий тільки на інтервалі $t \in [0, t_0]$. Розіб'ємо інтервал $[0, t_0]$ на два підінтервала $[0, T - \tau_i]$ і $[T - \tau_i, T], i = 1, 2$. На першому інтервалі по МНК знайдемо β для моделей $\{\Sigma_{q1}\}$, на кінці другого перевіримо моделі за оцінкою $\hat{I}$ критерію I:

$$\hat{I} = \left| y(t_0) - \hat{y}(t_0) \right|.$$

Припустимо, що якщо τ_i дорівнює τ прогнозу, то з малості оцінки критерію $\hat{I}$ випливає малість основного критерію I. У табл. 1.3 наведені значення критеріїв $\hat{I}$ і I для $\tau_1 = 0{,}2\,T$, $\tau_2 = 0{,}5T$, а також номери прогнозуючих точок на графіку (рис. 1.4).

Як видно з рис. 1.4 і табл. 1.3, для $\tau = 0{,}2T$ оптимальною і по $\hat{I}$, і по I буде модель Σ_3, для $\tau = 0{,}5T$ по двом критеріям — Σ_1. Застосування оптимальної за $\hat{I}$ і I для $\tau = 0{,}2T$ моделі Σ_3 для прогнозу на $\tau = 0{,}5T$ (точка *13* на графіку) призводить до різкого зростання I. Ефект регуляризації полягає в тому, що за одних і тих же даних, чим більше τ, тим більш просту модель обирають за критерієм $\hat{I}$. Так як в силу неточності оцінок $\hat{\beta}$ і самої структури Σ моделі для великих ступенів i поліному та великих τ значеннях неточних компонент $\beta_i(t + \tau)$ можуть вносити значну похибку (точка *13*) прогнозу процесу $y(t)$ за оцінкою $\hat{y}(t)$. Тому критерій $\hat{I}$ відкидає ці елементи для $\tau = 0{,}5\,T$.

Таблиця 1.3

Результати прогнозу невідомої закономірності

$\{\Sigma\}$	τ_i	$\hat{I}$	Номер точки, що прогнозується	I	Номер точки, що прогнозується
Σ_1	0,2	0,7	1	1,4	2
Σ_2	0,2	1,8	3	3,6	4
Σ_3	0,2	0,2	5	0,4	6
Σ_3	0,5	5	7	6,2	8
Σ_2	0,5	5	9	6,2	10
Σ_1	0,5	0,2	11	0,3	12

На якість прогнозу буде істотно впливати метод *Opt* і його параметри α. Додатковий перебір в підмножині $\left\{Opt_{qk}, \alpha_{qk}\right\}$ за критерієм $\hat{I}$ дозволяє вибрати оптимальну в розумінні I пару $\left\{Opt^*, \alpha^*\right\}$. При застосуванні звичайного методу регуляризації, що полягає у введенні стабілізуючої домішки α [26] в критерій МНК $J = \varepsilon^T\varepsilon + \alpha\left(\hat{\beta}-\hat{\beta}_a\right)^T\left(\hat{\beta}-\hat{\beta}_a\right)$, за відповідних значень α можуть бути отримані аналогічні результати. Але не маючи критерію $\hat{I}$, невідомо, як вибрати ваги α і як задати апріорні значення β_0 вектора β параметрів моделі Σ, тоді як в класі БАСІ вони вибираються за умови

$$\left(\alpha^*, \beta^*\right) = \arg\min_{(\alpha,\beta)} \hat{I}.$$

Багатократно адаптивні системи ідентифікації мають більш широкі можливості регуляризації порівняно зі звичайними. Ефективність БАСІ очевидна настільки, наскільки очевидна нерівність

$$\inf I_q\left(\Sigma, Opt, \alpha, u\right)\Big|_{\beta = \arg\min J} < \inf I_q(u)\Big|_{\substack{\Sigma = \text{const} \\ (Opt, \alpha) = \text{const} \\ \beta = \arg\min J,}} \tag{1.25}$$

де права частина відповідає системам мінімізації I_q зі звичайним ідентифікатором (тільки частина 4 схеми на рис. 1.3), а ліва — системам з БАСІ-ідентифікатором (частини 2, 3, 4). Якщо I_q не враховує втрат на пошук $\inf I_q$ (як у прикладі прогнозу), то нерівність строга.

Якщо враховує, то для великої розмірності елементів Σ, Opt, α і поганій їх впорядкованості проекторами $ПР_1$, $ПР_2$ нерівність може не виконуватися. У таких системах порушено принцип раціонального ускладнення. Ускладнення (розширення розмірності елементів) багаторівневої системи з БАСІ-ідентифікатором повинно бути таким, щоб нерівність (1.25) не послаблювалася, а посилювалася. Тільки таке ускладнення доцільне.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. Поясніть структуру і елементи БАСІ (рис. 1.3).

2. В чому полягає регуляризація і оптимізація роботи БАСІ на прикладі 1.3.?

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Калман Р.* Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалби, М. Арбиб. — М. : Мир, 1971. — 400 с.

2. *Анализ* и статистическая динамика систем автоматического управления / под ред. Н. Д. Егунова. — М. : изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. — 748 с.

3. *Сильвестров А. Н.* Идентификация и оптимизация автоматических систем / А. Н. Сильвестров, П. И. Чинаев. — М. : Энергоатомиздат, 1987. — 200 с.

4. *Любич Ю. И.* Общая теория релаксационных процессов / Ю. И. Любич, Г. Д. Майстровский // Успехи математических наук, 1970. — № 1. — С. 57–112.

5. *Сильвестров А. Н.* Многократно адаптивные системы идентификации / А. Н. Сильвестров, О. М. Папченко. — М., 1983. —150 с.

6. *Себер Ж.* Линейный регрессионный анализ / Ж. Себер. — М. : Мир, 1980. — 456 с.

7. *Райбман Н. С.* Основы управления технологическими процесами / Н. С. Райбман, В. М. Чадеев. — М. : Наука, 1980. — 440 с.

8. *Саридис Дж.* Самоорганизующие стохастические системы управления / Дж. Саридис. — М. : Наука, 1980. — 400 с.

9. *Цыпкин Я. З.* Основы информационной теории идентификации / Я. З. Цыпкин. — М. : Наука, 1984. — 380 с.

10. *Костюк В. І.* Асимптотична інваріантність багатократно адаптивних систем / В. І. Костюк, А. М. Сільвестров // Теорія інваріантності та її застосування. — К. : Наук. думка, 1979. — С. 155–167.

11. *Івахненко А. Г.* Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами / А. Г. Івахненко. — К. : Техніка, 1975. — 250 с.

12. *Гроп Д.* Методы идентификации систем / Д. Гроп. — М. : Мир, 1979. — 302 с.

13. *Сейдж Е. П.* Идентификация систем управления / Е. П. Сейдж, Дж. Мэлса. — М. : Наука, 1974. — 495 с.

14. *Фельдбаум А. А.* Основы теории оптимальных автоматических систем / А. А. Фельдбаум. — М. : Физматгиз, 1963. — 552 с.

15. *Ейкхофф П.* Основы идентификации систем управления / П. Ейкхофф. — М. : Мир, 1975. — 683 с.

16. *Шин В. И.* Субоптимальный алгоритм оценки состояния и параметров многомерных непрерывных нелинейних систем / В. И. Шин // Автоматика и телемеханика, 1984. — № 1. — С. 101–106.

17. *Солодовников В. В.* Расчёт оптимальных систем автоматического управления при наличии помех / В. В. Солодовников, П. С. Матвеев. — М. : Машиностроение, 1973. — 239 с.

18. *Кашин Г. М.* Автоматическое управление продольним движением самолёта / Г. М Кашин., И. М. Федоренко. — М. : Машиностроение, 1974. — 289 с.

19. *Математические* основы теории автоматического управления / под ред. Б. К.Чемоданова. — М. : Высш. шк., 1977. — Т. 1. — 336 с.

20. *Костюк В. І.* Принцип багатократної адаптивності / В. І. Костюк, А. М. Сільвестров / Достижения и перспективы развития технической кибернетики. — К. : Изд-во РДИТП, 1975. — Т. 1. — С. 65–69 (тр. III Всесоюзної міжуніверситетської НТК).

21. *Круг Г. К.* Планирование эксперимента в идентификации и экстраполяции / Г. К. Круг, Ю. А. Сосулин, В. А. Фатуев. — М. : Наука, 1977. — 207 с.

22. *Красовский А. А.* Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами / А. А. Красовский, В. Н. Буков, В. С. Шендрик. — М. : Наука, 1977. — 348 с.

23. *Маркова Е. В.* Комбинированные планы в задачах многофакторного эксперимента / Е. В. Маркова, В. Н. Лысенков. — М.: Наука, 1979. — 348 с.

24. *Тихонов А. Н.* Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Аресенин. — М. : Наука, 1979. — 286 с.

25. *Островерхов М.Я.* Системи і методи ідентифікації електротехнічних об'єктів/ М.Я. Островерхов, А.М. Сільвестров, О.М. Скринник. – К.: НАУ, 2016. – 324 с.

Розділ 2

МОДЕЛІ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЇ ТА ЇХ ІДЕНТИФІКАЦІЯ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Якщо на вихідну змінну Y об'єкта ідентифікації впливає декілька факторів $X_1, X_2, \ldots, X_m$, то маємо множинну регресію, яку можна подати залежністю

$$M\{Y/X_1, X_2, \ldots, X_m\} = X\beta,$$

де $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)^T$ — вектор параметрів β_i, які оцінюються $i = \overline{1,m}$, $M\{y/x\}$ — умовне математичне сподівання залежної змінної Y від m регресорів (незалежних змінних $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$).

Задача ідентифікації взаємозв'язку Y від X і є задачею визначення множинної регресії.

2.1. Загальний запис множинної лінійної регресії

Розглянемо залежність ознаки Y від m незалежних змінних (регресорів) X_i ($i = \overline{1,m}$). Лінійна теоретична модель її:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \beta_3 x_{13} + \ldots + \beta_m x_{1m} + \varepsilon_1;\\
y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \beta_3 x_{23} + \ldots + \beta_m x_{2m} + \varepsilon_2;\\
y_3 &= \beta_0 + \beta_1 x_{31} + \beta_2 x_{32} + \beta_3 x_{33} + \ldots + \beta_m x_{3m} + \varepsilon_3;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n &= \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \beta_3 x_{n3} + \ldots + \beta_m x_{nm} + \varepsilon_n,
\end{aligned} \qquad (2.1)$$

де β_i, $i = \overline{1,m}$ — теоретичні коефіцієнти регресії (часткові коефіцієнти), які характеризують реакцію залежної змінної Y на зміну регресора X_i, тобто вони інформують про вплив на $M\{Y/X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ змінної (регресора) X_i теоретичної моделі за умови, що решта регресорів цієї моделі залишаються сталими; β_0 — вільний член, який визначає значення Y за умови, що всі регресори моделі (2.1) дорівнюють нулю.

Для однозначного визначення параметрів β_i, $i=\overline{1,m}$ необхідно, щоб

$$n \geq m+1,$$

де m + 1 — кількість параметрів, якими визначається теоретична множинна лінійна регресія (2.1), значення яких оцінюються на основі обробки вибірки.

Якщо $n > m+1$, стає неможливим підібрати лінійну форму (2.1), яка б в точності задовольняла всім спостереженням. Тому виникає потреба в визначенні таких оцінок β_i^*, за яких лінійна множинна функція регресії мала б найкраще наближення для одержаних спостережень.

Векторно-матрична форма теоретичної моделі (2.1)

$$\vec{Y} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon}, \tag{2.2}$$

де

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1\, x_{11} x_{12} \cdots x_{1m} \\ 1\, x_{21} x_{22} \cdots x_{2m} \\ \vdots \\ 1\, x_{n1} x_{n2} \cdots x_{nm} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Похибка $\vec{\varepsilon}$ є випадковим вектором, компоненти ε_i якого характеризують відхилення, викликані випадковими збуреннями, які не врахованої в структурі моделі.

При оцінюванні параметрів теоретичної лінійної множинної регресії для забезпечення статистичної надійності число n спостережень має суттєво перевищувати кількість оцінювальних параметрів $m+1$.

2.2. Емпірична модель

Емпірична модель становить собою статистичний аналог теоретичної. За її допомогою визначаються статистичні оцінки параметрів моделі (2.1) шляхом статистичної обробки вибірки даних. Емпірична модель Y у векторно-матричній формі

$$Y = X\beta^* + e, \tag{2.3}$$

де

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1\, x_{11} x_{12} \cdots x_{1m} \\ 1\, x_{21} x_{22} \cdots x_{2m} \\ \vdots \\ 1\, x_{n1} x_{n2} \cdots x_{nm} \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \vdots \\ \beta_m^* \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

вектор β^* — статистична оцінка теоретичного вектора β лінійної множинної регресії (2.2); вектор похибок e — статистична оцінка випадкового вектора ε цієї ж моделі.

Якщо компоненти вектора ε — це невідомі випадкові величини, то компоненти e_i вектора e можуть бути обчислені за даними вибірки.

Для визначення вектора β^* використовується метод найменших квадратів. Для цього мають бути виконані умови Гаусса–Маркова:

1. $M(\varepsilon_i) = 0, i = \overline{1,n}.$

2. $\operatorname{cov}(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \begin{cases} 0, i \neq j; \\ \sigma_\varepsilon^2, i = j, \end{cases}$

тобто між випадковими відхиленнями ε_i і ε_j повинен бути відсутній кореляційний зв'язок, та $\sigma_{\varepsilon i}^2 = \text{const} = \sigma^2$.

3. Між регресорами моделі і випадковим вектором $\vec{\varepsilon}$ має теж бути відсутній кореляційний зв'язок, тобто

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0, \quad i = \overline{1,n};$$

2. Регресори моделі повинні бути детермінованими, тобто точними.

5. Модель має бути лінійною відносно своїх параметрів.

6. Між змінними

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, X_m = \begin{pmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \\ \vdots \\ x_{nm} \end{pmatrix},$$

тобто між векторами $X_1, X_2, \ldots, X_m$ має бути відсутня лінійна залежність, тоді визначник матриці $X^T X$ більше нуля.

7. Випадковий вектор ε має мати багатовимірний нормальний закон розподілу ймовірностей

$$\varepsilon \sim N\left(0; \sigma I_n\right),$$

тоді кожний компонент ε_i вектора ε також буде мати нормальний закон розподілу

$$\varepsilon_i \sim N\left(0; \sigma\right), \quad i = \overline{1, n}.$$

8. Ранг матриці $X - r\left(X\right)$ повинен бути не менше (m + 1).

Виконання цих умов дає право на використання звичайного МНК для визначення статистично-оптимальних оцінок параметрів теоретичної лінійної множинної регресії, перевірки статистичних гіпотез та побудови інтервальних статистичних оцінок.

2.3. МНК-оцінювання вектора β

Із виразу (2.3) вектор похибок $\vec{e}$ дорівнюватиме

$$e = y - X\beta^*.$$

Для визначення компонентів вектора β^* як статистичних оцінок компонентів вектора β використовується МНК. Суть методу найменших квадратів — мінімізація по β^* суми квадратів похибок $e^{\mathrm{T}} e$:

$$e^{\mathrm{T}}e=\left(y-X\beta^{*}\right)^{\mathrm{T}}\left(\vec{y}-X\beta^{*}\right)=\left(\vec{y}^{\mathrm{T}}-\left(\beta^{*}\right)^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}\right)\left(y-X\beta^{*}\right)=$$

$$=y^{\mathrm{T}}y-y^{\mathrm{T}}X\beta^{*}-\left(\beta^{*}\right)^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}y+\left(\beta^{*}\right)^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}X\beta^{*}=$$

$$=y^{\mathrm{T}}y-2\left(\beta^{*}\right)^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}y+\left(\beta^{*}\right)^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}X\beta^{*},$$

де в індексі літерою ($^{\mathrm{T}}$) позначено транспонування відповідного вектора чи матриці. Якщо використати такі властивості:

$$y^{\mathrm{T}}X\beta^{*}=(\beta^{*})^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}\vec{y},(X\beta^{*})=(\beta^{*})^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}},$$

то

$$e^{\mathrm{T}}e=y^{\mathrm{T}}y-2(\beta^{*})^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}y+(\beta^{*})X^{\mathrm{T}}X\beta^{*}. \qquad (2.4)$$

Необхідна умова мінімуму виразу (2.4):

$$\frac{\partial\left(e^{\mathrm{T}}e\right)}{\partial\beta^{*}}=\frac{\partial}{\partial\beta^{*}}\left(y^{\mathrm{T}}y-2(\beta^{*})^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}y+(\beta^{*})^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}X\beta^{*}\right)=$$

$$=-2X^{\mathrm{T}}y+X^{\mathrm{T}}X\beta^{*}+\left((\beta^{*})^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}X\right)^{\mathrm{T}}=-2X^{\mathrm{T}}y+$$

$$+X^{\mathrm{T}}X\beta^{*}+X^{\mathrm{T}}X\beta^{*}=-2X^{\mathrm{T}}y+2X^{\mathrm{T}}X\beta^{*}=0,$$

звідки $X^{\mathrm{T}}X\beta^{*}=X^{\mathrm{T}}y$ або

$$\beta=\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}}y,$$

або

$$\beta^{*}=(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}(X\beta+\varepsilon)=(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}X\beta+$$
$$+(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}\varepsilon. \qquad (2.5)$$

Остаточно одержимо

$$\beta^{*}=\beta+(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}\varepsilon. \qquad (2.6)$$

2.4. Числові характеристики МНК-оцінок та емпіричної функції регресії

Оскільки β^{*} є випадковим вектором, то його компоненти β_i^{*} будуть випадковими величинами. Отже, виникає потреба у визначенні їх числових характеристик.

Враховуючи (2.6) одержуємо математичне сподівання оцінки β^*:

$$M(\beta^*) = M(\beta + (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}\varepsilon) = M(\beta) + M\left((X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}\varepsilon\right) =$$

$$= \beta + (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}M(\varepsilon) = \beta, \qquad (2.7)$$

оскільки $M(\varepsilon) = 0,$ то

$$M(\beta^*) = \beta,$$

тобто емпіричний вектор β^* є точковою незміщеною статистичною оцінкою для теоретичного вектора β параметрів множинної лінійної регресії (2.2). Із рівняння (2.7) випливає, що

$$M(\beta_i^*) = \beta_i, \quad i = 0,1,2,\ldots,m.$$

Для визначення дисперсій компонентів емпіричного вектора β^* як випадкових величин визначимо коваріаційний момент:

$$\mathrm{cov}\left(\beta^*(\beta^*)^{\mathrm{T}}\right) = M(\beta^* - \beta)(\beta^* - \beta)^{\mathrm{T}} =$$

$$= M\left(\beta + \left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}}\varepsilon - \beta\right)\left(\beta + (X^{T}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}\varepsilon - \beta^{\mathrm{T}}\right) =$$

$$= M\left[(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}\varepsilon((X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}\varepsilon)^{\mathrm{T}}\right] =$$

$$= M\left[(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}\varepsilon\varepsilon^{\mathrm{T}}X((X^{\mathrm{T}}X)^{-1})^{\mathrm{T}}\right] =$$

$$= (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}M\left\{\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{pmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)\right\}X(X^{\mathrm{T}}X)^{-1} =$$

$$= (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}M\begin{pmatrix}\varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_1\varepsilon_n\\ \varepsilon_2\varepsilon_1 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_2\varepsilon_n\\ \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \varepsilon_n\varepsilon_1 & \varepsilon_n\varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n^2\end{pmatrix}X(X^{\mathrm{T}}X)^{-1} =$$

$$= (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} M(\varepsilon_1^2)M(\varepsilon_1\varepsilon_2)\cdots\cdots M(\varepsilon_1\varepsilon_n) \\ M(\varepsilon_2\varepsilon_1)M(\varepsilon_2^2)\cdots\cdots M(\varepsilon_2\varepsilon_n) \\ \vdots\vdots \\ \vdots\vdots \\ M(\varepsilon_n\varepsilon_1)M(\varepsilon_n\varepsilon_2)\cdots\cdots M(\varepsilon_n^2) \end{pmatrix} X(X^{\mathrm{T}}X)^{-1} =$$

$$= (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 0\cdots\cdots 0 \\ 0\sigma_\varepsilon^2\cdots\cdots 0 \\ \vdots\vdots \\ \vdots\vdots \\ 00\cdots\cdots\sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} X(X^{\mathrm{T}}X)^{-1} =$$

$$= (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X'\sigma_\varepsilon^2\begin{pmatrix} 10\cdots\cdots 0 \\ 01\cdots\cdots 0 \\ \vdots\vdots \\ \vdots\vdots \\ 00\cdots\cdots 1 \end{pmatrix} X(X^{\mathrm{T}}X)^{-1} = (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}\sigma_\varepsilon^2 I_n \times$$

$$\times X(X^{\mathrm{T}}X)^{-1} = \sigma_\varepsilon^2(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}(X^{\mathrm{T}}X)(X^{\mathrm{T}}X)^{-1} = \sigma_\varepsilon^2(X^{\mathrm{T}}X)^{-1},$$

оскільки $\sigma_\varepsilon^2 = \text{const}$ і $M\left(\varepsilon_i\varepsilon_j\right) = 0,\ \left(i \neq j\right)$.

Таким чином,

$$\operatorname{cov}\left(\beta^*\left(\beta^*\right)'\right) = \sigma_\varepsilon^2\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}.$$

Визначивши елементи оберненої матриці $\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}$, яку умовно позначимо C, а її елементи як $C_{ij}\left(i, j = \overline{1,n}\right)$, матимемо

$$\operatorname{cov}\left(\beta^*\left(\beta^*\right)^T\right) = \sigma_\varepsilon^2\left(X^TX\right)^{-1} = \sigma_\varepsilon^2 C$$

або

$$\sigma_\varepsilon^2 C = \sigma_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} c_{11}c_{12}\cdots\cdots c_{1n} \\ c_{21}c_{22}c_{2n} \\ \vdots\vdots \\ \vdots\vdots \\ c_{1n}c_{2n}\cdots\cdots c_{nm} \end{pmatrix}.$$

Далі враховуючи, що

$$\operatorname{cov}\left(\begin{pmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \vdots \\ \beta_m^* \end{pmatrix}\left(\beta_0^*,\beta_1^*,\beta_2^*,\ldots,\beta_m^*\right)\right) = \operatorname{cov}\begin{pmatrix} \left(\beta_0^*\right)^2 \beta_0^*\beta_1^* \beta_0^*\beta_2^* \cdots \beta_0^*\beta_m^* \\ \beta_1^*\beta_0^* \left(\beta_1^*\right)^2 \beta_1^*\beta_2^* \beta_1^*\beta_m^* \\ \beta_2^*\beta_0^* \beta_2^*\beta_1^* \left(\beta_2^*\right)^2 \beta_2^*\beta_m^* \\ \vdots \\ \beta_m^*\beta_0^* \beta_m^*\beta_1^* \beta_m^*\beta_2^* \cdots \left(\beta_m^*\right)^2 \end{pmatrix},$$

одержуємо вираз для коваріаційної матриці оцінок β^*

$$\operatorname{cov}\left(\beta^*\left(\beta^*\right)\right) = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(\beta_0^*)^2 & \operatorname{cov}(\beta_0^*\beta_1^*) & \operatorname{cov}(\beta_0^*\beta_2^*) & \cdots & \operatorname{cov}(\beta_0^*\beta_m^*) \\ \operatorname{cov}(\beta_1^*\beta_0^*) & \operatorname{cov}(\beta_1^*)^2 & \operatorname{cov}(\beta_1^*\beta_2^*) & \cdots & \operatorname{cov}(\beta_1^*\beta_m^*) \\ \operatorname{cov}(\beta_2^*\beta_0^*) & \operatorname{cov}(\beta_2^*\beta_1^*) & \operatorname{cov}(\beta_2^*)^2 & \cdots & \operatorname{cov}(\beta_2^*\beta_m^*) \\ & \vdots & \vdots & & \\ \operatorname{cov}(\beta_m^*\beta_0^*) & \operatorname{cov}(\beta_m^*\beta_1^*) & \operatorname{cov}(\beta_m^*\beta_2^*) & \cdots & \operatorname{cov}(\beta_m^*)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{\beta_0}^2 \operatorname{cov}(\beta_0^*\beta_1^*) & \operatorname{cov}(\beta_0^*\beta_2^*) & \cdots & \operatorname{cov}(\beta_0^*\beta_m^*) \\ \operatorname{cov}(\beta_1^*\beta_0^*) & \sigma_{\beta_1}^2 \operatorname{cov}(\beta_1^*\beta_2^*) & \cdots & \operatorname{cov}(\beta_1^*\beta_m^*) \\ \operatorname{cov}(\beta_2^*\beta_0^*) & \operatorname{cov}(\beta_2^*\beta_1^*) & \cdots & \operatorname{cov}(\beta_2^*\beta_m^*) \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ \operatorname{cov}(\beta_m^*\beta_0^*) & \operatorname{cov}(\beta_m^*\beta_1^*) & \cdots & \operatorname{cov}(\beta_m^*\beta_2^*)\sigma_{\beta_m}^2 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Оскільки $\operatorname{cov}\left(\beta_i^*\right)^2 = D\left(\beta_i^*\right) = \sigma_{\beta_i^*}^2$, $i = 0,1,2,\ldots,m$, то вираз (2.8) подамо в остаточному вигляді:

$$\begin{pmatrix} \sigma^2_{\beta_0} \operatorname{cov}(\beta^*_0\beta^*_1) & \operatorname{cov}(\beta^*_0\beta^*_2) & \cdots & \operatorname{cov}(\beta^*_0\beta^*_m) \\ \operatorname{cov}(\beta^*_1\beta^*_0) & \sigma^2_{\beta_1} \operatorname{cov}(\beta^*_1\beta^*_2) & \cdots & \operatorname{cov}(\beta^*_1\beta^*_m) \\ \operatorname{cov}(\beta^*_2\beta^*_0) & \operatorname{cov}(\beta^*_2\beta^*_1) & \cdots & \operatorname{cov}(\beta^*_2\beta^*_m) \\ & \vdots & \vdots & \\ \operatorname{cov}(\beta^*_m\beta^*_0) & \operatorname{cov}(\beta^*_m\beta^*_1) & \cdots & \operatorname{cov}(\beta^*_m\beta^*_2)\sigma^2_{\beta_m} \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma^2_\varepsilon \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & \cdots & c_{1,m+1} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & \cdots & c_{2,m+1} \\ & & \vdots & \vdots & \\ & & \vdots & \vdots & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & \cdots & c_{m+1,m+1} \end{pmatrix},$$

де

$$\sigma^2_{\beta^*_0} = \sigma^2_\varepsilon c_{11},\ \sigma^2_{\beta^*_1} = \sigma^2_\varepsilon c_{22},\ \sigma^2_{\beta^*_2} = \sigma^2_\varepsilon c_{33}, \ldots, \sigma^2_{\beta^*_m} = \sigma^2_\varepsilon c_{m+1,m+1}. \quad (2.9)$$

Отже, дисперсії оцінок β^*_i дорівнюватимуть добуткам діагональ-них елементів c_{ij} матриці C, помножених на σ^2_ε, де $C = \left(X^{\mathrm{T}} X\right)^{-1}$.

Враховуючи, що коефіцієнти емпіричної множинної лінійної регресії є випадковими величинами, сама ця функція буде випадковою.

Визначимо основні числові характеристики для неї.

Розглянемо рівняння множинної лінійної регресії з параметрами $\beta^*_i \left(i = 0,1,2,\ldots,m\right)$, визначеними за даними вибірки

$$y^*_i = \beta^*_0 + \beta^*_1 x_1 + \beta^*_2 x_2 + \cdots + \beta^*_m x_m, \quad (2.10)$$

де y^*_i — одне із можливих значень для заданого вектора $x^T = \left(x_1, x_2, \ldots, x_m\right)$.

Оскільки емпіричні коефіцієнти функції (2.10) випадкові величини, то й емпірична функція y^*_i буде випадковою. Отже, постає питання про визначення її основних характеристик:

1. *Математичне очікування*:

$$M(y_i^*) = M(\beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \cdots + \beta_m^* x_m) =$$
$$= M(\beta_0^*) + x_1 M(\beta_1^*) + x_2 M(\beta_2^*) + \cdots + \qquad (2.11)$$
$$+ x_m M(\beta_m^*) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_m x_m.$$

Тобто $y^* = x\beta^*$ є незмінною оцінкою теоретичної функції $y = x\beta$.

Із (2.11) випливає, що для емпіричної функції регресії $y^* = X\vec{\beta}^*$ виконуватиметься рівність

$$M(y^*) = M(X\beta_0^*) = XM(\beta^*) = X\beta, \qquad (2.12)$$

2. *Дисперсія:*

$$D(y^*) = D(\beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \cdots + \beta_m^* x_m) =$$
$$= D(\beta_0^*) + x_1^2 D(\beta_1^*) + x_2^2 D(\beta_2^*) + \cdots + x_m^2 D(\beta_m^*) +$$
$$+ 2x_1 \operatorname{cov}(\beta_0^* \beta_1^*) + 2x_2 \operatorname{cov}(\beta_0^* \beta_2^*) + \cdots + 2x_m \operatorname{cov}(\beta_0^* \beta_m^*) +$$
$$+ 2x_1 x_2 \operatorname{cov}(\beta_1^* \beta_2^*) + \cdots + 2x_1 x_m \operatorname{cov}(\beta_1^* \beta_m^*) + \cdots +$$
$$+ 2x_{m-1} x_m \operatorname{cov}(\beta_{m-1}^* \beta_m^*) = x^T \operatorname{cov}((\beta^*)^T \beta^*) x.$$

Векторно-матричний вигляд:

$$D\left(y_i^*\right) = \sigma_\varepsilon^2 x^{\mathrm{T}} \left(X^{\mathrm{T}} X\right)^{-1} X.$$

3. *Середньоквадратичне відхилення:*

$$\sigma_{y_i^*} = \sigma_\varepsilon \sqrt{x^{\mathrm{T}} (X^{\mathrm{T}} X)^{-1} \vec{X}}.$$

2.5. Теорема Гаусса–Маркова для множинної лінійної регресії

Нехай задано рівняння регресії

$$y = X\beta + \varepsilon$$

і виконуються передумови використання МНК:

1) X — детермінована матриця порядку $n\times(m+1)$ ранга $(m+1)$;

2) ε — випадковий вектор порядку $n\times 1$, $M(\varepsilon)=0$, $\operatorname{cov}(\varepsilon\varepsilon^{\mathrm{T}})=$ $=\sigma_{\varepsilon}^{2}I_{n}$, тоді $\beta^{*}=\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}Xy$ буде найбільш ефективною (в розумінні найменшої дисперсії) статистичною оцінкою в класі лінійних незміщених оцінок за умови відсутності апріорної інформації про вектор β.

Нехай вектор

$$b^{*}=(A+B)y,$$

де $A=\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}}$, $B-n\times(m+1)$ — невід'ємно-визначена матриця.

Тоді

$$M(b^{*})=M(A+B)y=(A+B)M(y)=(A+B)M(X\beta+\varepsilon)=$$
$$=(A+B)X\beta+(A+B)M(\varepsilon)=(AX+BX)\beta=$$
$$=((X^{T}X)^{-1}X^{T}X+BX)\beta=(I+BX)\beta=\beta+(BX)\beta,$$

оскільки $M(\varepsilon)=0.$

Вектор b^{*} буде незміщеною статистичною оцінкою для вектора β, якщо

$$BX=0. \qquad (2.13)$$

Визначимо коваріацію вектора b^{*}:

$$\operatorname{cov}(b^{*}(b^{*})^{\mathrm{T}})=M(b^{*}-\beta)(b^{*}-\beta)^{\mathrm{T}}=$$
$$=M((A+B)y-\beta)((A+B)y-\beta)^{\mathrm{T}}=$$
$$=M((A+B)(X\beta+\varepsilon)-\beta)((A+B)(X\beta+\varepsilon)-\beta)^{\mathrm{T}})=$$
$$=M[((AX+BX)\beta+(A+B)\varepsilon-\beta)((AX+BX)\beta+(A+B)\varepsilon-\beta)].$$

Оскільки

$$AX=(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}X=I;\ BX=0,\ \text{то}$$

$$\operatorname{cov}\left(b^*(b^*)^{\mathrm{T}}\right) = M(b+(A+B)\varepsilon-\beta)(\beta+(A+B)\varepsilon-\beta)^{\mathrm{T}} =$$
$$= M((A+B)\varepsilon)\left((A+B)\varepsilon\right)^{\mathrm{T}} = M((A+B)\varepsilon\varepsilon^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}})) =$$
$$= (A+B)M(\varepsilon\varepsilon^{\mathrm{T}})(A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}) = (A+B)\operatorname{cov}(\varepsilon\varepsilon^{\mathrm{T}})(A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}),$$

оскільки $\left(M\left(\varepsilon v\varepsilon^{\mathrm{T}}\right) = \operatorname{cov}\left(\varepsilon\varepsilon^{\mathrm{T}}\right)\right)$, а $\sigma_\varepsilon^2 = \text{const}$, то

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left(b^*(b^*)^{\mathrm{T}}\right) &= \sigma_\varepsilon^2\left(AA^{\mathrm{T}} + AB^{\mathrm{T}} + BA^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}}\right) = \\ &= \sigma_\varepsilon^2\left((X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} + \\ &+(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + B\left((X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}}\right) = \\ &= \sigma_\varepsilon^2\left((X^{\mathrm{T}}X)^{-1} + BB^{\mathrm{T}}\right) = \sigma_\varepsilon^2\left((X^{\mathrm{T}}X)^{-1} + \sigma_\varepsilon^2 BB^{\mathrm{T}}\right),\end{aligned} \tag{2.14}$$

оскільки $BX = 0$.

Таким чином,

$$\operatorname{cov}\left(b^*(b^*)^{\mathrm{T}}\right) = \sigma_\varepsilon^2\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1} + \sigma_\varepsilon^2 BB^{\mathrm{T}}, \tag{2.15}$$

або

$$\operatorname{cov}\left(b^*\left(b^*\right)^{\mathrm{T}}\right) = \sigma_\varepsilon^2\left(\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1} + BB^{\mathrm{T}}\right).$$

Запишемо добуток матриць $B \times B^{\mathrm{T}}$:

$$B \times B^T = \begin{pmatrix} b_{11}b_{12} & \cdots\cdots & b_{1n} \\ b_{21}b_{22}\cdots & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1}b_{n2} & \cdots\cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Подамо рівність (2.15) в такому вигляді:

$$\begin{pmatrix} \sigma^2_{\beta_0} \operatorname{cov}(\beta^*_0\beta^*_1) & \operatorname{cov}(\beta^*_0\beta^*_2) & \cdots & \operatorname{cov}(\beta^*_0\beta^*_m) \\ \operatorname{cov}(\beta^*_1\beta^*_0) & \sigma^2_{\beta_1} \operatorname{cov}(\beta^*_1\beta^*_2) & \cdots & \operatorname{cov}(\beta^*_1\beta^*_m) \\ \operatorname{cov}(\beta^*_2\beta^*_0) & \operatorname{cov}(\beta^*_2\beta^*_1) & \cdots & \sigma^2_{\beta_2} \operatorname{cov}(\beta^*_2\beta^*_m) \\ & \vdots & \vdots & \\ \operatorname{cov}(\beta^*_m\beta^*_0) & \operatorname{cov}(\beta^*_m\beta^*_1) & \cdots & \sigma^2_{\beta m} \end{pmatrix} =$$

(2.16)

$$= \sigma^2_\varepsilon \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,m+1} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,m+1} \\ & & \vdots & \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{m+1,m+1} \end{pmatrix} + \sigma^2_\varepsilon \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,m+1} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,m+1} \\ & & \vdots & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{m+1,m+1} \end{pmatrix}.$$

Аналогічно (2.9), враховуючи (2.16), маємо

$$\sigma^2_{\beta_0} = \sigma^2_\varepsilon (c_{11} + b_{11}),$$

$$\sigma^2_{\beta_1} = \sigma^2_\varepsilon (c_{22} + b_{22}), ..., \sigma^2_{\beta_m} = \sigma^2_\varepsilon (c_{m+1,m+1} + b_{m+1,m+1}). \quad (2.17)$$

Порівнюючи дисперсії (2.9) і (2.17) для вектора β^* і вектора b^*, бачимо, що дисперсії (2.9) будуть меншими на величину діагональних елементів матриці $B \times B^{\mathrm{T}}$, порівняно з дисперсіями (2.17) для вектора b^*, що й доводить твердження теореми.

2.6. Визначення точкової незміщеної статистичної оцінки для σ^2_ε випадкових відхилень ε_i

Оскільки e_i є статистичною оцінкою для ε_i, то σ^2_ε буде пов'язане із e_i. Прогнозне значення ознаки Y дорівнюватиме $y^* = X\beta^* = X\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}}y$.

Позначивши $X\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}} = N$, одержимо $y^* = Ny$.

Вектор залишків

$$e = y - y^* = y - X\beta^* = y - X(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}y =$$
$$= (I - X(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}})y = (I - N)y = Ty.$$

Отже,

$$e = Ty, \tag{2.18}$$

де

$$I - N = T.$$

Оскільки

$$N' = N;\ N^2 = N;\ T' = T;\ T^2 = T,$$

то матриці N, T називають ідемпотентними. Окрім того слід tr матриці T дорівнює:

$$trT = tr\left(I - N\right) = trI - trN.$$

Враховуючи особливу структуру матриць N і T, маємо

$$NX = X\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}}X = X\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}\left(X^{\mathrm{T}}X\right) = X\ ;$$

$$NX = X;\ TX = \left(I - N\right)X = IX - NX = X - X = 0;$$

$$TX = 0.$$

Повернемося до вектора відхилень (2.18):

$$e = Ty = T\left(X\beta + \varepsilon\right) = \left(TX\right)\beta + T\varepsilon = T\varepsilon\ ,$$

$$e = T\varepsilon\ . \tag{2.19}$$

Сума квадратів відхилення:

$$e^{\mathrm{T}}e = \left(T\varepsilon\right)^{\mathrm{T}}\left(T\varepsilon\right) = \varepsilon T\varepsilon\ . \tag{2.20}$$

Візьмемо математичне сподівання від правої та лівої частини рівності (2.20), використовуючи (2.19):

$$M\left(e^{\mathrm{T}}e\right) = M\left(\varepsilon^{\mathrm{T}}T\varepsilon^{\mathrm{T}}\right) = \sigma_\varepsilon^2 tr(T) = \sigma_\varepsilon^2 tr\left(I_n - X\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}}\right) =$$

$$= \sigma_\varepsilon^2\left[tr(I_n) - tr(X(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X')\right] = \sigma_\varepsilon^2\left[tr(I_n) - tr(X^{\mathrm{T}}X(X^{\mathrm{T}}X)^{-1})\right] =$$

$$= \sigma_\varepsilon^2\left[trI_n - trI_{m+1}\right] = \sigma_\varepsilon^2(n - m - 1),$$

оскільки матриця $X^{\mathrm{T}}X$ має порядок $\left(m+1\right)$ і

$$tr\left(X(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}\right)=tr\left((X^{\mathrm{T}})^{-1}X^{\mathrm{T}}\right)=trI_{m+1}=m+1,$$

де I_{m+1} — одинична матриця $m+1$-го порядку.

Таким чином,

$$M\left(e^{T}e\right)=\sigma_{\varepsilon}^{2}\left(n-m-1\right).$$

Тоді незміщена оцінка S_{ε}^{2} дисперсії та середньоквадратичне відхилення S_{ε} обчислюватиметься за формулою

$$S_{\varepsilon}^{2}=\frac{e^{\mathrm{T}}e}{n-m-1}=\frac{\sum e_{i}^{2}}{n-m-1}. \qquad (2.21)$$

Враховуючи (2.21), вирази (2.10), (2.13), (2.12), (2.14) набувають вигляду:

$$\mathrm{cov}\left(\beta^{*}\left(\beta^{*}\right)^{\mathrm{T}}\right)=S_{\varepsilon}^{2}\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1},$$

$$\sigma_{\beta_0^*}^{2}=S_{\beta_0^*}^{2}=S_{\varepsilon}^{2}c_{11},\sigma_{\beta_1^*}^{2}=S_{\beta_1^*}^{2}=S_{\varepsilon}^{2}c_{22},$$

$$\ldots\sigma_{\beta_m^*}^{2}=S_{\beta_m^*}^{2}=S_{\varepsilon}^{2}c_{m+1,m+1},$$

$$S_{y_i^*}^{2}=S_{\varepsilon}\sqrt{x^{\mathrm{T}}\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}x},$$

де $S_{y_i^*}^{2}$ — відповідно незміщена оцінка дисперсії відхилення емпіричної функції регресії.

2.7. Статистична незалежність оцінок β^{*} і S_{ε}^{2}

Як відомо з (2.6),

$$\beta^{*}=\beta+\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}}\vec{\varepsilon}.$$

Позначивши $\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}}=A$, одержимо

$$\vec{\beta}^{*}=\vec{\beta}+A\vec{\varepsilon}.$$

Для подальших досліджень доведемо, що:

$$AT = (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}(1 - X(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}) =$$
$$= (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}} - (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}X(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}} =$$
$$= (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}} - (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}} = 0.$$

Оскільки $e = y - X\beta^*$, то, враховуючи, що $y = X\beta + \varepsilon$, $\beta^* = \left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}}y$, запишемо:

$$e = X\beta + \varepsilon - X\left((X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}y\right) = X\beta + \varepsilon - X\left(\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}}(X\beta + \varepsilon)\right) =$$
$$= X\beta + \varepsilon - X\beta - X\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}}\varepsilon = \varepsilon - X\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}}\varepsilon =$$
$$= \left(I - X\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}}\right)\varepsilon = T\varepsilon.$$

Отже,

$$e = T\varepsilon.$$

Тоді, оскільки $M(\varepsilon) = 0$ і $T^{\mathrm{T}} = T$,

$$\mathrm{cov}\left(\beta^*, e^{\mathrm{T}}\right) = M\left(\beta^* - \beta\right)\left(e - \varepsilon\right)^{\mathrm{T}} = M\left(\beta^* - \beta\right)e^{\mathrm{T}} =$$
$$= M\left(\beta + A\vec{\varepsilon} - \beta\right)\left(T\varepsilon\right)^{\mathrm{T}} = M\left(A\varepsilon\varepsilon^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}\right) = A\mathrm{cov}\left(\varepsilon\varepsilon^{\mathrm{T}}\right)T^{\mathrm{T}} =$$
$$= A\sigma_\varepsilon^2 I_n T^{\mathrm{T}} = \sigma_\varepsilon^2 AT^{\mathrm{T}} = \sigma_\varepsilon^2 AT = 0.$$

Таким чином, $\mathrm{cov}\beta\left(\vec{\beta}^*, e^{\mathrm{T}}\right) = 0$, тобто зв'язок між β^* і e відсутній. Враховуючи, що S_ε^2 є функцією від e, маємо незалежність між β^* та S_ε^2.

2.8. Коефіцієнт детермінації

Коефіцієнт детермінації для множинної лінійної регресії — це неспадана функція від числа *m* регресорів *x*.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}. \qquad (2.22)$$

Кожна нова змінна надає моделі додаткову інформацію і область невизначеності при цьому зменшується.

При обчисленні R^2 для одержання її незміщених статистичних оцінок здійснюють поправку в чисельнику і знаменнику (2.22) на число степенів вільності. Такий коефіцієнт називають скоригованим:

$$R^2_{\text{ск}} = 1 - \frac{\dfrac{\sum e_i^2}{n-m-1}}{\dfrac{\sum\left(y_i - y^2\right)}{n-1}} = 1 - \frac{(n-1)\sum e_i^2}{(n-m-1)\sum\left(y_i - y^2\right)}.$$

Враховуючи, що

$$\frac{\sum y_i^2}{\left(y_i - y^2\right)} = 1 - R^2,$$

остаточно одержуємо

$$R^2_{\text{ск}} = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n-1}{n-m-1}.$$

Звідси випливає, що $R^2_{\text{ск}} < R^2$.

Доведено, що $R^2_{\text{ск}}$ збільшується при введенні в модель нової пояснювальної змінної лише за умови, якщо для неї $|t^*| > 1$, де t^* — спостережувальне значення t — статистики.

2.9. Закони розподілу оцінок $\beta_i^*\left(i = \overline{0,m}\right)$ емпіричної регресії

Для перевірки значущості статистичних оцінок β_i^* і щоб знайти для них, а також для множинної лінійної регресії довірчі інтервали, необхідно визначити їхні закони розподілу як випадкових величин.

Оскільки $\varepsilon_i \square N\left(0, \sigma_\varepsilon\right)$, то випадковий вектор ε_i має n-вимірний нормальний закон розподілу $N\left(0, \sigma_\varepsilon^2 I_n\right)$.

Із рівності (2.6) випливає, що

$$\beta_i^* \sim N(\beta, \sigma_\varepsilon^2 \left(X^{\mathrm{T}} X \right)^{-1}.$$

Тоді компоненти вектора β^* матимуть нормальні розподіли

$$\beta^* \sim N\left(\beta, \sigma_\varepsilon^2 c_{ii}\right),$$

а випадкова величина матиме нормований розподіл:

$$\frac{\beta_i^* - \beta_i}{\sigma_\varepsilon \sqrt{c_{ii}}} \sim N(0,1).$$

Відповідно випадкова величина теж має нормальний розподіл:

$$\left(\beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + ... + \beta_m^* x_m\right) \square$$

$$\sim N\left(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_m x_m, \sigma_\varepsilon^2 x^{\mathrm{T}} \left(X^{\mathrm{T}} X \right)^{-1} x\right).$$

Позначимо

$$y_i^* = \beta_0^* + \beta_1^* x_1 + \beta_2^* x_2 + \ldots + \beta_m^* x_m,$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_m x_m.$$

Тоді випадкова величина $\frac{y_i^* - y_i}{\sigma_{y_i^*}}$ матиме нормований нормальний закон розподілу ймовірностей.

$$\frac{y_i^* - y_i}{\sigma_{y_i^*}} \sim N(0;1).$$

Для визначення законів розподілу ймовірностей випадкових величин S_ε^2 і S_ε дослідимо випадковий вектор залишків ε_i. Відповідно до передумов МНК, компоненти ε_i вектора ε_i мають нормальний закон розподілу із параметрами $M(\varepsilon_i) = 0$, $D(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2 =$ = const, $\varepsilon_i \square N\left(0; \sigma\right)$. Тоді

$$\varepsilon T\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) T \begin{pmatrix} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = (n-m-1)\sum \varepsilon_i^2.$$

Враховуючи, що $\varepsilon_i \sim N(0;\sigma_\varepsilon)$, випадкова величина

$$\frac{\varepsilon T\varepsilon}{(n-m-1)\sigma_\varepsilon^2} \sim \chi^2(n-m-1), \qquad (2.23)$$

матиме розподіл χ^2 із $k = n-m-1$ степенем вільності.

Оскільки

$$e = TY = T(X\beta+\varepsilon) = TX\beta + T\varepsilon = T\varepsilon,$$

і враховуючи те, що $TX = 0$, і $T^{\mathrm{T}} = T$

$$e^T = (Ty)^{\mathrm{T}} = y^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}} = (X\beta+\varepsilon)^{\mathrm{T}} T^{\mathrm{T}} = \beta^{\mathrm{T}} X^{\mathrm{T}} T^{\mathrm{T}} + \varepsilon^T T^T = \varepsilon^{\mathrm{T}} T^{\mathrm{T}}, \text{ і}$$

$$\vec{e}\vec{e} = \vec{\varepsilon}' TT\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}' T\vec{\varepsilon}.$$

Оскільки $T^{\mathrm{T}}T = T,$ випадкова величина (2.23) має розподіл χ^2 із $k = n-m-1$ степенем вільності.

$$\frac{ee^{\mathrm{T}}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-m-1).$$

Отже, доведено, що

$$S_\varepsilon^2 \sim \chi^2(n-m-1),$$

$$S_\varepsilon \sim \chi(n-m-1),$$

тобто відповідно мають розподіл χ^2 і розподіл χ із $k = n-m-1$ степенями вільності.

Враховуючи те, що β^* і e незалежні, випадкова величина *t* має розподіл Стьюдента із $k = n-m-1$ степенями вільності:

$$t = \frac{\beta_i^* - \beta_i}{\sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-m-1} c_{ii}}} \sim t(n-m-1). \qquad (2.24)$$

Аналогічно, для функції регресії маємо випадкову величину

$$\frac{y_i^* - y_i}{S_{y_i^*}} \sim t(n-m-1),$$

яка має *t*-розподіл із $k = n-m-1$ степенями вільності, де

$$S_{y_i^*} = S_\varepsilon \sqrt{X^T \left(X^T X\right)^{-1} X}^T .$$

Враховуючи те, що

$$\frac{\sum_{i=1}^m \left(\beta_i^* - \beta_i\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m),$$

а

$$\frac{\sum e_i^2}{\sigma^2 (n-m-1)} \sim \chi^2(n-m-1),$$

то відношення $\dfrac{\dfrac{\sum_{i=1}^m \left(\beta_i^* - \beta_i\right)^2}{m}}{\dfrac{\sum e_i^2}{n-m-1}} \sim F(k_1 = m, k_2 = n-m-1)$

має розподіл Фішера із $k_1 = m, k_2 = n-m-1$ степенями вільності.

2.10. Довірчі інтервали теоретичної множинної лінійної регресії та її параметрів β_i

Для побудови довірчих інтервалів оцінок параметрів β_i використовують співвідношення (2.24). Із надійністю γ цей інтервал визначається за умови, що

$$P\left(\left|\frac{\beta_i^* - \beta_i}{\sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-m-1} c_{ii}}}\right| < t(\gamma,k)\right) = \gamma. \qquad (2.25)$$

Враховуючи що $\sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-m-1} c_{ii}} = S_{\beta_i^*}$ є незміщеною оцінкою середнього квадратичного відхилення для β_i^*, вираз (2.25) набуде такого вигляду:

$$P\left(\left|\frac{\beta_i^* - \beta_i}{S_{\beta_i^*}}\right| < t(\gamma,k)\right) = \gamma$$

або

$$P\left(\beta_i^* - t(\gamma,k) S_{\beta_i^*} < \beta_i < \beta_i^* + t(\gamma,k) S_{\beta_i^*}\right) = \gamma.$$

Тобто, із заданою надійністю γ параметр β_i міститеться в проміжку

$$\beta_i^* - t(\gamma,k) S_{\beta_i^*} < \beta_i < \beta_i^* + t(\gamma,k) S_{\beta_i^*},$$

де $t(\gamma,k)$ знаходиться по таблиці (дод. 1) за заданою надійністю γ і числом степенів вільності $k = n-m-1$.

Аналогічно для побудови довірчого інтервалу для теоретичної множинної лінійної функції регресії із заданою надійністю γ використовується рівність

$$P\left(\left|\frac{y_i^* - y_i}{S_{y_i^*}}\right| \sim t(\gamma,k)\right) = \gamma,$$

або

$$y_i^* - t(\gamma,k) S_{y_i^*} < y_i < y_i^* + t(\gamma,k) S_{y_i^*},$$

де y_i^*, $S_{y_i^*}$ визначаються за формулами (2.10), (2.24) для фіксованих значень вектора $x^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Якщо до значень $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_m x_m$ додати можливі відхилення залежної змінної *Y* від функції регресії, то до дисперсії $D\left(y_i^*\right)$ необхідно додати дисперсії випадкової величини ε_i, яка дорівнює σ_ε^2. Однак, враховуючи, що σ_ε^2 невідома величина, використовуємо її точкову незміщену статичну оцінку S_ε^2:

$$\left(S_{y_i^*}^*\right)^2 = S_\varepsilon^2\left(I + x^{\mathrm{T}}\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}x\right).$$

Довірчий інтервал для y_i дорівнюватиме

$$y_i^* - t(\gamma,k)S_{y_i^*} < y_i < y_i^* + t(\gamma,k)S_{y_i^*}.$$

2.11. Перевірка статистичної значущості коефіцієнтів теоретичного рівняння регресії

Статистична значущість коефіцієнтів теоретичної множинної лінійної регресії із *m* регресорами здійснюється на основі *t*-статистики,

$$t_{\beta_i^*}^* = \frac{\beta_i^* - \beta_i}{S_{\beta_i^*}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

яка має розподіл Стьюдента із $k = n - m - 1$ степенями вільності.

Для заданого рівняння α значущості здійснюється перевірка правдивості статистичної гіпотези $H_0 : \beta_i = 0$ при альтернативній гіпотезі $H_\alpha : \beta_i \neq 0$.

Формулювання альтернативної гіпотези дає підстави для побудови двобічної критичної області. Враховуючи те, що *t*-розподіл визначається парною диференційною функцією, то за заданим значенням α і числом степенів вільності $k = n - m - 1$ знаходиться критичне значення $t''_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2}; k\right)$ за таблицею (дод. 2).

Враховуючи те, що $\left|t'_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)\right| = t''_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)$, тобто критичні точки симетрично розташовані відносно нуля, область прийняття H_0 дорівнюватиме

$$\left[t^{\text{Т}}_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2};k\right),\ t^{\text{ТТ}}_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)\right].$$

Спостережуване значення статистичного критерію обчислюється за формулою

$$t^*_{\beta_i} = \frac{\beta^*_i}{S_{\beta^*_i}}.$$

Якщо $\left|t^*_{\beta_i}\right| \in \left[t^{\text{Т}}_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2};k\right), t^{\text{ТТ}}_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)\right]$, то коефіцієнти β_i вважаються статистично незначущими, тобто вони статистично близькі до нуля. Це означатиме, що фактор X_i лінійно не пов'язаний із залежною змінною Y і його присутність в моделі можна вважати зайвою із статистичної точки зору.

При виявленні такої ситуації рекомендується вивести X із моделі, що не викличе зниження її якості, але надасть більш чіткої конкретності.

Якщо

$$\left|t^*_{\beta_i}\right| \notin \left[t^{\text{Т}}_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2};k\right), t^{\text{ТТ}}_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2};k\right)\right],$$

то коефіцієнти β_i вважаються статистично значущими, фактор X_i має вплив на залежну змінну Y.

2.12. Перевірка загальної якості множинної лінійної регресії

Після оцінювання індивідуальної статистичної значущості кожного із коефіцієнтів регресії β_i здійснюється сукупна перевірка коефіцієнтів, тобто перевіряється на правдивість статистична гіпотеза:

$$H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_m = 0$$

для заданого рівня довіри α.

Якщо H_0 не відхиляється, то можна зробити висновок, що сукупний вплив всіх m пояснювальних змінних на залежну змінну Y можна вважати статистично несуттєвим, а загальна якість рівняння регресії низька.

Цю гіпотезу можна перевірити на основі дисперсійного аналізу, де порівнюються пояснювальна $\left(\frac{\sum\left(y_i^* - \bar{y}\right)^2}{m}\right)$ та залишкова $\left(\frac{\sum e_i^2}{n-m-1}\right)$ дисперсії.

У цьому разі нульова гіпотеза набуває такого формулювання:

$$H_0 : \frac{\sum\left(y_i^* - \bar{y}\right)^2}{m} = \frac{\sum e_i^2}{n-m-1},$$

за альтернативної гіпотези

$$H_\alpha : \frac{\sum\left(y_i^* - \bar{y}\right)^2}{m} > \frac{\sum e_i^2}{n-m-1}.$$

Для перевірки правдивості H_0 береться статистичний критерій

$$F = \frac{\dfrac{\sum\left(y_i^* - \bar{y}\right)^2}{m}}{\dfrac{\sum\left(y_i - y_i^*\right)^2}{n-m-1}} = \frac{(n-m-1)\sum\left(y_i^* - \bar{y}\right)^2}{m\sum\left(y_i - y_i^*\right)^2}, \qquad (2.26)$$

який має розподіл Фішера із $k_1 = m, k_2 = n-m-1$ степенями вільності і який визначений на інтервалі $[0, \infty)$.

Формулювання альтернативної гіпотези дає підстави для побудови правобічної критичної області. Критична точка для неї визначається за заданим α і числом степенів вільності $k_1 = m$, $k_2 = n-m-1$ за таблицею *F*-критерію (дод. 3).

Спостережуване значення критерію $F_{\text{сп}}^*$ обчислюється за формулою (2.26). Якщо $F_{\text{сп}}^* > \left[F_{\text{кр}}\left(\alpha; k_1; k_2\right)\right]$, то H_0 відхиляється на користь H_α. Це означає, що пояснювальна дисперсія значно

більша від залишкової, а це інформує про те, що рівняння регресії якісно моделює динаміку зміни *Y*.

За умови $F^*_{\text{сп}} \in \left[0, F_{\text{кр}}\left(\alpha; k_1; k_2\right)\right]$ немає підстави для відхилення H_0. А це означає, що пояснювальна дисперсія буде спільновимірною із дисперсією, викликаною впливом випадкових факторів. Це дає підстави стверджувати, що сукупний вплив пояснювальних змінних моделі на залежну змінну *Y* несуттєвий, а тому якість моделі в цьому випадку буде низькою.

На практиці частіше замість вище розглянутої гіпотези перевіряється на правдивість тісно з нею пов'язана гіпотеза про статистичну значущість коефіцієнта детермінації:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum \left(y_i - \bar{y}\right)^2},$$

де $\dfrac{\sum e_i^2}{\sum \left(y_i - \bar{y}\right)^2}$ визначає частку розсіювання залежної змінної *Y* відносно емпіричної регресії.

Отже, необхідно перевірити правдивість $H_0 : R^2 = 0$ при альтернативній $H_\alpha : R^2 > 0$. За статистичний критерій вибирається випадкова величина

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}, \qquad (2.27)$$

яка має розподіл Фішера із $k_1 = m, k_2 = n - m - 1$ степенями вільності.

Статистичний критерій (2.27) отримано із *F*-статистики

$$F = \frac{\sum \left(y_i^* - \bar{y}\right)^2}{\sum \left(y_i - y_i^*\right)^2} \cdot \frac{(n - m - 1)}{m},$$

якщо чисельник і знаменник розділити на $\sum \left(y_i - \bar{y}\right)^2$.

Із (2.27) випливає, що $F = 0$ якщо $R^2 = 0$.

Отже, для перевірки статистичної гіпотези $H_0 : F = 0 (R^2 = 0)$ для заданого рівня значущості α за таблицею (дод. 3) знаходиться $F_{кр}(\alpha; k_1; k_2)$, який визначатиме критичну область $F_{кр}((\alpha; k_1; k_2); \infty)$.

Обчисливши спостережуване значення критерію, за формулою (2.27) визначаємо:

1) якщо $F^*_{сп} > F_{кр}$, то H_0 відхиляється, а це рівнозначно твердженню, що $R^2 > 0$, тобто R^2 є статистично значущим. У цьому разі можна зробити висновок, що рівняння регресії достатньо якісно моделює динаміку зміни залежної змінної *Y*;

2) якщо $F^*_{сп} < F_{кр}$, то немає підстав для відхилення H_0, $R^2 = 0$, а це інформує про те, що сукупний вплив регресорів моделі несуттєвий, а значить, якість моделі в цьому випадку низька.

Приклад 2.1. Знайти залежність ціни автомобіля (*Y*) від віку автомобіля (X_1) та об'єму двигуна (X_2) на основі вибіркових даних [6] (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

Вибіркові дані

№ з/п	Ціна автомобіля (*Y*), ум. од.	Вік автомобіля (X_2), роки	Об'єм двигуна автомобіля (X_2), $дм^3$
1	11	6	3
2	3,2	10	1,3
3	8,7	10	1,8
4	1,6	16	1,8
5	17	2	2,4
6	18,9	4	4
7	15,8	3	2
8	18	6	3
9	19	3	4
10	6	6	1,6
11	13	6	2,6
12	22,7	5	2,1
13	13,9	3	2
14	10,9	3	1,5

15	9,5	8	2,6
16	28	3	2,2
17	6	8	1,8
№ з/п	Ціна автомобіля (Y), ум. од.	Вік автомобіля (X_2), роки	Об'єм двигуна автомобіля (X_2), дм^3
18	5,8	9	1,6
19	2,8	11	1,6
20	26	1	2,2
21	10,5	6	2
22	16,9	7	2,3
23	3,4	9	1,5
24	14	1	1,4
25	23	1	1,8
Середнє	13,024	5,88	2,164

Припустимо, що існує лінійна залежність:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon.$$

Необхідно:

1) обчислити статистичну оцінку вектора $\overline{\beta}$;

2) проаналізувати степінь адекватності побудованої моделі вибірковим даним;

3) виконати дисперсійний аналіз моделі та обчислити коефіцієнт множинної детермінації R^2;

4) перевірити статистичну значущість коефіцієнта детермінації на основі критерію Фішера;

5) визначити дисперсії $S^2_{\beta_0^*}, S^2_{\beta_1^*}, S^2_{\beta_2^*}$ та середньоквадратичні відхилення $S_{\beta_0^*}, S_{\beta_1^*}, S_{\beta_2^*}$ для статистичних оцінок $\beta_0^*, \beta_1^*, \beta_2^*$;

6) для заданої надійності $\gamma = 0,95$ побудувати довірчі інтервали параметрів $\beta_0, \beta_1, \beta_2$;

7) одержати прогнозне значення y_p^* та побудувати для нього із надійністю $\gamma = 0,95$ довірчі інтервали.

Розв'язання:

1. *Обчислення статистичної оцінки для вектора* β.

Емпіричний вектор β^* визначимо за формулою (2.5):

$\beta^* = \left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1} X^{\mathrm{T}} y,$ де

$$\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,67227 & -0,02897 & -0,21347 \\ -0,02897 & 0,00330 & 0,00441 \\ -0,21347 & 0,00441 & 0,08667 \end{pmatrix},$$

$$X^{\mathrm{T}} y = \begin{pmatrix} 325,6 \\ 1400,4 \\ 762,95 \end{pmatrix}.$$

Статистичні оцінки параметрів моделі:

$$\beta_0^* = 15,46;\ \beta_1^* = -1,44;\ \beta_2^* = 2,79.$$

Тоді залежність ціни автомобіля від його віку та об'єму двигуна має вигляд:

$$y_i^* = 15,4608 - 1,4417 x_{i1} + 2,7914 x_{i2}.$$

2. *Аналіз степеня адекватності побудованої моделі вибірковим даним.*

Обчислимо вектор y_i^* за формулою

$$y_i^* = X\beta^*,$$

результати розрахунків наведено в табл. 2.2.

Правильність виконаних розрахунків можна перевірити, порівнюючи середні значення y та y^*, де

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = 13,024;\ y^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^*}{n} = 13,024$$

оскільки $y = y^*$, попередні розрахунки правильні.

Визначимо степінь адекватності моделі за статистичними даними табл. 2.2 через відхилення між фактичними значеннями та обчисленими за моделлю. Запишемо їх як елементи вектора *e*:

$$e_i = y_i - y_i^*.$$

Таблиця 2.2

Статистичні дані

№ з/п	y^*_i	$e_i = y_i - y^*_i$	e^2_i	$y^*_i - y$	$(y^*_i - y)^2$	$y_i - y$	$(y_i - y)^2$
1	15,18	– 4,18	17,51	2,16	4,668	– 2,024	4,096
2	4,67	– 1,47	2,16	– 8,35	69,75	– 9,824	96,51
3	6,06	2,63	6,92	– 6,956	48,38	– 4,324	18,69
4	– 2,58	4,18	17,49	– 15,61	243,56	– 11,42	130,51
5	19,27	– 2,27	5,18	6,253	39,09	3,976	15,81
6	20,85	– 1,95	3,83	7,836	61,39	5,876	34,52
7	16,71	– 0,91	0,84	3,694	13,64	2,776	7,71
8	15,18	2,81	7,92	2,161	4,66	4,976	24,76
9	22,3	– 3,3013	10,89	9,277	86,068	5,976	35,71
10	11,27	– 5,276	27,84	– 1,747	3,05	– 7,024	49,33
11	14,06	– 1,068	1,141	1,044	1,09	– 0,024	0,0006
12	14,11	8,586	73,71	1,090	1,188	9,676	93,62
13	16,71	– 2,818	7,94	3,694	13,64	0,876	0,767
14	15,32	– 4,42	19,56	2,299	5,28	– 2,124	4,511
15	11,18	– 1,68	2,83	– 1,839	3,38	– 3,524	12,41
16	17,27	10,723	114,98	4,253	18,08	14,97	224,28
17	8,95	– 2,95	8,71	– 4,073	16,59	– 7,024	49,33
1 8	6,95	– 1,15	1,325	– 6,073	36,88	– 7,224	52,18
19	4,06	– 1,26	1,607	– 8,956	80,21	– 10,22	104,53
20	20,16	5,83	34,103	7,136	50,92	12,97	168,37
21	12,39	– 1,89	3,584	– 0,631	0,39	– 2,524	6,37
22	11,78	5,111	26,12	– 1,235	1,525	3,876	15,023
23	6,67	– 3,27	10,71	– 6,352	40,34	– 9,624	92,62
24	17,92	– 3,92	15,42	4,903	24,03	0,976	0,952
25	19,04	3,956	15,65	6,020	36,23	9,976	99,52
Сума	325,6	0	438,01	–.–	904,12–	–.–	1342,18

Середнє значення $e = 0$, отже, розбіжностей немає, модель адекватна.

3. *Дисперсійний аналіз моделі та обчислення коефіцієнта* R^2.

Проведемо дисперсійний аналіз побудованої моделі. Відомо, що

$$y = y_i^* + e.$$

Можна довести, що й для дисперсій цих змінних виконується рівність

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - y)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i^* - y\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_i^*\right)^2.$$

4. *Перевірка статистичної значущості коефіцієнта множинної детермінації* R^2 *за критерієм Фішера.*

Для перевірки статистичної значущості впливу регресорів на залежну змінну моделі використовуємо статистичний критерій Фішера

$$F = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-m-1}{m}.$$

Для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ та степенях вільності $k_1 = m = 2,$ і $k_2 = n - m - 1 = 22$ за таблицею (дод. 3) знаходимо $F\left(\alpha; k_1; k_2\right) = 3{,}44.$

Спостережуване значення критерію Фішера:

$$F^* = \frac{R^2}{1-R^2}\cdot\frac{n-m-1}{m} = \frac{0{,}6736}{1-0{,}6736}\cdot\frac{22}{2} = 22{,}7.$$

Критерій Фішера має правобічну критичну область із критичною точкою . Оскільки $F^* > F\left(\alpha; k_1; k_2\right)$, то статистична гіпотеза $H_0 : R^2 = 0$ відхиляється, отже, всі регресори мають вплив на залежну змінну.

5. *Оцінювання дисперсій оцінок* $S_{\beta_0}^2, S_{\beta_1}^2, S_{\beta_2}^2$ та їх стандартних похибок параметрів $S_{\beta_0}, S_{\beta_1}, S_{\beta_2}$. Незміщена оцінка для дисперсії залишків σ_ε^2:

$$S_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-m-1}\sum e_i^2;\ S_\varepsilon{}^2 = \frac{1}{22}\cdot 438 \approx 19{,}9.$$

Коваріаційна матриця оцінок параметрів:

$$\operatorname{cov}\left(\beta^*\left(\beta^*\right)^{\mathrm{T}}\right)=S_{\varepsilon}{}^2\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1};$$

$$\operatorname{cov}\left(\beta^*\left(\beta^*\right)^{\mathrm{T}}\right)=\begin{pmatrix}13,3861 & -0,5768 & -4,2505\\ -4,2505 & 0,0658 & 0,0878\\ -4,2505 & 0,0878 & 1,7257\end{pmatrix}.$$

Звідки дисперсії оцінок параметрів

$$S^2_{\beta_0^*}=13,3861;\ S^2_{\beta_1^*}=0,0658;\ S^2_{\beta_2^*}=1,7257.$$

Середньоквадратичні відхилення оцінок параметрів:

$$S_{\beta_0^*}=\sqrt{S^2_{\beta_0^*}}=3,6587;\ S_{\beta_1^*}=\sqrt{S^2_{\beta_1^*}}=0,2565;$$

$$S_{\beta_2^*}=\sqrt{S^2_{\beta_2^*}}=1,3137.$$

6. *Перевірка статистичної значущості оцінок параметрів* β_0,β_1 та β_2. Сформулюємо нульову гіпотезу $H_0:\beta_i=0$ за альтернативної гіпотези $H_\alpha:\beta_i\neq 0$:

$$t^*_{\beta_j^*}=\frac{\beta_j^*-0}{S_{\beta_j^*}},\ j=0,1,2;\ t^*_{\beta_0^*}=\frac{15,4608}{3,6587}=4,22;$$

$$t^*_{\beta_1^*}=\frac{1,4417}{0,2565}=5,62;\ t^*_{\beta_2^*}=\frac{2,7914}{1,3137}=2,12.$$

За обчисленими значеннями $t^*_{\beta_i^*}$ знаходимо, що оскільки $t^*_{R^*}>2,074\left(i=0,1,2\right)$. то нульову гіпотезу H_0 про рівність нулю параметрів β_0,β_1 та β_2 відхиляємо.

7. *Розрахунок довірчих інтервалів оцінок параметрів* β_0,β_1 та β_2 із надійністю $\gamma=0,95$.

$$(15,4608-3,6587\cdot 2,074)<\beta_0<(15,4608+3,6587\cdot 2,074);$$
$$(-1,4417-0,2565\cdot 2,074)<\beta_1<(-1,4417+0,2565\cdot 2,074);$$
$$(2,7914-1,3137\cdot 2,074)<\beta_2<(2,7914+1,3137\cdot 2,074),$$

або

$$7,8726 < \beta_0 < 23,0489;$$
$$-1,9737 < \beta_1 < -0,9097;$$
$$0,0669 < \beta_2 < 5,5160.$$

На основі побудованої моделі можна зробити висновок, що ціна автомобіля, який міг би мати технічні характеристики, рівні середнім значенням x_1 та x_2 (див. табл. 2.1), дорівнювала б завдяки $\beta_0^* = 15,4608$ середньому значенню залежної змінної — $y = 13,024$ тис. ум. од. Збільшення віку автомобіля на один рік зменшує ціну на 1,44 тис. ум. од., а збільшення об'єму двигуна на 1 дм^3 приводить до збільшення ціни на 2,79 тис. ум. од. Фактори, включені в модель, пояснюють «поведінку» ціни лише на 67,4 %. Це можна пояснити тим, що на формування ціни на автомобіль впливають також інші фактори (престиж марки, тип двигуна, оснащення салону, колір тощо), які в даній моделі не враховано.

8. *Розрахунок прогнозного значення* y_p^* та побудова для нього із рівнем значущості $\alpha = 0,95$ довірчих інтервалів.

Оскільки значення ціни на автомобіль суттєво залежить від його віку та об'єму двигуна, доцільно розрахувати точковий прогноз y_p^* та довірчі інтервали прогнозу. Для цього задамо вектор прогнозних значень незалежних змінних: $x_p = [1\ 5\ 1,5]$. Розрахуємо точкове прогнозне значення:

$$y_p^* = x_p \beta^* = 12,43.$$

Довірчі інтервали прогнозу визначаються як

$$y_p^* - s_p t_{\alpha/2,k} < y_p < y_p^* - s_p t_{\alpha/2,k},$$

де s_p — стандартна похибка прогнозу.

Визначимо стандартну похибку прогнозного значення s_p

$$s_p = \sqrt{19,9119\left[1+\begin{bmatrix}1 & 5 & 1,5\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0,67227 & -0,02897 & -0,21347\\ -0,02897 & 0,00330 & 0,00441\\ -0,21347 & 0,00441 & 0,08667\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\5\\1,5\end{pmatrix}\right]} =$$

$$= \sqrt{21,6227} = 4,65$$

та обчислимо нижню і верхню межу прогнозного значення y_p:

$$(12,4392 - 4,65 \cdot 2,064) < y_p < (12,4392 + 4,65 \cdot 2,064),$$

або

$$2,8416 < y_p < 22,0369.$$

Отже, ціна на автомобіль може коливатися приблизно від 2,8 до 22,0 тис. ум. од. Це пояснюється тим, що різні марки легкових автомашин відрізняються й іншими технічними характеристиками.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. Як від скалярного запису (2.1) перейти до векторно-матричного (2.2)?
2. Теоретична і емпірична ММ: в чому їх різниця?
3. Що мінімізується в МНК?
4. Числові характеристики МНК-оцінки β?
5. Числові характеристики вектора y_i^*?
6. Теорема Гаусса-Маркова? За яких умов МНК-оцінка β буде найбільш ефективною?
7. Чому в МНК коваріаційна матриця оцінок β дорівнює $S_\varepsilon^*\left(X^T X\right)^{-1}$?
8. Як визначають довірчі інтервали МНК-оцінок параметрів β?
9. Як за критерієм Стьюдента визначити статистичну значущість МНК-оцінок β?
10. Як за критерієм Фішера перевірити якість ММ?
11. Виберіть довільні 5÷6 даних з таблиці 2.1. і проведіть розрахунки ММ згідно наведеного в прикладі 2.1 алгоритма.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Іванюта І. Д.* Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики / І. Д. Іванюта, В. І. Рибалка, І. А. Рудоміно-Дусятська. — К. : Слово, 2006. — 272 с.

2. *Толбатов Ю. А.* Економетрика / Ю. А. Толбатов. — Тернопіль : підручники і посібники, 2008. — 288 с.

3. *Крамер Г.* Математические методы статистики / Г. Крамер. — М. : Мир, 1975. — 280 с.

4. *Рао С. Ф.* Линейные статистические методы и их использование / С. Ф. Рао. — М. : Наука, 1968. — 300 с.

5. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ / Дж. Себер. — М. : Мир, 1980. — 320 с.

6. *Економетрія* / В. І. Жлуктенко, Н. К. Водзянова, С. С. Савіна, О. В. Колодінська. — К. : Видавництво Європейського університету, 2005. — 550 с.

Розділ 3

БАЙЄСІВСЬКЕ ОЦІНЮВАННЯ РЕГРЕСІЙНИХ МОДЕЛЕЙ І ЙОГО РЕДУКЦІЯ ДО МНК-ОЦІНЮВАННЯ

3.1. Статистичні критерії оптимальності

Розглянемо статистично оптимальні методи оцінювання параметрів, засновані на мінімізації функціонала J, визначеного на ймовірнісних функціях від шуканих параметрів і сигналів. Такими функціями є щільності p розподілу ймовірності інформації при наявності невизначеності щодо оцінюваних параметрів β. Статично оптимальна оцінка

$$\hat{\beta} = \operatorname{argmin} J\left(p(\beta / Y)\right),$$

де $p(\beta/Y)$ — апостеріорна щільність розподілу, що залежить від апріорних щільностей розподілу параметрів, сигналів і перешкод, а також від інформації Y, отриманої з даних експерименту.

Байєсівський метод оцінювання ґрунтується на відомій формулі $p(Y/\beta)\,p(\beta) = p(Y,\beta) = p(\beta/Y)\,p(Y)$, звідки

$$p(\beta/Y) = p(Y/\beta)\;p(\beta)\;/p(Y), \qquad (3.1)$$

де $p(\beta/Y)$ — апостеріорна щільність імовірності вектора невідомих параметрів $\hat{\beta}$, яка є найбільш повною характеристикою оцінки β за результатами вимірювань Y; $p(\beta)$ — апріорна щільність розподілу невідомих параметрів β; $p(Y/\beta)$ — умовна щільність імовірності вимірювань Y при фіксованому β; $p(Y)$ — безумовна щільність імовірності Y, тобто $p(Y)$ — інтеграл за всіма компонентами вектора β в області їх завдання:

$$p(Y) = \int p(Y,\beta)\,d\beta.$$

Нехай

$$Y = X\beta - \varepsilon, \text{ тобто } Y = Y^{*} - \varepsilon, \qquad (3.2)$$

де

$$Y=\begin{bmatrix} y(1) \\ . \\ . \\ . \\ y(M) \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x_1(1)\ldots x_n(1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1(M)\ldots..x_n(M) \end{bmatrix}, \beta=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ . \\ . \\ \beta_n \end{bmatrix}, \varepsilon=\begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ . \\ . \\ \varepsilon(\grave{I}\ ) \end{bmatrix}.$$

Як видно з (3.2) $p(Y/\beta)$ залежить від похибки, зумовленої шумом і неточністю моделі; за відомої щільності ймовірності похибки ε можна розрахувати щільність $p(Y/\beta)$.

У правій частині (3.1) всі ймовірності визначено і, отже, визначена бажана апостеріорна щільність імовірності $p(\beta/Y)$. Показник J ($p(\beta/Y)$) визначається через поняття функції втрат $C(\delta\beta)$, умовного та середнього ризику. У класі систем типу БАСІ для узгодження головного і робочого показників I і J функція втрат може задаватися у вигляді квадратичної форми від $\delta\beta$:

$$C(\delta\beta)=\delta I(\delta\beta)=\left(\left.\frac{\delta I}{\delta\beta}\right|_{\hat\beta}\right)^{\mathrm{T}}\delta\beta+\delta\beta^{\mathrm{T}}\left.\frac{\partial^2 I}{\partial\beta\partial\beta^{\mathrm{T}}}\right|_{\hat\beta}\delta\beta, \qquad (3.3)$$

де $\delta\beta=\hat\beta-\beta$ — відхилення оцінки $\hat\beta$ від істинного значення β вектора параметрів моделі;

$\left.\frac{\delta I}{\delta\beta}\right|_{\hat\beta}=\left(\left.\frac{\delta I}{\delta\beta_1}\right|_{\hat\beta},...,\left.\frac{\delta I}{\delta\beta_n}\right|_{\hat\beta}\right)^{\mathrm{T}}$ — градієнт основного показника I по вектору β, обчислений для $\hat\beta=\beta$;

$$\frac{\partial^2 I}{\partial\beta\partial\beta^{\mathrm{T}}}=\begin{bmatrix} \frac{\delta^2 I}{\delta\beta_1^2}|_{\hat\beta} & \cdots & \frac{\delta^2 I}{\partial\beta_1\partial\beta_n}|_{\hat\beta} \\ & \vdots & \\ \frac{\delta^2 I}{\partial\beta_{1n}\partial\beta_{1n}}|_{\hat\beta} & \cdots & \frac{\delta^2 I}{\delta\beta_n^2}|_{\hat\beta} \end{bmatrix}$$ — матриця других похідних від I по β в точці $\hat\beta=\beta$.

У реальній ситуації для формування (3.3) необхідно попередньо оцінити β методом, що не вимагає формування $C(\delta\beta)$, а потім

шляхом імітаційного моделювання основного завдання (задачі оптимізації *I*) знайти необхідні компоненти квадратичної форми (3.3). У класі традиційних систем ідентифікації застосовують функції втрат такого вигляду:

$$C(\delta\beta) = C_0 - \delta(\hat{\beta} - \beta); \tag{3.4}$$

$$C(\delta\beta) = \left\| \hat{\beta} - \beta \right\|^2; \tag{3.5}$$

$$C(\delta\beta) = \left| \hat{\beta} - \beta \right|; \tag{3.6}$$

$$C(\delta\beta) = \begin{cases} 0, \left| \hat{\beta} - \beta \right| < \Delta; \\ 1, \left| \hat{\beta} - \beta \right| \geq \Delta, \end{cases} \tag{3.7}$$

де в правій частині (3.4) δ означає дельта-функцію Дірака; в (3.7) Δ — допустима похибка оцінки β.

Умовний ризик $r(\beta)$ визначено як середнє значення функції втрат для всіх можливих вибірок:

$$r(\beta) = \int C(\delta\beta)\, p(Y/\beta)\, dY, \tag{3.8}$$

де $\int p(Y/\beta)\, dY = 1$.

Середній ризик $R = J(p(\beta/Y))$ в (3.8) визначається як середнє значення умовного ризику для всіх можливих значень β:

$$J = R = \int r(\beta)\, p(\beta)\, d\beta = \iint C(\delta\beta)\, p(Y/\beta)\, p(\beta)\, dY d\beta, \tag{3.9}$$

або, враховуючи (3.8) замінюючи $p(Y/\beta)\, p(\beta)$ на $p(\beta/Y)\, p(Y)$, отримуємо

$$R = \iint C(\delta\beta)\, p(\beta/Y)\, p(Y)\, dY d\beta = \int p(Y)\, dY \int C(\beta/Y)\, d\beta. \tag{3.10}$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. В просторі яких змінних визначено формулу Байєса (3.1)?
2. Які види функції витрат і як вони змінюють вид умовного ризику (3.8)?
3. Як пов'язаний середній ризик з умовним?

3.2. Методи оцінювання вектора β лінійних моделей

Оцінка $\hat{\beta}$ буде оцінкою мінімального ризику, якщо мінімізує рівняння (3.10).

За наявності конкретної вибірки $Y = \left(y(1), ...y(M)\right)$ вектор Y слід розглядати як постійний детермінований. Тоді

$$\int p(Y)dY = C > 0$$

і в рівнянні (3.10) для визначення β досить мінімізувати лише внутрішній інтеграл за формулою β:

$$\hat{\beta} = \arg\min_{\beta \in G} \int C(\delta\beta)\, p(\beta / Y) d\beta, \qquad (3.11)$$

де $p(\beta/Y)$ визначено по (3.1).

На практиці безпосередньо визначити щільність $p(\beta/Y)$ досить важко. Однак слід відзначити практично важливу властивість формули (3.1), яка проявляється при мінімізації (3.9): неточність завдання $p(\beta)$ у (3.1) не робить істотного впливу на значення мінімального ризику (3.10). Крім того $p(\beta)$ у (3.1) є регуляризуючим множником, оскільки відомо [11], що відносна точність оцінки щільності $p(Y/\beta)$ і $p(Y)$ істотно зменшується зі зменшенням значення p, тобто «хвости» функції $p(Y/\beta)$ і $p(Y)$ визначені неточно, а точність визначення $p(\beta/Y)$ залежить від $p(\beta)$ у (3.3). Так, якщо припустити рівномірність розподілу β в області C з центром β_0:

$$p(\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{|G|}, \beta \in G, \\ 0, \beta \in G, \end{cases}$$

то, що меншою буде область G, то менша частина неточних значень $p(\beta/Y)$ пропадає в (3.1) і, отже, тим меншими будуть дисперсії розподілу $p(\beta/Y)$ та оцінки β за формулою (3.11). При стягуванні області G до $\beta = \beta_0$ оцінка β також прагне до $\beta = \beta_0$. Якщо β_0 задана неточно, то для кінцевої вибірки даних апостеріорна щільність (3.1) і оцінка (3.11) будуть зміщені. Розширення G приводить до збільшення дисперсії і зменшення зсуву до неточної оцінки β_0 (3.11). Відзначимо, що (теоретично) оцінка (3.11) збігається з оцінкою, що відповідає *моді* $p(\beta/Y)$ для функції втрат (3.4), *медіані* — для (3.6), *математичному сподіванню* — для (3.5).

Якщо $C(\delta\beta)$ не задано і $p(\beta)$ невідома, то можна шукати оцінку β^*, відповідну максимуму $p(\beta/Y)$ для конкретної реалізації $Y = (y(1), .., y(M))^{\mathrm{T}}$. У цьому випадку $p(\beta/Y)$-функція правдоподібності L (Y, β). Умова максимуму L або (в силу монотонності логарифма) $\ln L$ являє собою відоме рівняння правдоподібності

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\beta}} L\left(Y,\hat{\beta}\right) = 0$$

або

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\beta}} \ln L\left(Y,\hat{\beta}\right) = 0, \qquad (3.12)$$

де $\hat{\beta}$ — оцінка максимальної правдоподібності (МП).

Відсутність регулюючого множника $p(\beta)$ в (3.12) погіршує стійкість оцінок (3.12) до аномальних даних.

Нарешті за повної невизначеності ймовірнісних характеристик застосовують метод найменших квадратів (МНК), у рамках якого оцінка β визначається з урахуванням (3.2) з умови

$$\hat{\beta} = \arg\min \varepsilon^{\mathrm{T}} \cdot \varepsilon$$

еквівалентної умові (3.12) у припущенні, що $\varepsilon(k)$ становить гауссівський білий шум з рівномірною інтенсивністю для будь-якого $k \in (1, M)$. Метод найменших квадратів є окремим випадком методу МП і має ті ж недоліки, тобто оцінки МНК чутливі до рідкісних великих викидів у даних експерименту. Перевагами їх є

простота та відсутність необхідності знання ймовірнісних характеристик і функцій втрат. Рекурентна форма МНК збігається [4] з байєсівським методом у випадку нормальності розподілів:

$$p(\beta) = C_1 \exp\left[-0,5(\beta-\beta_0)^{\mathrm{T}} P_0^{-1}(\beta-\beta_0)\right], \qquad (3.13)$$

$$p(Y\beta) = C_2 \exp\left[-0,5(Y-X\beta)^{\mathrm{T}} Q^{-1}(Y-X\beta)\right], \qquad (3.14)$$

де C_1 та C_2 — нормуючі множники, які обираються за умови

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\beta)\,d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} p(Y/\beta)\,dY = 1,$$

де β_0 — апріорне значення вектора β; P_0^{-1} матриця, зворотна коваріаційної матриці апріорних оцінок $\beta_0 = M\{\beta\}$; $P_0 = M(\beta-\beta_0)(\beta-\beta_0)^{\mathrm{T}}$; M — оператор математичного сподівання.

$$Q^{-1} = M\{\varepsilon\varepsilon^{\mathrm{T}}\} = \begin{bmatrix} M\{\varepsilon(1)\varepsilon(1)\} & \dots & M\{\varepsilon(1)\varepsilon(M)\} \\ \dots & \dots & \dots \\ M\{\varepsilon(M)\varepsilon(1)\} & \dots & M\{\varepsilon(M)\varepsilon(M)\} \end{bmatrix} \qquad (3.15)$$

матриця, зворотна коваріаційній матриці нев'язки ε.

Можна показати, що

$$C_1 = (2\pi)^{-n/2} \mid p_0 \mid^{-1/2};\ C_1 = (2\pi)^{-M/2} \mid Q \mid^{-1/2}.$$

Щільність розподілу $P(Y)$, враховуючи лінійність (3.2), теж буде нормальною з математичним сподіванням $X\beta_0$ *і дисперсійною матрицею*

$$P = XP_0X^{\mathrm{T}} + Q;$$

$$P(Y) = C_3 \exp\left[-0,5(Y-X\beta_0)^{\mathrm{T}} P^{-1}(Y-X\beta_0)\right],$$

де

$$C_3 = (2\pi)^{-\frac{M}{2}} \mid P \mid^{-\frac{1}{2}} = (2\pi)^{-\frac{M}{2}} \mid XP_0X^{\mathrm{T}} + Q \mid^{-\frac{1}{2}}.$$

Підставивши (3.13)–(3.15) в формулу (3.1), отримаємо апостеріорну щільність імовірності:

$$p(\beta / X) = C \exp\left\{-0,5\left[\begin{array}{l}(\beta-\beta_0)^{\mathrm{T}} P_0^{-1}(\beta-\beta_0)+(Y-X\beta)^{\mathrm{T}} Q^{-1}\times \\ \times(Y-Y\beta)-(Y-X\beta_0)^{\mathrm{T}} P^{-1}(Y-Y\beta_0)\end{array}\right]\right\}.$$

Після низки перетворень остаточно отримаємо, що

$$p\left(\frac{\beta}{X}\right) = C \exp\left\{-0,5\left[\left(\beta-\hat{\beta}\right)^{\mathrm{T}} P^{-1}\left(\beta-\hat{\beta}\right)\right]\right\}, \qquad (3.16)$$

де C — нормуюча константа,

$$\hat{\beta} = \beta_0 + PX^{\mathrm{T}}Q^{-1}(Y - X\beta_0),$$

$$P = (P_0^{-1} + X^{\mathrm{T}}Q^{-1}X)^{-1}. \qquad (3.17)$$

Для симетричних функцій втрат мінімум середнього ризику досягається за умови $\beta = \hat{\beta}$ в (3.16), тобто оцінка (3.17) є байєсівською. З іншого боку, якщо вважати β_0 і P_0 оцінками, $P(M)$, отриманими на M-у кроці, а $\hat{\beta}$ і P — в результаті додавання $(M + 1)$-го виміру ($Y(M + 1)$, $X(M + 1)$), то (3.17) визначать рекурентний алгоритм байєсівського оцінювання вектора $\hat{\beta}$ і його коваріації P. Оскільки $P_0 = P_0^{\mathrm{T}}$ і $Q = Q^{\mathrm{T}}$ (матриці P_0 та Q симетричні), то у виразі (3.17) можна P перетворити:

$$\left(P_0^{-1} + X^{\mathrm{T}}Q^{-1}X\right)^{-1} = P_0 - P_0X^{\mathrm{T}}\left[Q + XP_0X^{\mathrm{T}}\right]XP_0. \qquad (3.18)$$

Справедливість (3.18) можна довести, помноживши праві частини рівності на $\left[P_0^{-1} + X^{\mathrm{T}}Q^{-1}X\right]$:

$$E = E - X^{\mathrm{T}}\left[Q + XP_0X^{\mathrm{T}}\right]^{-1}XP_0 + X^{\mathrm{T}}Q^{-1}XP_0 -$$
$$-X^{\mathrm{T}}Q^{-1}XP_0X^{\mathrm{T}}\left[Q + XP_0X^{\mathrm{T}}\right]XP_0,$$

де E — одинична матриця.

Спростимо і помножимо праву частину рівності на:

$$0 = -X^{\mathrm{T}}\left[Q + X^{\mathrm{T}}P_0X\right]^{-1}X + X^{\mathrm{T}}Q^{-1}X -$$

$$-X^{\mathrm{T}}Q^{-1}XP_0X^{\mathrm{T}}\left[Q + XP_0X^{\mathrm{T}}\right]^{-1}X;$$

Помноживши ліву частину рівності на X, правую — на X^{T} і позначивши $XX^{\mathrm{T}} = A$, отримаємо

$$0 = -A\left[Q + X^{\mathrm{T}}P_0X\right]^{-1}A + AQ^{-1}A - AQ^{-1}XP_0X^{\mathrm{T}} \times$$

$$\times\left[Q + XP_0X^{\mathrm{T}}\right]^{(-1)}A.$$

Вважаючи існування A^{-1}, скоротивши A, помноживши ліву і праву частини рівності на A^{-1}, отримаємо

$$0 = -\left[Q + XP_0X^{\mathrm{T}}\right]^{-1} + Q^{-1} - Q^{-1}XP_0X^{\mathrm{T}}\left[Q + XP_0X^{\mathrm{T}}\right]^{-1}.$$

Помноживши праву частину рівності на $\left[Q + X^{\mathrm{T}}P_0X\right]$, визначимо

$$0 = -E + Q^{-1}\left[Q + XP_0X^{\mathrm{T}}\right] - Q^{-1}XP_0X^{\mathrm{T}};$$

$$0 = Q^{-1}X^{\mathrm{T}}P_0X - Q^{-1}X^{\mathrm{T}}P_0X = 0,$$

що підтверджує справедливість (3.18).

При рекурентному переході від M-й до (M + 1)-ї точки вибірки, якщо покласти

$$Q = \sigma_k^2 E,$$

то це відповідає нестаціонарному, а для σ_k^2 – const — стаціонарному гауссівському білому шуму $\varepsilon(k)$ в (3.2). Тоді у виразах (3.17), (3.18) частина векторних або матричних елементів заміниться скалярами:

$$Y = y(M+1), X(M+1) = x^{\mathrm{T}}(M+1) = \left(x_1(M+1), \ldots, x_n(M+1)\right);$$

$$Q^{-1}(M+1) = \frac{1}{\sigma_{M+1}^2}.$$

Відповідно замість (3.17) і (3.18) знайдемо вирази для рекурентного зваженого методу найменших квадратів:

$$\begin{cases} \beta(M+1) = \beta(M) + P(M+1)x(M)\dfrac{1}{\sigma_M^2}\left(y(M) - x^{\mathrm{T}}(M)\beta(M)\right); \\ P(M+1) = P(M) - P(M)x(M)\times \\ \times\left[x^{\mathrm{T}}(M)P(M)x(M) + \sigma_M^2\right]^{-1} x^{\mathrm{T}}(M)P(M). \end{cases} \tag{3.19}$$

Якщо в (3.19) покласти $\sigma_M^2 = 1$, то

$$\begin{cases} \beta(M+1) = \beta(M) + P(M+1)x(M)\left(y(M) - x^{\mathrm{T}}(M)\beta(M)\right); \\ P(M+1) = P(M) - P(M)x(M)\times \\ \times\left[x^{\mathrm{T}}(M)x(M) + E\right]^{-1} x^{\mathrm{T}}(M)P(M), \end{cases}$$

що відповідає звичайному рекурентному МНК.

Якщо $P(0)$ та $\beta(0)$ невідомі, то вважають, що

$$\beta(0) = 0,\ p(0) = \sigma_{\beta(0)}{}^2 E, \sigma_{\beta(0)}{}^2 \to \infty. \tag{3.20}$$

Якщо в (3.17) припустити невідомими β_0 і P_0, і задати їх згідно з формулою (3.20), то отримаємо *оцінку максимальної правдоподібності*, яка збігається для нормальних розподілів $P(\beta), P(y/\beta)$ з *марковською оцінкою мінімальної дисперсії*:

$$\hat{\beta} = (X^{\mathrm{T}}Q^{-1}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}Q^{-1}Y;\ P = (X^{\mathrm{T}}Q^{-1}X)^{-1}.$$

Якщо в (3.17) прийняти $\beta_0 = 0$ і $P_0 = E\alpha, Q = E$, де E — одинична діагональна матриця, то знайдемо оцінку β як нормальне регуляризоване за Тихоновим розв'язання системи (3.2).

$$\hat{\beta} = (\alpha E + X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}Y, \tag{3.21}$$

де α — регуляризуючий параметр.

Для $\alpha = 0$ із (3.21) виходить оцінка звичайного МНК:

$$\hat{\beta} = (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}Y. \tag{3.22}$$

Оцінювання β ускладнюється, якщо матриця X у формулі (3.2) становить собою адитивну суміш точних значень $x_i^*(k)$ і перешкоди $N_i(k)$, тобто замість теоретичної моделі (4.2) маємо емпіричну модель (4.3), де не лише Y, а й X вимірюються з похибками $N_y = \varepsilon, N_x$:

$$x^* + N = \begin{bmatrix} x_1^*(1) + N_1(1) \ldots x_n^*(1) + N_n(1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^*(M) + N_1(M) \ldots x_n^*(M) + N_n(M) \end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

$$y = \begin{bmatrix} y(1) \\ . \\ y(M) \end{bmatrix}; \ \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \ldots \\ \varepsilon(M) \end{bmatrix}; \ \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ . \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

На практиці така задача зустрічається частіше, ніж (3.2).

Для визначення можливості застосування МНК (3.22) до розв'язання задачі оцінювання β в моделі порівняємо зміщення та дисперсії оцінок (3.22), отриманих похибок для моделей (3.2) і (3.23). Для моделей (3.2), вважаючи, що:

$$M\{\varepsilon\} = 0, M\{\varepsilon^{\mathrm{T}} Y\} = 0, M\{\varepsilon^{\mathrm{T}} X\} = 0, \tag{3.24}$$

з формули (3.22) знаходимо

$$\begin{gathered} M\{\hat{\beta}\} = M\{(X^{\mathrm{T}} X)^{-1} X^{\mathrm{T}} Y\} = \\ = (X^{\mathrm{T}} X)^{-1} X^{\mathrm{T}} M(Y) = \\ = (X^{\mathrm{T}} X)^{-1} X^{\mathrm{T}} Y^* = CY^*, \\ C = (X^{\mathrm{T}} X)^{-1} X^{\mathrm{T}}. \end{gathered} \tag{3.25}$$

Тобто оцінка β в моделі (3.2) незміщена, а коваріація

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left[\hat{\beta}\right] &= M\left\{\left(\hat{\beta}-\beta\right)\left(\hat{\beta}-\beta\right)^{\mathrm{T}}\right\} = M\left\{(CY-\beta)(CY-\beta)^{\mathrm{T}}\right\} = \\ &= M\left\{(CY^{*}+C\varepsilon-\beta)\left(CY^{*}+C\varepsilon-\beta\right)^{\mathrm{T}}\right\} = \\ &= M\left\{C\varepsilon(C\varepsilon)^{\mathrm{T}}\right\} = CM\left\{\varepsilon\varepsilon^{\mathrm{T}}\right\}C^{\mathrm{T}} = \\ &= CQC^{\mathrm{T}} = (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}QX(XX^{\mathrm{T}})^{-1},\end{aligned} \tag{3.26}$$

де Q — коваріаційна матриця перешкод ε.

Зокрема, якщо $Q=\sigma^2E$ матриця коваріації гауссівського білого шуму, то

$$\operatorname{cov}\left[\hat{\beta}\right] = \left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}}\sigma^2EX\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1} = \sigma^2\left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}.$$

Для моделі (3.23), вважаючи ε і N некорельованими, з урахуванням (3.24),отримаємо

$$\begin{aligned}M\left\{\hat{\beta}\right\} &= M\left\{CY\right\} = M\left\{(C^{*}+\delta C(N))(Y^{*}+\varepsilon)\right\} = \\ &= M\left\{\left(C^{*}+\delta C(N)\right)Y^{*}\right\} = \beta + M\left\{(\delta C(N))Y^{*}\right\},\end{aligned} \tag{3.27}$$

де $M\left\{(\delta C(N))Y^{*}\right\}$ — математичне сподівання зміщення $\delta\beta$.

Розділити C на точну компоненту C^{*} і варіацію $\delta\ C$, викликану перешкодами N в X, судячи з виразу

$$C^{*} = \left[(X^{*}+N)^{\mathrm{T}}(X^{*}+N)\right]^{-1}(X^{*}+N)^{\mathrm{T}} = C^{*}+\delta C(N),$$

непросто.

Вважаючи, некорельованими X^{*} і Y^{*} з N, з урахуванням (3.27) знайдемо

$$\begin{aligned}M\left\{\hat{\beta}\right\} &= M\left\{CY^{*}\right\} = M\left\{C\right\}Y^{*} = \\ &= \left[(X^{*})^{\mathrm{T}}X^{*}+M\left\{N^{\mathrm{T}}N\right\}\right]^{-1}(X^{*})^{\mathrm{T}}Y^{*}.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Якщо перешкоди N_i у x_i для простоти вважати взаємо- і автонекорельованими і гауссівськими білими шумами рівномірної

по k інтенсивності σ_i^2, то матриця $M\left[N^{\mathrm{T}}N\right]$ в (3.28) буде діагональною:

$$M\left[N^{\mathrm{T}}N\right] = Mdiag\sigma_i^2 E.$$

Тоді

$$M\left(\hat{\beta}\right) = \left[\left(X^*\right)^{\mathrm{T}} X^* + diag\ \sigma_i^2 ME\right]^{-1} \left(X\right)^{\mathrm{T}} Y^*.$$

Звідси видно, що оцінки $\hat{\beta}_i$ компоненти β_i вектора β будуть занижені за абсолютним значенням на величину $\delta\hat{\beta}_i$, залежно від обумовленості матриці $\left(X^*\right)^{\mathrm{T}} X^*$ і від відношення $\left(x_i^*\right)^{\mathrm{T}} x_i^*$ до $\sigma_i^2 M$. Що більше це відношення, то менше абсолютне значення зміщення $\delta\hat{\beta}_i$-го параметра β_i і навпаки. Відносне зміщення $\delta\hat{\beta}_i / \beta_i$, залежить від абсолютного значення β_i. Позначивши в формулі (3.28)

$$\left(X^*\right)T\left(\hat{X}^*\right)^{\mathrm{T}} X^* X^* = A;\ M\left\{N^{\mathrm{T}}N\right\} = \delta A;\ \left(X^*\right)^{\mathrm{T}} Y^* = B,$$

маємо змогу показати, що

$$-\delta\beta = \left(A^* + \delta A\right)^{-1} \delta AB. \qquad (3.29)$$

Дійсно, прирівнюючи ліві частини виразу

$$\left[A^* + \sigma A\right]\hat{\beta} = B^*,\ A^*\beta = B^*,$$

отримаємо

$$\delta A\hat{\beta} = -A^*\left(\hat{\beta} - \beta\right) = -A^*\delta\beta \text{ або } \delta A\left(\sigma\beta + \beta\right) = -A^*\sigma\beta,$$

звідки випливає вираз (3.29). Взагалі:

$$\delta\beta \to 0,\ \widehat{\beta} \to \beta, \text{ якщо } \left\|\delta A\right\| \to 0;$$

$$\delta\beta \to \beta,\ \widehat{\beta} \to 0, \text{ якщо } \left\|\delta A\right\| \to \infty.$$

Коваріація оцінок (3.22) для моделі (3.23) відповідно (3.26) та (3.28) буде:

$$\operatorname{cov}\left[\hat{\beta}\right] = M\left\{\left(\hat{\beta} - M\left\{\beta\right\}\right)\left(\hat{\beta} - M\left\{\hat{\beta}\right\}\right)^{\mathrm{T}}\right\}. \qquad (3.30)$$

Щоб проаналізувати величину $\operatorname{cov}\left[\hat{\beta}\right]$, подамо $\hat{\beta}$ для (3.30) в такому вигляді:

$$\hat{\beta} = (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}Y =$$

$$= \left[X^{*\mathrm{T}}X^{*} + M\left\{N^{\mathrm{T}}N\right\} + \varepsilon\left(X^{*}, N\right)\right]^{-1}(X^{*} + N)^{\mathrm{T}}\left(Y^{*} + \varepsilon\right), \quad (3.31)$$

де $\varepsilon\left(X^{*}, N\right)$ — випадкова складова.

Очевидно, що зі збільшенням довжини вибірок детерміновані складові виразу (3.31) зростають, оскільки їх елементи складають суми за дискетами часу *k* відповідних виразів:

$$\sum_{k=1}^{M} x_i^{*}(k)\, x_i^{*}(k)\left(i, j = \overline{1,n}; k = \overline{1,M}\right), \quad \sum_{k=1}^{M} N_i(k)\, N_i(k).$$

Випадкова складова $\varepsilon\left(X^{*}, N\right)$, елементи якої є відхиленнями елементів

$$\sum_{k=1}^{M} x_i(k)\, x_j(k), \sum_{k=1}^{M} N_i(k)\, N_j(k)$$

від їх математичних сподівань, зі зростанням довжини вибірки зменшується внаслідок усереднювання за дискетами *k*. Тоді, для великих вибірок коваріація (3.30) наближено дорівнюватиме:

$$\operatorname{cov}\left[\hat{\beta}\right] \approx M\left\{\begin{bmatrix}\left(\left(X^{*}\right)^{\mathrm{T}}X^{*} + M\left\{N^{\mathrm{T}}N\right\}\right)^{-1}\left(X^{*} + N\right)^{\mathrm{T}}\left(Y^{*} + \varepsilon\right) - \\ -\left(\left(X^{*}\right)^{\mathrm{T}}X^{*} + M\left\{N^{\mathrm{T}}N\right\}\right)^{-1}\left(X^{*}\right)^{\mathrm{T}}Y^{*}[\cdot]T\end{bmatrix}\right\} =$$

$$= M\left\{\left[\left(\left(X^{*}\right)^{\mathrm{T}}X^{*} + M\left\{N^{\mathrm{T}}N\right\}\right)^{-1}\left(\left(X^{*}\right)^{\mathrm{T}}\varepsilon + N^{\mathrm{T}}Y^{*} + N^{\mathrm{T}}\varepsilon\right)\right][\cdot]^{\mathrm{T}}\right\},$$

де $[\cdot]$ — позначено попередній вираз у квадратних дужках.

Позначимо:

$$\left(X^{*\mathrm{T}}X + M\left\{N^{\mathrm{T}}N\right\}\right)^{-1} X^{*\mathrm{T}} = C_1;$$
$$\left(X^{*\mathrm{T}}X + M\left\{N^{\mathrm{T}}N\right\}\right)^{-1} X^{*\mathrm{T}} = C_2. \qquad (3.32)$$

Спираючись на взаємну некорельованість X^*, εN, Y та малість компонентів $N^{\mathrm{T}}\varepsilon$ порівняно з $\left(X^*\right)^{\mathrm{T}}\varepsilon$ або $N^{\mathrm{T}}Y$, наближено отримаємо:

$$\operatorname{cov}\left[\hat{\beta}\right] \cong M\left\{\left(C_1\varepsilon + C_2N\right)\left(C_1\varepsilon + C_2N\right)^{\mathrm{T}}\right\} =$$

$$= C_1M\left\{\varepsilon\varepsilon^{\mathrm{T}}\right\}C_1^{\mathrm{T}} + C_2M\left\{NN^{\mathrm{T}}\right\}C_2^{\mathrm{T}} = C_1QC_1^{\mathrm{T}} + C_2FC_2^{\mathrm{T}}. \quad (3.33)$$

Неточність N в X з одного боку покращує обумовленість і приводить до зменшення величини зворотної матриці в (3.32) порівняно з C, обчисленому в (3.25), що зменшує коваріацію $\hat{\beta}$ (3.26),] з іншого боку — збільшує $\operatorname{cov}\left[\hat{\beta}\right]$ за рахунок додаткового члена $C_2FC_2^{\mathrm{T}}$ в (3.33). Таким чином, для $N = 0$ коваріація (3.33) збігається з (3.26). Для σ_N з урахуванням (3.32),

$$\operatorname{cov}\left[\hat{\beta}\right] = \left[M\left\{N^{\mathrm{T}}N\right\}\right]^{-1}\left(Y^*\right)^{\mathrm{T}} M\left\{N^{\mathrm{T}}N\right\}Y^*\left[M\left\{N^{\mathrm{T}}N\right\}\right]^{-1}.$$

Для випадку, якщо $M\left\{N^{\mathrm{T}}N\right\} = \sigma_N^2ME$, якщо $\sigma_N^2 \to \infty$, отримаємо $\lim\limits_{\sigma_N^2 \to x} \operatorname{cov}\left[\hat{\beta}\right] = 0$.

Таким чином, завади N в X мають регулювальні властивості: подібно до алгоритмів за Тихоновим (3.21) вони призводять до зміщення оцінок $\hat{\beta}$, але зменшують їх дисперсію.

З розглянутого випливає, що безпосереднє використання баєсівського підходу складне. Практично діє рекурентний зважений МНК для нормального розподілу $P(Y/\beta), P(\beta), P(Y)$. Інший шлях (особливо, якщо $X = X^* + N$) полягає в попередній фільтрації змінних $y(k)$ та $x(k)$ знаходження оцінок $\hat{y}(k)$ та $\hat{x}(k)$ та використання МНК до цих оцінок для визначення $\hat{\beta}$ або

(за наявності апріорної інформації про $\hat{\beta}(0)$ рекурентного МНК (3.19) з точними значеннями β(0) і $P(0)$: що точніше задані $P(0)$ і β(0), то краще обумовлена матриця $P(M+1)$ і точніше розв'язок β(M + 1). Через низьку стійкість МНК та інших статистичних методів з квадратичними функціоналами якості до окремих викидів великої амплітуди у вихідних даних (Y, X) вони потребують аналізу даних і усунення цих викидів, що практично реалізується на стадії первинної обробки даних (Y, X) і на основі мінімаксних методів оцінювання [7].

Статистично оптимальні методи дають хороші оцінки (в статистичному розумінні) для достатньо великих підборів або достатньо точних апріорних даних про закони розподілу. Наприклад, для нормального закону розподілу випадкової величини, оцінка ймовірності появи реалізацій, менших від конкретного значення, на вибірці з M статистично незмінних вимірювань при ймовірності 0,95 і допустимій помилки 20 %, потребує від десятків до десятків тисяч незалежних вимірювань, тобто експериментально оцінити малі ймовірності неможливо.

В умовах обмежених вибірок за відсутністю або обмеженістю апріорних даних отримання квазіоптимальних оцінок β можливе в системах класу БАСІ (див. табл. 1.1), де метод, модель, параметри методу і моделі підбирають, виходячи з показника I, якості розв'язння основної задачі. При цьому більш прості методи, задані з точністю до невідомих оптимізуючих за I констант, за своєю ефективністю, можуть наближатися до статистично оптимальних.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. *В чому полягає регуляризуюча властивість формули Байєса?*
2. *Як для конкретної вибірки даних функції втрат (3.4)÷(3.7) призводять до оцінок параметрів, які відповідають моді $P(\beta / Y)$, медіані чи математичному очікуванню?*
3. *За яких умов формула Байєса вироджується в метод найменших квадратів?*
4. *В чому сутність рекурентного МНК, взваженого МНК, методу максимальної правдоподібності, марковською оцінкою мінімальної дисперсії, регуляризації за Тихоновим?*
5. *До чого призводить неточність у вимірах незалежних змінних регресійних моделей?*

3.3. Загальний алгоритм нелінійного оцінювання параметрів

Розглянемо універсальний алгоритм [8], який об'єднав різні алгоритми МНК, Гаусса–Нютона, Байєса, Маркова, Тихонова з розширеним вектором констант α, які дозволяють оптимізувати задачу ідентифікації лінійних і нелінійних, безперервних за головним показником I і дискретних, стаціонарних і нестаціонарних, одно- і багатовимірних, детермінованих і стохастичних об'єктів, з однієї і декількох вибірок даних (X, Y). Загалом:

$$X = \begin{bmatrix} x_1(1) & \dots & x_n(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1(M) & \dots & x_n(M) \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1(1) & \dots & y_m(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1(m) & \dots & y_m(M) \end{bmatrix},$$

$$x_i(k) = x_i^*(k) + N_i(k),\ i = \overline{1,n}; n \geq m;$$

$$y_j(k) = y_j^*(k) + \varepsilon_j(k),\ j = \overline{1,m}; k = \overline{1,M}; M \geq n,$$

де x_i^*, y_j^* — точні значення; $N_i, \sum_j$ — їх випадкові взаємонекорельовані похибки, тобто для будь-якого зсуву τ, та будь-яких i, ε, $R_{N_i N_e}(\tau) = R_{\varepsilon_i \varepsilon_j}(\tau) = R_{x_i^* N_j} = R_{N_i y_j^*}(\tau) = 0$, якщо $i \neq j$. Модель об'єкта ідентифікації

$$y^* = f(x^*, \beta, t),$$

де

$$f^{\mathrm{T}} = [f_1, \dots, f_m]. \qquad (3.34)$$

Зокрема, якщо $y^* = \dot{x}_1^*$, $x_2^* = u$, $(x_1^*, x_2^*) = x^*$, то модель (3.34) еквівалентна системі нелінійних диференціальних рівнянь

$$x_1^* = f(x_1^*, u, \beta, t),$$

які описують динаміку об'єкта керування, де u — керуючі змінні; якщо $y^* = x_1^*(k+1)$, $x_1^* = u(k)$, то рівняння (3.34) еквівалентно системі нелінійних різницевих рівнянь

$$x_1^*(k+1) = f(x_1^*(k), u(k), \beta, k).$$

Варіюючи розмірностями відповідних векторів, можна отримати системи зі скалярними або векторними змінними.

Узагальнений критерій якості задачі ідентифікації

$$J = \sum_{p=1}^{4} J_p \qquad (3.35)$$

складено з чотирьох компонентів.

Перший компонент критерію (3.35)

$$J_1 = \sum_{p=1}^{m} \varepsilon_j^{\mathrm{T}} Q_j^{-1} \varepsilon_j, \varepsilon_j^* = \varepsilon_j - \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial (\Delta\beta)^{\mathrm{T}}} \Delta\beta,$$

$$\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial (\Delta\beta)^{\mathrm{T}}} = \left(\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial (\Delta\beta_1)}, \ldots, \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial (\Delta\beta_s)} \right), \varepsilon_j = \varepsilon_j \left(\hat{\beta}(q-1) \right), \qquad (3.36)$$

$$\varepsilon_j \left(\hat{\beta}(q-1) \right) = y_j - \hat{y}_j \left(\hat{\beta}(q-1) \right),$$

де $\hat{y}_j \left(j = \overline{1,m} \right)$ — вихід моделі на $(q-1)$-му кроці; q — номер кроку ітерації; $\beta^{\mathrm{T}} = (\beta_1, ..., \beta_s)$ — вектор невідомих параметрів;

$$Q_j = \begin{bmatrix} M\{\tilde{\varepsilon}_j(1)\tilde{\varepsilon}_j(1)\} \ldots & M\{\tilde{\varepsilon}_j(M)\tilde{\varepsilon}_j(1)\} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots & \ldots \\ M\{\tilde{\varepsilon}_j(1)\tilde{\varepsilon}_j(M)\} \ldots & M\{\tilde{\varepsilon}_j(M)\tilde{\varepsilon}_j(M)\} \end{bmatrix}.$$

Попередній вираз — коваріаційна матриця перешкод або груба її оцінка, отримана в припущенні ергодичності випадкового процесу $\tilde{\varepsilon}(k), k = \overline{1,m}$, як матриця оцінок кореляційних функцій $R_{\tilde{\varepsilon}_j \tilde{\varepsilon}_j}(\tau)$:

$$Q_j = \begin{bmatrix} \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j \tilde{\varepsilon}_j}(0) \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j \tilde{\varepsilon}_j}(1) \ldots & \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j \tilde{\varepsilon}_j}(M) \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots & \ldots \\ \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j \tilde{\varepsilon}_j}(M) \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j \tilde{\varepsilon}_j}(M-1) \ldots & \hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j \tilde{\varepsilon}_j}(0) \end{bmatrix},$$

де $\hat{R}_{\tilde{\varepsilon}_j \tilde{\varepsilon}_j}(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{M-\tau} \sum_{k=1}^{M-\tau} \tilde{\varepsilon}_j(k) \tilde{\varepsilon}_j(k+\tau), \tau \le \tau_m; \\ 0, \tau > \tau_m, \end{cases}$ τ_m — зсув, за якого оцінка $\hat{R}(\tau)$ порівнянна з її похибкою.

У найпростішому випадку, якщо $\tau_m = 1$, то матриця Q діагональна.

Другий компонент критерію (3.35)

$$J_2 = \left(\hat{\beta}(q) - \beta_a\right)^{\mathrm{T}} P_a^{-1} \left(\hat{\beta}(q) - \beta_a\right) =$$

$$= \left(\hat{\beta}(q-1) + \Delta\hat{\beta}(q) - \beta_a\right)^{\mathrm{T}} P_a^{-1} \left(\hat{\beta}(q-1) + \Delta\hat{\beta}(q) - \beta_a\right) = \quad (3.37)$$

$$= \left(\Delta\hat{\beta}(q) - \Delta\beta_a(q-1))^{\mathrm{T}} P_a^{-1} (\Delta\hat{\beta}(q) - \Delta\hat{\beta}(q-1)\right),$$

де $\Delta\hat{\beta}(q) = \hat{\beta}(q) - \hat{\beta}(q-1), \Delta\hat{\beta}_a(q-1) = \beta_a - \hat{\beta}(q-1)$; P_a — коваріаційна матриця апріорних значень коефіцієнтів β_a.

За відсутності апріорної інформації про β_a значення $P_a \to \infty$ і $J_2 = 0$; для відомих меж $\beta_{ia\max}, \beta_{ia\min}$ компонентів вектора β_a матриці P_a може здаватися діагональною. При цьому елементи P_{ia} діагоналі P_a, задаються з точністю до параметра α_1:

$$P_{ia} = \alpha_1^2 \left|\beta_{ia\max} - \beta_{ia\min}\right|^2, \alpha_1 \approx 0{,}3 \div 1.$$

Третій компонент критерію (3.35)

$$J_3 = \left(\Delta\hat{\beta}(q) - \Delta\hat{\beta}_{a\text{пос}}(q-1)\right)^{\mathrm{T}} P_{a\text{пос}}^{-1} \left(\Delta\hat{\beta}(q) - \Delta\hat{\beta}_{a\text{пос}}(q-1)\right), \quad (3.38)$$

де $\Delta\hat{\beta}_{a\text{пос}}(q-1) = \hat{\beta}(q-1) - \hat{\beta}_{a\text{пос}}$; $\hat{\beta}_{a\text{пос}}$ — апостеріорна оцінка β, отримана з попереднього обчислення, якщо при обробці конкретної вибірки даних враховуються, результати, отримані з інших вибірок; $P_{a\text{пос}}$ — коваріаційна матриця апостеріорних оцінок чи, в найпростішому випадку, апроксимація її діагональною матрицею з елементами $P_{a\text{пос}} = \hat{\sigma}^2_{\beta_{ia\text{пос}}}$, де $\sigma^2_{\beta_{ia\text{пос}}}$ обчислюють як розкид оцінок $\hat{\beta}_i$, отриманих для різноманітних вибірок даних.

Четвертий компонент критерію (3.35)

$$J_4 = \Delta\hat{\beta}^{\mathrm{T}}(q) \lambda^{-1} \Delta\hat{\beta}(q), \quad (3.39)$$

де λ — зазвичай діагональна матриця регуляризуючих коефіцієнтів α_2.

Якщо $\alpha_a \to \infty$, матриця $\left\|\lambda^{-1}\right\| \to \infty$, $\Delta\hat{\beta}(q) \to \infty$ і, навпаки, якщо $\alpha_2 \to \infty$ матриця $\lambda^{-1} \to \infty$ і компонент J_4 не впливає на значення $\Delta\hat{\beta}(q)$ на q-му кроці релаксійного процесу.

Градієнт функції (3.35)

$$\partial J\left(\hat{\beta}(q-1)\right)/\partial\Delta\hat{\beta} = \sum_{p=1}^{4}\partial J_p/\partial\Delta\hat{\beta}. \tag{3.40}$$

Зокрема,

$$\begin{aligned}\partial J_1/\partial\Delta\hat{\beta} &= -2\sum_{j=1}^{m}\left(\partial e_j/\partial(\Delta\hat{\beta})^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} Q_j^{-1}e_j = \\ &= -2\sum_{j=1}^{m}\left(\partial\varepsilon_j/\partial\Delta\hat{\beta}\right)Q_j^{-1}\varepsilon_j,\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\partial J_2/\partial\Delta\hat{\beta} = 2P_a^{-1}\left(\Delta\hat{\beta}(q) - \Delta\beta_a(q-1)\right); \tag{3.42}$$

$$\partial J_3/\partial\Delta\hat{\beta} = 2P_{a\text{пос}}^{-1}\left(\Delta\hat{\beta}(q) - \Delta\beta_{a\text{пос}}(q-1)\right); \tag{3.43}$$

$$\partial J_4/\partial\Delta\hat{\beta} = 2\lambda^{-1}\left(\Delta\hat{\beta}(q) - 0\right). \tag{3.44}$$

З умови рівності нулю (3.40), враховуючи (3.36), (3.441)–(3.44). отримаємо систему нормальних рівнянь відносно вектора $\Delta\hat{\beta}(q)$ невідомих приростів вектора $\hat{\beta}(q-1)$ на q-му кроці ітерації:

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\varepsilon_j}{\partial\Delta\hat{\beta}}Q_j^{-1}\frac{\partial\varepsilon_j}{\partial\left(\Delta\hat{\beta}\right)^{\mathrm{T}}} + P_a^{-1} + P_{a\text{пос}}^{-1} + \lambda^{-1}\right)\Delta\hat{\beta}(q) \\ &= \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\varepsilon_j}{\partial\Delta\hat{\beta}}Q_j^{-1}\varepsilon_j + P_\alpha^{-1}\Delta\beta_\alpha(q-1) + P_{a\text{пос}}^{-1}\Delta\hat{\beta}_{a\text{пос}}(q-1).\end{aligned} \tag{3.45}$$

Перед тим як розв'язувати систему (3.45), введемо параметр α_3, який покращить збіжність для неквадратичного функціонала (3.35):

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta\hat{\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \left(\Delta\hat{\beta}\right)^{\mathrm{T}}} + P_a^{-1} + P_{a\text{пос}}^{-1} + \alpha_3 \lambda^{-1} \right) \Delta\hat{\beta}(q) =$$

$$= \alpha_3 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta\hat{\beta}} Q_j^{-1} \varepsilon_j + P_\alpha^{-1} \Delta\beta_a (q-1) + P_{a\text{пос}}^{-1} \Delta\hat{\beta}_{a\text{пос}} (q-1).$$

Звідки

$$\Delta\hat{\beta}(q) = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta\hat{\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \left(\Delta\hat{\beta}\right)^{\mathrm{T}}} + P_a^{-1} + P_{a\text{апос}}^{-1} + \alpha_3 \lambda^{-1} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\alpha_3 \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta\hat{\beta}} Q_j^{-1} \varepsilon_j + P_\alpha^{-1} \Delta\beta_\alpha (q-1) + P_{a\text{пос}}^{-1} \Delta\hat{\beta}_{a\text{пос}} (q-1) \right), \tag{3.46}$$

тоді

$$\hat{\beta}(q) = \hat{\beta}(q-1) + \Delta\hat{\beta}(q), \tag{3.47}$$

де $\alpha_3 \in [1, \infty]$.

Алгоритм (3.46), (3.47) узагальнює низку методів:

– для точно заданих $Q_j^{-1}, P_a^{-1}, P_{a\text{пос}}^{-1}, \lambda^{-1} = 0, \alpha_3 = 1$ та гауссівських щільностей розподілу $\tilde{\varepsilon}$, $\hat{\beta}_a, \hat{\beta}_{a\text{пос}}$, він відповідає байєсівському;

– для $P_a^{-1} = P_{a\text{пос}}^{-1} = \lambda^{-1} = 0, \alpha_3 = 1$ і точно заданої Q_j^{-1} — марковському;

– для $Q_j^{-1} = E$, $P_a^{-1} = P_{a\text{пос}}^{-1} = \lambda^{-1} = 0$, $\alpha_3 = 1$ — методу Гаусса–Ньютона;

– для $P_a^{-1} = P_{\text{апос}}^{-1} = 0$ — регулярізації Тихонова; для великих λ^{-1} і α_3 — градієнтному, для середніх — методу Маркварда.

Зміщення оцінки (3.47)

$$M\left\{\delta\hat{\beta}(q)\right\} = \lim_{q \to \infty} \hat{\beta}(q) - \beta$$

залежить від того, чи збігається послідовність (3.47) і чи досягнуто при $\hat{\beta}(q)-\beta$ стаціонарної точки J^*, яка відповідає необхідній умові оптимальності

$$\partial J^* / \partial \Delta\hat{\beta} = 0. \tag{3.48}$$

Вибором параметра α_3 можна гарантувати збіжність за функціоналом $J\left(\hat{\beta}\right)$ до стаціонарної точки $J^*\left(\hat{\beta}\right)$, в якій справедлива умова (3.48). Математичне сподівання для (3.47) як середнє по множині кінцевих реалізацій для нескінченного числа q кроків, з врахуванням (3.41)–(3.44), дорівнює:

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{m} M\left\{\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta\hat{\beta}} Q_j^{-1} e_j\right\} + P_a^{-1}\left(\hat{\beta}(\infty)-\beta_a\right)+ \\ +P_{\text{апос}}^{-1}\left(\hat{\beta}(\infty)-\hat{\beta}_{\text{апос}}\right)=0,\end{gathered} \tag{3.49}$$

де згідно з формулою (3.36),

$$\begin{gathered}M\left\{\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \Delta\hat{\beta}} Q_j^{-1}\varepsilon_j\right\} = M\left\{\left(-\frac{\partial \hat{y}_j\left(\hat{\beta}(\infty)\right)}{\partial \Delta\hat{\beta}}\right) Q_j^{-1}\left(y_j-\hat{y}_j\left(\hat{\beta}(\infty)\right)\right)\right\}= \\ =-M\left\{\frac{\partial \hat{y}_j(\beta(\infty))}{\partial \Delta\hat{\beta}} Q_j^{-1} y_j\right\}+M\left\{\frac{\partial \hat{y}_j(\beta(\infty))}{\partial \Delta\hat{\beta}} Q_j^{-1}\hat{y}_j(\beta(\infty))\right\}.\end{gathered} \tag{3.50}$$

Оскільки

$$\hat{y}_j = \hat{y}_j\left(\beta(\infty, x+N, t)\right),\ y_j = f_j\left(\beta, x^*, t\right)+\tilde{\varepsilon}_j,$$

то для того щоб рівняння (3.50) було близьке до нуля, необхідно в моделі замість $x+N$ мати x^* або його оцінку $\hat{x}^*$, близьку до x^*.

Із рівняння (3.49) очевидна й інша причина зміщення, яка полягає в тому, що для $\beta_a \neq \beta$, $\hat{\beta}_{a\text{пос}} \neq \beta$, $M<\infty$, $P_a^{-1}>0$, $P_{\text{апос}}^{-1}>0$, $\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \delta\beta} Q_j^{-1}\varepsilon_j < \infty$ з'являється додаткове зміщення від неточного завдання β_a і $\hat{\beta}_{a\text{пос}}$.

Коваріація оцінки (3.47) може бути визначена наближено. У точці (3.48) дамо невелику варіацію $\tilde{\varepsilon}$ величини $\hat{y}$, яка приведе до варіації $\partial\hat{\beta}$ оцінки $\hat{\beta}$. Тоді умова (3.48) справедлива для $\hat{\beta}^* + \partial\hat{\beta}$:

$$0 = \frac{\partial J\left(\hat{\beta}^* + \delta\beta, y^* + \tilde{\varepsilon}\right)}{\partial\delta\hat{\beta}} \approx \frac{\partial J\left(\hat{\beta}^*, y^*\right)}{\partial\delta\hat{\beta}} + \\ + \frac{\partial^2 J\left(\hat{\beta}^*, y^*\right)}{\partial\delta\hat{\beta}\partial\left(\delta\hat{\beta}\right)^{\mathrm{T}}}\delta\hat{\beta} + \ldots + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 J\left(\hat{\beta}^*, y^*\right)}{\partial\delta\hat{\beta}\partial\left(\varepsilon_j\right)^{\mathrm{T}}}\tilde{\varepsilon}_j, \tag{3.51}$$

де $\dfrac{\partial J\left(\hat{\beta}^*, y^*\right)}{\partial\delta\hat{\beta}} = 0$, $\dfrac{\partial^2 J\left(\hat{\beta}^*, y^*\right)}{\partial\delta\hat{\beta}\partial\left(\delta\hat{\beta}\right)^{\mathrm{T}}} = \left[\dfrac{\partial^2 J\left(\hat{\beta}^*, y^*\right)}{\partial\delta\hat{\beta}_i\partial\delta\hat{\beta}_j}\right]_{i,j=1}^{n}$;

$$\frac{\partial^2 J\left(\hat{\beta}^*, y^*\right)}{\partial\delta\hat{\beta}\partial\left(\tilde{\varepsilon}_j\right)^{\mathrm{T}}} = \left[\frac{\partial^2 J\left(\hat{\beta}^*, y^*\right)}{\partial\delta\hat{\beta}_i\partial\tilde{\varepsilon}_j(k)}\right]_{\substack{i=\overline{1,n}\\ k=\overline{1,M}}}; \quad \tilde{\varepsilon}_j^{\mathrm{T}} = \left(\tilde{\varepsilon}_j(1),\ldots,\tilde{\varepsilon}_j(M)\right).$$

Із умови (3.51) визначимо

$$\partial\hat{\beta} = -\left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial\delta\hat{\beta}\partial\left(\delta\hat{\beta}\right)^{\mathrm{T}}}\right)^{-1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 J\left(\hat{\beta}^*, y^*\right)}{\partial\delta\hat{\beta}\partial\left(\varepsilon_j\right)^{\mathrm{T}}}\tilde{\varepsilon}_j, \tag{3.52}$$

де згідно з рівняннями (3.35)–(3.46),

$$\frac{\partial^2 J^*}{\partial\delta\hat{\beta}\partial\left(\delta\hat{\beta}\right)^{\mathrm{T}}} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\hat{y}_j}{\partial\delta\hat{\beta}}Q_j^{-1}\frac{\partial\hat{y}_j}{\partial\left(\delta\hat{\beta}\right)^{\mathrm{T}}} + P_a^{-1} + P_{a\text{пос}}^{-1} + \alpha_3\lambda^{-1}; \tag{3.53}$$

$$\frac{\partial^2 J^*}{\partial\delta\hat{\beta}\cdot\partial\left(\tilde{\varepsilon}_j\right)^{\mathrm{T}}} = \frac{\partial\hat{y}_j}{\partial\delta\hat{\beta}}Q_j^{-1}, \quad l=\overline{1,m}. \tag{3.54}$$

Вважаючи, що вираз (3.53), рівняння (3.54) є детермінованими і вважаючи відсутність кореляції між $\tilde{\varepsilon}_j$ і $\tilde{\varepsilon}_i\left(i \neq j; i, j = \overline{1,m}\right)$, одержуємо коваріацію оцінки (3.52):

$$\operatorname{cov}[\delta\hat{\beta}] = M\left\{\delta\hat{\beta}(\delta\hat{\beta})^{\mathrm{T}}\right\} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial \delta\hat{\beta} (\delta\hat{\beta})^{\mathrm{T}}} \right)^{-1} \left[\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial \delta\hat{\beta} \partial (\tilde{e}_j)^{\mathrm{T}}} \right) Q_j^* \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial \delta\hat{\beta} \partial (\tilde{\varepsilon}_j)^{\mathrm{T}}} \right)^{\mathrm{T}} \right] \left(\frac{\partial^2 J^*}{\partial \delta\hat{\beta} \partial (\delta\hat{\beta})^{\mathrm{T}}} \right)^{-1}, \quad (3.55)$$

де Q_j^* — коваріаційна матриця похибки $\tilde{\varepsilon}_j(k)$.

Підставивши вирази (3.53), (3.54) в рівняння (3.55), знайдемо

$$\operatorname{cov}\left[\delta\hat{\beta} \right] = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \hat{\beta}_j}{\partial \delta\hat{\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial (\delta\beta)^{\mathrm{T}}} + P_a^{-1} + P_{a\text{пос}}^{-1} + \alpha_3 \lambda^{-1} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \delta\hat{\beta}} Q_j^{-1} Q_j^* Q_j^{-1} \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial (\delta\hat{\beta})^{\mathrm{T}}} \right) \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \delta\hat{\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial (\delta\hat{\beta})^{\mathrm{T}}} + \right.$$

$$\left. + P_a^{-1} + P_{a\text{пос}}^{-1} + \alpha_3 \lambda^{-1} \right)^{-1}. \quad (3.56)$$

Вираз (3.56) залежність від значень $Q_j^*, Q_j, P_a, P_{a\text{пос}}, a_3, \lambda$ визначає коваріацію байєсівських оцінок $\left(\lambda^{-1} = 0, Q_j = Q_j^*\right)$, марковських $\left(P_a^{-1} = P_{a\text{пос}}^{-1} = \lambda^{-1} = 0,\ Q_j = Q_j^*\right)$, Гаусса–Ньютона $\left(Q_j = 1, P_a^{-1} = P_{a\text{пос}}^{-1} = \lambda^{-1} = 0\right)$, Тихонова $\left(P_a^{-1} = P_{a\text{пос}}^{-1} = 0\right)$, градієнтних $\left(\lambda^{-1} \to \infty, a_3 \to 0\right)$.

Збіжність оцінок узагальненого алгоритму (3.46), (3.47) залежить від апріорних і апостеріорних оцінок β_a і $\hat{\beta}_{a\text{пос}}$, від регулюючого додатку $a_3\lambda^{-1}$, від матриць Q_j і особливо від вигляду функції J_1 (3.36). Для строго випуклої квадратичної за β поверхні J оцінка $\hat{\beta}$ сходиться (якщо $\alpha_3 = 0$) до оптимальної точки за один крок, так як вираз (3.37) точний.

У решті випадків збіжність може бути покращена за рахунок покращення числа обумовленості матриць.

$$\frac{\partial \hat{y}_j}{\partial \delta\hat{\beta}} Q_j^{-1} \frac{\partial \hat{y}_j}{\partial (\delta\hat{\beta})^{\mathrm{T}}} \quad (3.57)$$

і адаптації параметра α_3. Покращення обумовленості досягається плануванням експерименту, який ортогоналізує компоненти $\partial\hat{y}_j / \partial\delta\beta_j$, $i=\overline{1,n}$, або (для достатньо інформативних вибірок) таким спеціальним «зважуванням» даних, яке частково ортогоналізує компоненти $\partial\hat{y}_j / \partial\delta\beta_j$, наприклад, введенням в вираз (3.57) порядково в кожен рядок вагових функцій

$$\eta_{ij}(k) = n\left|\frac{\partial\hat{y}_j(k)}{\partial\delta\beta_i}\right|^{\alpha_4} / \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial\hat{y}_j(k)}{\partial\delta\beta_i}\right|^{\alpha_4}, \eta_{ij}\in[0,1],$$

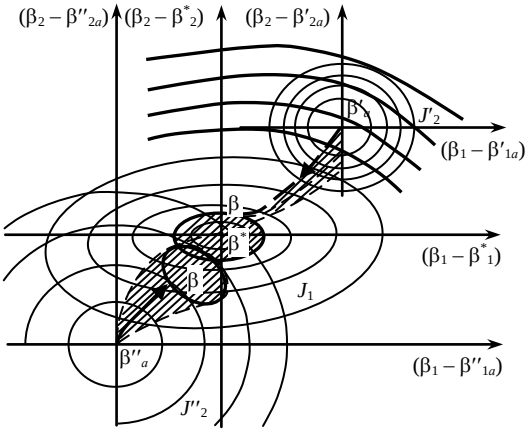
які для $\alpha_4 = 0$ не вносять змін, якщо $\alpha_4 > 0$ виділяють ті точки *k*, в яких амплітуда діагонального елемента *i*-го рядка (при оцінці β_i) більша від амплітуди решти компонентів.

Для великих α_4 різко зростає вага ортогональних векторів, для яких значення $\eta_{ij}(k)$ прямує до одиниці. Це призводить до ортогоналізації (3.57), що збільшує обумовленість і зменшує коваріацію оцінок $\hat{\beta}$. Разом з тим «збіднення» вибірки внаслідок нерівномірного зважування повинно призвести до збільшення коваріації $\hat{\beta}$. Для обмежених вибірок оптимальне α_4^* може бути нульовим, зі збільшенням числа *M* (довжина вибірки) α_4^* зміщується в бік більших значень. Параметр α_3 для неквадратичних унімодальних поверхонь підбирають із умови забезпечення строго релаксаційного процесу $\hat{\beta}(q)$, який задовольняє вимогу сходження по *J*. Задаючи матриці $Q_j, P_a, P_{a\text{пос}}, \lambda$ і параметри $\alpha_i, i=\overline{1,4}$, з універсального методу можна отримати його оптимальну для конкретних умов різновидність.

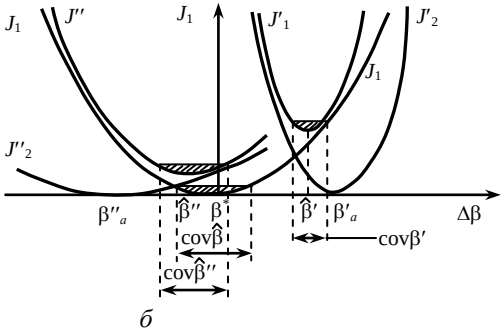
Проілюструємо вплив неортогональності компонента градієнта показника *J* і неточності завдання функції $J(\Delta\beta)$ на якість оцінок β.

Припустимо, що оцінюється двовимірний вектор β в рівнянні $y = \beta^{\mathrm{T}} x$ за двома компонентами J_1 і J_2 квадратичного за $\Delta\beta$ показника (3.35) (рис. 3.1, 3.2). На рис. 3.1 побудовано лінії рівняння J_1 і J_2 для двох різних апріорних значень β_a', β_a'' і ваг P_a^{-1}

(J_2' має більшу вагу, ніж J_2''). Змінні $x_1(k)$ і $x_2(k)$ ортогональні (осі еліпса J_1 збігаються з осями $\left(\beta_i - \beta_i^*\right), i = 1,2$.

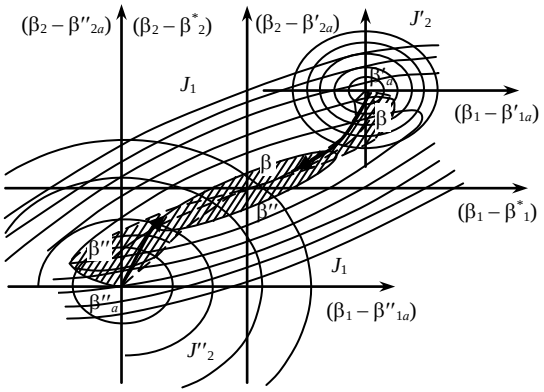


а

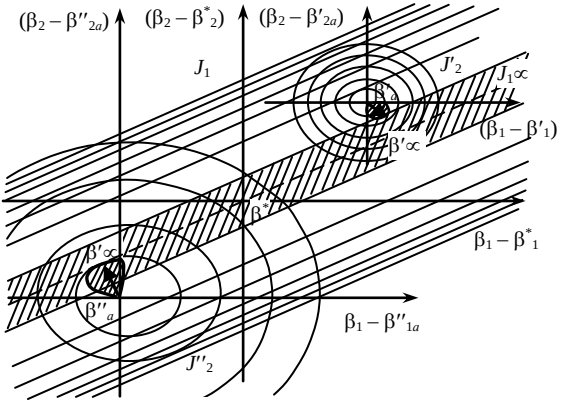


б

Рис. 3.1. Поверхні строговипуклих функціоналів Y_1, Y_2 і траєкторії налаштування $\hat{\beta}(t)$, коли компоненти $\partial Y_1 / \partial \hat{\beta}$ і $\partial Y_2 / \partial \hat{\beta}_2$, ортогональні (*а*) і перетин (*б*) цих функціоналів по траєкторії $\hat{\beta}(t)$



а



б

Рис. 3.2. Поверхні функціоналів J_1, J_2 і траєкторії налаштувань $\hat{\beta}(t)$, коли компоненти $\partial J_1/\partial\hat{\beta}_1$ і $\partial J_1/\partial\hat{\beta}_2$:
а — ортогональні; *б* — лінійно залежні

Оскільки вихідна інформація зашумлена, то функціонали J_1, обчислюють із точністю до величини δJ_1. Лінія рівня δJ_1 визначає область невизначеності (заштрихована область), яка вміщує коваріації оцінок cov[β]. Область невизначеності одного J_1 більша, ніж для $J_1 + J_2$, причому

$$\operatorname{cov}\left[\hat{\beta}''\right] < \operatorname{cov}\left[\hat{\beta}'\right] < \operatorname{cov}\left[\hat{\beta}\right],$$

де $\operatorname{cov}\left[\hat{\beta}\right]$, $\operatorname{cov}\left[\hat{\beta}'\right]$, $\operatorname{cov}\left[\hat{\beta}''\right]$ — коваріації оцінок, отриманих із умов мінімуму J_1, $J_1 + J_2'$, $J_1 + J_2''$ відповідно.

Зміщення оцінок розподілені у зворотному порядку

$$\delta\hat{\beta}'' > \delta\hat{\beta}' > \delta\hat{\beta} = 0.$$

Що більша вага P_a^{-1} регуляризуючого додатка (для неточного β_a), тим більше зміщення. Як видно, для ортогональних $x_1(k)$ і $x_2(k)$ оцінки $\hat{\beta}'$ і $\hat{\beta}''$, одержані за вибіркою довжини *M*, все ж ближчі до істинної β^*.

Пунктиром показано, що якщо $M \to \infty$, то області невизначеності стягуються в точку, а оцінки $\hat{\beta}'_\infty$ і $\hat{\beta}''_\infty$ прямують до істинного β^*.

Для кінцевих *M* оцінки $\hat{\beta}'$ і $\hat{\beta}''$ будуть гіршими, ніж оцінка $\hat{\beta}$, отримана лише за показником J_1, якщо точка β_a не належить області невизначеності. На рис. 3.1, *б* подано перетин показників за траєкторією руху $\beta''_a \to \beta^* \to \beta'_a$. Із рис. 3.2, *а* видно, що збільшення ваги J_2' порівняно з J_2'' приводить до зростання зміщення і зменшення коваріаційних оцінок. Це випадок, коли $x_1(k)$ і $x_2(k)$ не ортогональні, але лінійно незалежні. Еліпс показника J_1 повернутий відносно осей $\beta_i - \beta_i^*$. Довжина головної діагоналі залежить від взаємозв'язку $x_1(k)$ і $x_2(k)$. На відміну від попередніх рисунків, тут для остаточного значення *M* уточнюються тільки компоненти $\hat{\beta}_1$ вектора $\hat{\beta}$, а оцінка $\hat{\beta}_2$ погіршується (її зміщення стає більшим від апріорного). На рис. 3.2, *б* наведено випадок, для якого $x_1(k)$ і $x_2(k)$ лінійно залежні. На відміну від попереднього, тут навіть у асимптотиці (при $M \to \infty$) оцінки $\hat{\beta}'_\infty$ і $\hat{\beta}''_\infty$ не збігаються з β^*. Нарешті, якщо залежність $y(\beta)$ — нелінійна (функція Розенброка), то можлива ситуація (рис. 3.3), за якої обидві

оцінки $\hat{\beta}'_{\infty}$ і $\hat{\beta}''_{\infty}$ через неправильну апріорну інформацію про β_a і невипуклості функціоналу $J(\beta)$ не уточнюватимуться

$$\left(\hat{\beta}-\hat{\beta}_{\infty}\right)\left(\operatorname{cov}\hat{\beta}\right)^{-1}\left(\hat{\beta}-\hat{\beta}_{\infty}\right)\le \delta J. \qquad (3.58)$$

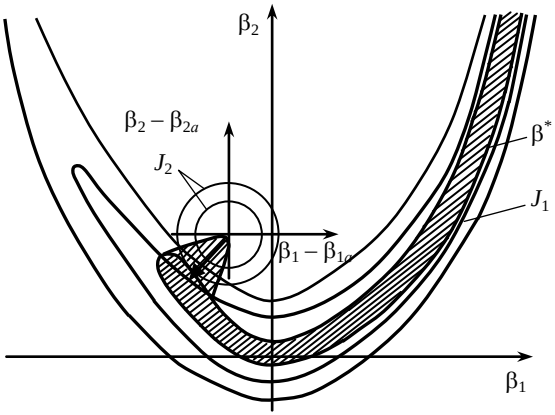


Рис. 3.3. Поверхня невипуклого (J_1 — функція Розенброка) і випуклого (J_2 — функціоналів). Траєкторія налаштування $\hat{\beta}(t)$

У таких випадках доцільно збільшити компонент $a_3\lambda^{-1}$ алгоритму (3.46), (3.47), спростивши його до градієнтного. Правильність задàння апріорних і апостеріорних даних $(\beta_a,\ P_a,\ P_{\text{апос}},\ \beta_{\text{апос}})$ можна перевірити, зіставивши незміщені оцінки, отримані при $P_a^{-1}=P_{\text{апос}}^{-1}=\lambda^{-1}=0$ і їх коваріацію з оцінками для заданих $P_a, P_{\text{апос}}, \lambda, \beta_a, \hat{\beta}_{\text{апос}}$.

Якщо скористатися поняттям довірчих областей і взяти їх подібними областями невизначеності, то в припущенні нормальності розподілу оцінки $\hat{\beta}$ з коваріацією $\operatorname{cov}\hat{\beta}$ і для заданої довірчої ймовірності γ значення δJ визначається як верхній γ-квантиль розподілу X^2. Задавшись γ, а отже, і значенням δJ і переходячи в (3.58) від нерівності до рівності, отримаємо поверхню спільної довірчої області (еліпсоїда). Побудуємо ці поверхні для незміщених оцінок $\hat{\beta}(J_1)$ і $\hat{\beta}(J_1, J_2)$ з врахуванням $P_a, P_{\text{апос}}$. Якщо

область (3.58) значень оцінок $\hat{\beta}(J_1)$ включає в себе область (3.58) для $\hat{\beta}(J_1, J_2)$, то виходять оцінки, які не поступаються оцінкам $\hat{\beta}(J_1)$, інакше апріорна й апостеріорна інформації задані неправильно і з імовірністю γ кращою виявляється оцінка $\hat{\beta}(J_1)$.

Показником оптимальності вектора α параметрів алгоритму може бути об'єм області (3.58), що дорівнює

$$\nu(\delta J) = (\delta J \pi)^{n/2} \det^{1/2}\left(\operatorname{cov}\left[\hat{\beta}\right] / \Gamma(n/2+1)\right),$$

де Г — гамма-функція), або *D*-критерій, який дорівнює $\det\left(\operatorname{cov}\left[\hat{\beta}\right]\right)$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. *Які є компоненти критерію узагальненого алгоритму нелінійного оцінювання?*
2. *Як компоненти критерію узагальненого алгоритму нелінійного оцінювання впливають на якість процесу оцінювання параметрів ММ?*
3. *За яких умов узагальнений метод відповідає:*
   - *байєсовському,*
   - *методу Гаусса-Ньютона,*
   - *регуляризації за Тихоновим,*
   - *методу Маркварда?*

3.4. Оптимізація параметрів алгоритму ідентифікації з умови мінімуму середніх втрат при керуванні динамічним об'єктом (канал крену ракети)

На етапі проектування адаптивних систем керування, наприклад літальних апаратів, за допомогою імітаційного моделювання визначають показник $I(x,u)$ якості керування моделлю Σ, оптимальну стратегію $u^*(t)$ керування і відповідні їй значення $I^*(x^*,u^*)$ і траєкторію $x^*(t)$. Сформуємо функцію втрат (3.3) для байєсівського методу ідентифікації у вигляді варіації δJ^*,

викликаної неточністю $\delta\hat{\beta}$ оцінки вектора β^* параметрів імітаційної моделі Σ:

$$\delta I^* \approx \delta\hat{\beta}^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial^2 I^*}{\partial\hat{\beta}\partial\hat{\beta}^{\mathrm{T}}} \right) \partial\hat{\beta}. \qquad (3.59)$$

Елементи матриці $\partial^2 I^* / \left(\partial\hat{\beta}\partial\hat{\beta}^{\mathrm{T}} \right)$ визначимо аналітично або методами планування експерименту [9] на імітаційній моделі Σ. Умовні втрати при виборі оцінки $\hat{\beta}$ визначимо як математичне сподівання функції втрат $\partial^2 I^*$ за вимірами *x*:

$$\int_x \delta I^* \left(\hat{\beta}, \beta^* \right) p\left(x / \beta^* \right) dx, \qquad (3.60)$$

де $\int_x (\cdot) dx$ — *n*-кратний інтеграл за всіма компонентами x_i вектор-функції *x*; $p\left(x / \beta^* \right)$ — щільність імовірності значень вимірювань *x*, залежна від вектора β^*.

Середні втрати — це математичне сподівання умовних втрат (3.60) за всією областю визначення β^*:

$$R\left(\hat{\beta} \right) = \int_\beta \int_x \delta I^* \left(\hat{\beta}, \beta^* \right) p\left(x / \beta^* \right) p\left(\beta^* \right) dx d\beta^*, \qquad (3.61)$$

де $p\left(\beta^* \right)$ — щільність розподілу параметрів β^*.

Із тотожності Байєса

$$p\left(x / \beta^* \right) p\left(\beta^* \right) = p\left(\beta^* / x \right) p\left(x \right)$$

випливає, що

$$R\left(\hat{\beta} \right) = \int_x p(x) dx \int_{\beta^*} \delta I^* \left(\hat{\beta}, \beta^* \right) p\left(\beta^* / x \right) d\beta^*, \qquad (3.62)$$

де $p\left(x \right) = \int_{\beta^*} p\left(x, \beta^* \right) d\beta^*$.

Оптимальний метод і оцінку $\tilde{\beta}$ можна отримати з умови

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\beta}}\int_{\beta^*}\delta I^*\left(\hat{\beta},\beta^*\right)p\left(\beta^*/x\right)d\beta^*=0,$$

де $p\left(\beta^*/x\right)=p\left(x/\beta^*\right)p\left(\beta^*\right)/\,p(x),$ або, враховуючи (3.59)

$$\int_{\beta}\frac{\partial^2 I}{\partial\hat{\beta}\partial\hat{\beta}^{\mathrm{T}}}\partial\hat{\beta}p\left(\beta^*/x\right)d\beta^*=0.$$

Звідси, оскільки $\delta\hat{\beta}=\hat{\beta}-\beta^*$, отримаємо оптимальну за критерієм мінімуму середнього ризику (3.62) оцінку

$$\hat{\beta}=\left[\int_{\beta^*}\frac{\partial^2 I^*}{\partial\hat{\beta}\partial\hat{\beta}^{\mathrm{T}}}\,p\left(\beta^*/x\right)d\beta^*\right]^{-1}\left[\int_{\beta^*}\frac{\partial^2 I^*}{\partial\hat{\beta}\partial\hat{\beta}^{\mathrm{T}}}\beta^*p\left(\beta^*/x\right)d\beta^*\right].$$

Умовні (3.60) або середні (3.61) втрати з функцією втрат (3.59), яка узгоджує критерії керування та ідентифікації, використовуємо як основний функціонал для оптимізації вектора α параметрів методу ідентифікації Opt_{ak}.

Оптимальний за критерієм $R\left(\hat{\beta}\left(\alpha\right)\right)$ вектора α^* визначаємо з умови

$$a^*=\operatorname{argmin}R\left(\hat{\beta}(\alpha)\right). \tag{3.63}$$

Приклад 3.1. Об'єкт першого порядку (канал крену ракети).

$$dx/dt=\left(\beta_1^*x(t)+\beta_2^*\right)u(t). \tag{3.64}$$

Початкову умову $x\left(0\right)$ розподілено за нормальним законом з параметрами $M\left\{x\left(0\right)\right\}=0, M\left\{x^2\left(0\right)\right\}=P_0, \beta_2^*<0, \beta_2^*>0$.

Показник якості керування задано у вигляді

$$I_{qk}=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(Cx^2\left(t\right)+Du^2(t)\right)dt. \tag{3.65}$$

Підставимо оптимальне керування $u\left(t\right)=kx\left(t\right), k<0$ в рівняння (3.64) і знайдемо екстремаль показника (3.65):

$$x(t) = x(0)e^{\left(\beta_1^* - \beta_2^* k\right)t}. \qquad (3.66)$$

Підставляючи (3.66) в рівність (3.65) і переходячи до середнього за $x(0)$ значенню I_{qk}, отримаємо

$$I_{qk} = 0,5\left(C + Dk^2\right)P_0 \int_0^\infty e^{2\left(\beta_1^* - \beta_2^* k\right)t} dt =$$

$$= \left(C + Dk^2 P_0\right) / 4\left(\beta_1^* - \beta_1^* k\right)^{-1}.$$

Оптимальне значення k^* коефіцієнта k в рівнянні (3.65) визначається із умови

$$\partial I / \partial k = 2Dk^* P_0 \left[4\left(\beta_1^* - \beta_2^* k^*\right)\right]^{-1} +$$

$$+\left(C + Dk^{*2}\right)P_0\beta_2^* / 4\left(\beta_1^* - \beta_2^* k^*\right)^2 = 0,$$

або

$$k^{*2} - \frac{2\beta_1^* k^*}{\beta_2^*} - \frac{C}{D} = 0.$$

Звідси оптимальне, яке задовольняє умову стійкості, значення

$$k^* = \beta_1^* / \beta_2^* - \sqrt{\left(\beta_1^* / \beta_2^*\right)^2 + C / D}.$$

Оскільки $u(t)$ і $x(t)$ в рівнянні (3.64), згідно з припущенням, зв'язані лінійно, то за $x(t)$ можна однозначно оцінити лише один коефіцієнт

$$\gamma = \beta_1^* - \beta_2^* k \ (\gamma < 0). \qquad (3.67)$$

Для оцінки γ скористаємося методом найменших квадратів із адаптивною фільтрацією зміщенням. Показник якості ідентифікації

$$J = \sum_{i=1}^{M}\left(y(i) - \gamma x(i)\right)\times$$
$$\times\left[\left(y(i+\alpha) + y(i-\alpha)\right) - \gamma\left(\left(x(i+\alpha) + x(i-\alpha)\right)\right)\right], \qquad (3.68)$$

де i — позначення дискретних моментів часу $i\Delta t$; $y(i) = \dfrac{dx}{dt} = yx(i)$; α — параметр алгоритму.

З умови мінімуму (3.68) отримаємо оцінку $\hat{y}$ параметра *y*:

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum_{i=\alpha}^{M-\alpha}\left[x(i)\left(y(i-\alpha)+y(i+\alpha)\right)+y(i)\left(x(i+\alpha)+x(i-\alpha)\right)\right]}{\left[2\sum_{i=\alpha}^{M-\alpha}x(i)\left(x(i+\alpha)+x(i-\alpha)\right)\right]}. \quad (3.69)$$

Нехай динамічний об'єкт (3.64) такий, що $y(i)$ вимірюється точно $\left(y(i)=yx^{*}(i)\right)$, а $x(i)$ вимірюється з перешкодою $N(i)$:

$$x(i)=x^{*}(t)+N(i).$$

Така ситуація можлива, наприклад, під час керування рухомими об'єктами, положення яких к просторі вимірюється менш точно, ніж швидкості вимірювання цього положення.

Переходячи в (3.69) до оцінок $\hat{R}(\alpha)$ кореляційних функцій і припускаючи їх симетричними за α, знайдемо оцінку

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{R}_{x^{*}x^{*}}(\alpha)+\hat{R}_{Nx^{*}}(\alpha)}{\hat{R}_{x^{*}x^{*}}(\alpha)+2\hat{R}_{Nx^{*}}(\alpha)+\hat{R}_{NN}(\alpha)}\gamma$$

або

$$\hat{\gamma} = \left[1-\frac{\hat{R}_{N^{*}x^{*}}(\alpha)+\hat{R}_{NN^{*}}(\alpha)}{\hat{R}_{x^{*}x^{*}}(\alpha)+2\hat{R}_{Nx^{*}}(\alpha)+\hat{R}_{NN}(\alpha)}\right]\gamma. \quad (3.70)$$

Зміщення оцінки (3.70)

$$\delta\hat{\gamma} = \hat{R}_{NN}(\alpha)\gamma / \left[\hat{R}_{x^{*}x^{*}}(\alpha)+\hat{R}_{NN}(\alpha)\right]. \quad (3.71)$$

Дисперсію σ_{γ}^{2} оцінки (3.70) отримаємо наближено, припускаючи, що дисперсія оцінок $\hat{R}_{Nx^{*}}(\alpha)$ набагато менша від дисперсії оцінок $\hat{R}_{NN}$, і, нехтуючи членами другого і вищих порядків, знайдемо

$$\sigma_\gamma^2 \approx M\left\{\left(-\frac{\partial\hat{\gamma}}{\partial\Delta\hat{R}_{NN}}\right)\Delta\hat{R}_{NN}\right\}^2 \approx$$
$$\approx\left(\frac{\hat{R}_{x^*x^*}(\alpha)\sigma_{\hat{R}_{NN}}(\alpha)}{(M-2\alpha)\left[R_{x^*x^*}(\alpha)+R_{NN}(\alpha)\right]^2}\right)^2\gamma^2, \tag{3.72}$$

оскільки в припущенні некорельованості перешкод $N(i)$

$$M\left\{\Delta\hat{R}_{NN}\right\}^2=\sigma^2_{R_{NN}}/(M-2\alpha),$$
$$\sigma^2_{R_{NN}}=\left(\sigma^2_{R_{NN}}/M\right)\left[1+2\sum_{i=1}^{M-2\alpha-1}(1-i/M)\right]e^{-i|\alpha|}.$$

Якщо кореляційна функція перешкод експоненціальна

$$R_{NN}(\alpha)=(M-2\alpha)\sigma^2_{R_{NN}}e^{-r|\alpha|}, \tag{3.73}$$

а з урахуванням (3.66) і (3.67) (нагадаємо, $\gamma<0$)

$$R_{xx}(\alpha)=\lim_{M\to\infty}P_0\sum_{i=\alpha}^{M-\alpha}e^{(2i+\alpha)\gamma}=$$
$$=\lim_{M\to\infty}P_0e^{3\alpha\gamma}\frac{e^{(M-2\alpha-1)2\gamma}-1}{e^{2\gamma}-1}=\frac{P_0}{1-e^{2\gamma}}e^{3\alpha\gamma}=\bar{P}_0e^{3\alpha\gamma}, \tag{3.74}$$

де $P_0=P_0\left(1-e^{2\gamma}\right)$, то, підставивши (3.73), (3.74), (3.72) та (3.71) і позначивши $3\alpha\gamma+r|\alpha|=s(\alpha)$, знайдемо

$$\delta\hat{\gamma}=\gamma/\left[1+\bar{P}_0e^{s(\alpha)}/(M-2\alpha)\sigma_N^2\right];$$
$$\sigma_\gamma=\frac{R_{NN}{}^{(\alpha)}}{M^{-2\alpha}}\frac{|\gamma|}{1+(M-2\alpha)e^{-s(\alpha)}\sigma_N^2/\bar{P}_0}. \tag{3.75}$$

Нехай в (3.75) β_2^* відомо і оцінюється лише β_1^*, тоді $\delta\hat{\gamma}=\delta\hat{\beta}_1$, $\sigma_{\hat{\gamma}}=\sigma_{\hat{\beta}_1}$, де $\hat{\beta}_1$ розподілено за нормальним законом:

$$p\left(\hat{\beta}_1\right)=\frac{1}{\sigma_{\hat{\beta}_1}\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\hat{\beta}_1-\left(\beta_1^*+\delta\hat{\beta}_1\right)}{2\sigma_{\hat{\beta}_1}^2}\right]. \qquad (3.76)$$

Через невідповідність $\hat{\beta}_1$ точному значенню β_1^* середні втрати дорівнюють

$$M\left\{I^*\left(\hat{\beta}_1\right)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty} I^*\left(\hat{\beta}_1\right)p\left(\hat{\beta}_1\right)d\left(\hat{\beta}_1\right), \qquad (3.77)$$

де вибір $I^*\left(\hat{\beta}_1\right)$ неоптимальний через неточне подання коефіцієнта *k* в (3.65) за величиною $\hat{\beta}_1$:

$$I^*\left(\hat{\beta}_1\right)=\left(C+Dk^2P_0\right)/4\left(\hat{\beta}_1-\beta_2^*k\right); \qquad (3.78)$$

$$k=\hat{\beta}_1/\beta_2^*-\sqrt{\left(\hat{\beta}_1/\beta_2^*\right)^2+C/D.} \qquad (3.79)$$

Підставивши (3.78), (3.79), (3.70), (3.76) в (3.77) і задавши конкретні значення параметрів, знайдемо залежність $M\left\{I^*\left(\hat{\beta}_1(\alpha)\right)\right\}=M\left\{I^*(\alpha)\right\}$, з якої, відповідно до рівняння (3.63), визначається оптимальне за рівнянням (3.77) значення α^* методу ідентифікації (3.69).

Для $\beta_1^*=0,01, \beta_2^*=0,01, C=D=P_0=\sigma_N=1,\ r=0,4$ на рис. 3.4, *а* наведено залежність (в області екстремуму $I^*(\alpha)$) середніх втрат (3.77) від α для різноманітних *M*, з якої отримано екстремаль $\alpha^*(M)$ (рис. 3.4, *б*).

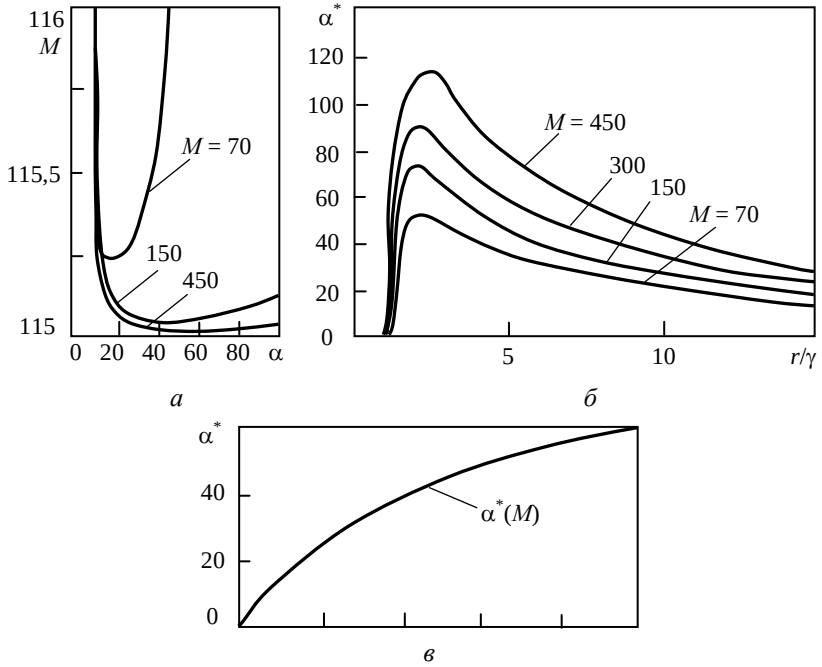


Рис. 3.4. Залежність середніх втрат від числа точок M та параметра зсуву α (*а*), екстремального значення α^* як функції від довжини вибірки (*б*) та сім'ї екстремалей параметра α^* як функцій від довжини вибірки M і співвідношення показників експонент кореляційних функцій сигналу та перешкоди (*в*)

На рис. 3.4, *в* наведено сім'ю екстремалей α^* як функцій відношення r/γ та числа M за тих самих параметрів. При $r=\gamma$ параметр α^* дорівнює нулю, оскільки спектри сигналів $x^*(t)$ та $N(t)$ збігаються, при $r>\gamma$ величина α^* різко збільшується (компенсація зміщення (3.71)) при $r<\gamma$ — спадає, оскільки зміщення (3.71) близько до нуля, а дисперсія $\alpha_{\hat{\gamma}}^2$ зі зростанням α зростає.

Відношення між зміщеннями $\delta\hat{\gamma}$ та дисперсією $\alpha_{\hat{\gamma}}^2$ добре видно з рис. 3.5, де для $C=D=\sigma_N=10,\ r=0,4,\ M=70$ побудовано

щільності розподілення оцінок $\hat{\beta}_1$ (3.67): зі зростанням α зміщення $\hat{\beta}_1$ прямує до нуля, а дисперсія $\sigma^2_{\hat{\beta}_1}$ зростає.

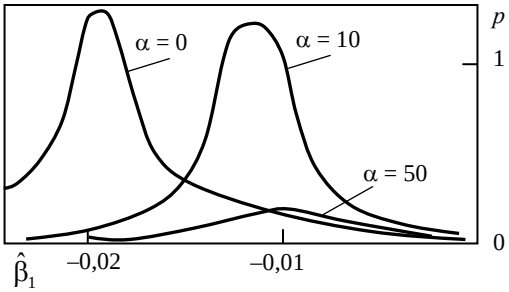


Рис. 3.5. Залежність щільності нормального розподілу оцінки $\hat{\beta}_1$ від параметра зсуву α

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. Розгляньте та поясніть як (на прикладі об'єкта I порядку) вирішується задача ідентифікації за умови оптимальності задачі керування об'єктом?

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Ейкхофф П.* Основы идентификации систем управления / П. Ейкхофф. — М. : Мир, 1975. — 683 с.

2. *Гротт Н.* Оптимальные статистические решения / Н. Гротт. — М. : Мир, 1974. — 600 с.

3. *Поляк Б. Т.* Помехоустойчивая идентификация / Б. Т. Поляк, Я. З. Цыпкин // Идентификация и оценка параметров системы // Труды IV Симпозиума ИФАК — препринты ИПУ. — М. : 1976. — С. 190–213.

4. *Спиди К.* Теория управления / К. Спиди, Р. Браун, Дж. Гудвин. — М. : Мир,1980. — 280 с.

5. *Себер Дж*. Линейный регресионный анализ / Дж. Себер. — М. : Мир, 1980. — 400 с.

6. *Кринецкий Е. И.* Лётные испытания систем управления ракет / Е. И. Кринецкий. — М. : Машиностроение, 1980. — 480 с.

7. *Линич Л*. Идентификация систем / Л. Линич; пер. з англ. / под ред. Я. З. Цыпкина. — М. : Наука, 1991. — 432 с.

8. *Сильвестров А. Н*. Идентификация и оптимизация автоматических систем / А. Н. Сильвестров, П. И. Чинаев. — М. : Энергоатомиздат, 1987. — 200 с.

9. *Круг Г. К*. Планирование эксперимента в идентификации и экстраполяции / Г. К. Круг, Ю. А. Сосулин, В. А. Фатуев. — М. : Наука, 1977. — 207 с.

10. *Шеффе Г*. Дисперсионный анализ / Г. Шеффе. — М. : Наука, 1980. — 590 с.

11. *Бард Й.* Нелинейное оценивание параметров / Й. Бард. — М. : Статистика, 1979. — 580 с.

12. *Зельнер А*. Баесовские методы в эконометрии / А. Зельнер. — М. : Статистика, 1980. — 600 с.

13. *Сейдж Э. П.* Идентификация систем управления / Э. П. Сейдж, Дж. Мелса. — М. : Наука, 1974. — 495 с.

Розділ 4

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ЗА НЕТОЧНИМИ ВХІДНИМИ І ВИХІДНИМИ СИГНАЛАМИ ОБ'ЄКТА

4.1. МНК в ситуації зашумленості вихідних і вхідних сигналів

У розд. 1 було показано, що за відповідних умов точна нелінійна, нестаціонарна модель (1.1) може бути зображена наближено лінійною стаціонарно моделлю (1.2) вигляду $\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$, кожен *i*-й рядок якої

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} U_k(t)$$

можна подати як рівняння регресії (4.3), де $y(t) = \dot{x}_i(t)$, а множина функцій $\{x_j(t), U_k(t)\}$ утворює вектор-функцію $X(t)$ відповідних регресорів $\{a_{ij}, b_{ik}\}$ — вектор β параметрів.

Реально маємо ситуацію (5.23), за якої всі змінні вимірюються з випадковими похибками.

У розд. 5 було показано, що наявність випадкових збурень у вимірах незалежних змінних *X* призводить до зміщення оцінок $\hat{\beta}$ вектора β параметрів моделі $Y = X\beta$, якщо вони визначаються методом найменших квадратів. Ця ситуація не відповідає умові 4 (підрозд. 4.2) Гаусса–Маркова. Лише за наявності апріорної інформації про дисперсії σ_i^2 білих шумів у вимірах $X_i(k)$, ($i = \overline{1,n}$; $k = \overline{1,m}$, $M >> n$), ситуацію можна дещо виправити, якщо від діагональних елементів a_{ii} матриці $X^{\mathrm{T}}X$ відняти присутню в них складову $M\sigma_i^2$. Тоді в асимптотиці ($M \to \infty$) — це математичне сподівання оцінки $\hat{\beta}$ буде незміщеним: $M(\hat{\beta}) = \beta$, бо складова $\mathrm{diag}\ \sigma_i^2 \cdot M$ буде скомплексована складовою — $M\sigma_i^2$.

У випадку, якщо апріорі відомо, що $X_i^*(t_k)$ — гладкі низькочастотні функції, а шуми $N_i(t_k)$ вимірів $X_i(t_k)$ високочастотні, оцінку $\hat{\sigma}_i^2$ дисперсії σ_i^2 шуму в вимірах $X_i(t_k)$ можна отримати шляхом низькочастотної фільтрації сигналів $X_i(t_k)$ — формування моделі шуму $\hat{N}_i(t)$, як різниці $X_i(t_k)$ і $\hat{X}_i(t_k)$, де $\hat{X}_i(t_k)$ — відфільтроване значення. Тоді

$$\hat{N}_i(t_k) = X_i(t_k) - \hat{X}_i(t_k), \hat{\sigma}_{i2} = \frac{1}{M-1}\sum_{k=1}^{M}\left(X_i(t_k) - \hat{X}_i(t_k)\right)^2.$$

Скоригувавши діагональні елементи інформаційної матриці $X^{\mathrm{T}}X$ на ці дисперсії, отримаємо незміщені МНК-оцінки $\hat{\beta}$ вектора β.

Практична постановка задачі часто містить в собі суттєву частку невизначеності статистичних властивостей перешкод у вимірах вхідних X і вихідних Y даних про об'єкт, модель якого може бути подано як регресійну:

$$Y^* = X^*\beta^* + \varepsilon^*, \tag{4.1}$$

де $Y^*, X^*, \beta^*, \varepsilon^*$ — точні значення змінних виходу, входу і нев'язки, яка утворюється за умови, що оцінку β^* для точних значень отримано за методом найменших квадратів:

$$\begin{gathered}\beta^* = \left(X^{*\mathrm{T}}X^*\right)^{-1}X^{*\mathrm{T}}Y^*; \\ \left(X^{*\mathrm{T}}X^*\right)^{-1}X^{*\mathrm{T}} = C^*,\end{gathered} \tag{4.2}$$

тобто, за умови

$$\beta^* = \operatorname{argmin} \varepsilon^{*\mathrm{T}}\cdot\varepsilon^*. \tag{4.3}$$

На практиці МНК-оцінку (4.2) отримують за збуреними перешкодами N_x і N_y:

$$\begin{gathered}X = X^* + N_x, \\ Y = Y^* + N_y\end{gathered}, \tag{4.4}$$

де $X = \begin{bmatrix} x_1(1)x_2(1)\ldots x_i(1)\ldots x_n(1) \\ x_1(2)x_2(1)\ldots x_i(2)\ldots x_n(2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1(M)x_2(M)\ldots x_i(M)\ldots x_n(M) \end{bmatrix}$.

$$Y^{\mathrm{T}} = [y(1)y(2)\ldots y(M)],\ x_i(j) = x_i^*(j) + N_{xi}(j),\ y_i(j) = \\ = y_i^*(j) + N_y(j),\ j = \overline{1,M}.$$

МНК-оцінка (4.2) $\hat{\beta}$ вектора β^* знаходиться з умови (4.3), але вже для реальних даних (4.4) у звичайній

$$\hat{\beta} = \left(X^{\mathrm{T}}X\right)X^{\mathrm{T}}Y = CY,\ C = \left(X^{\mathrm{T}}X\right)X^{\mathrm{T}}, \tag{4.5}$$

або у рекурентній формах:

$$\hat{\beta}(j+1) = \hat{\beta}(j) + P(j+1)X(j)\left[Y(j) - X^{\mathrm{T}}(j)\hat{\beta}(j)\right],$$

$$P(j+1) = P(j) - P(j)X(j)\left[x^{\mathrm{T}}(j)p(j)X(j)+1\right]^{-1}X^{\mathrm{T}}(j)P(j),$$

з початковими умовами $P(0)$, $\hat{\beta}(0)$.

Якщо останні невідомі, то приймають $\hat{\beta}(0) = 0$, $P(0) = \sigma^2\beta \cdot I$, $\sigma^2\beta(0) \to \infty$.

Для спрощення аналізу покладемо, що перешкоди N_x і N_y — гауссівські білі шуми, авто- і взаємонекоректовані. Визначимо зсув $\Delta\beta$ оцінки (4.5) відносно точного значення (4.2):

$$\begin{aligned}\Delta\beta = M\{\hat{\beta}\} - \beta^* &= M\left\{\left[C^* + \delta C(N)\right]\left[Y^* + \varepsilon^* + N_y\right]\right\} - \beta^* = \\ &= M\left\{\left[C^* + \delta C(N)\right]Y^*\right\} - \beta^* = \\ &= \left[X^{*\mathrm{T}}X^* + M\left\{N_x^{\mathrm{T}}N_x\right\}\right]^{-1}X^{*\mathrm{T}}Y^* - \beta^* = \\ &= \left[X^{*\mathrm{T}}X^* + \mathrm{diag}\sigma_i^2 MI\right]^{-1}X^{*\mathrm{T}}Y^* - \beta^*.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Позначимо

$$X^{*\mathrm{T}}X^* = A^*,\ M\left\{N^{\mathrm{T}}{}_xN_x\right\} = \delta A,\ X^{*\mathrm{T}}Y^* = B^*.$$

Тоді:

$$\left(A^*\right)^{-1}B^* = \hat{\beta},\ \left[A^* + \delta A\right]\hat{\beta} = B^*.$$

Звідси $\delta A\hat{\beta} = -A^*\left(\hat{\beta} - \beta^*\right) = -A^*\Delta\hat{\beta}$, тобто $\delta A\left(\beta^* + \Delta\hat{\beta}\right) = -A^*\Delta\hat{\beta}$, або

$$\Delta\hat{\beta} = -\left(A^* + \delta A\right)^{-1}\delta A\beta^*. \tag{4.7}$$

Як бачимо, оцінка $\hat{\beta}$ за умов навіть некорельованих білих шумів N_x і N_y, буде занижена відносно істинної β^* на величину (4.7). Остання, за умови, що норма $||\delta A|| \to 0$ прямує до нуля, а $\hat{\beta}$ до β^*; I за умови, що норма $||\delta A|| \to \infty$ прямує до нуля.

Коваріація оцінки (4.5) за наведених вище умов та приймаючи, що норма $\left\|N_x^{\mathrm{T}}\varepsilon\right\|$ набагато менша, ніж $\left\|X^{*\mathrm{T}}\right\|$ або $\left\|N_x^{\mathrm{T}}Y^*\right\|$, наближено дорівнює:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left[\hat{\beta}\right] &\cong M\left\{\left[C_1\varepsilon + C_2N_X\right]\left[C_1\varepsilon + C_2N_x\right]^{\mathrm{T}}\right\} = \\ &= C_1M\left\{\varepsilon\varepsilon^{\mathrm{T}}\right\}C_1^{\mathrm{T}} + C_2M\left\{N_XN^{\mathrm{T}}{}_X\right\}C_2{}^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{4.8}$$

де $\varepsilon = \varepsilon^* + N_Y$,

$$C_1 = \left[X^{*\mathrm{T}}X^* + M\left\{N_XN_X{}^{\mathrm{T}}\right\}\right]^{-1}X^{*\mathrm{T}},$$

$$C_2 = \left[X^{*\mathrm{T}}X^* + M\{N_XN_X^{\mathrm{T}}\}\right]^{-1}Y^{*\mathrm{T}}.$$

Перша складова виразу (4.8) зі зростанням рівня N_x зменшується, в другій C_2 зменшується, а $M\{N_XN_X^{\mathrm{T}}\}$ збільшується. Але C_2 входить до виразу (4.8) квадратично, тоді як $M\{N_XN_X^{\mathrm{T}}\}$ — лінійно. Тому для білого шуму, якщо $M\left\{N_XN_X^{\mathrm{T}}\right\} = \sigma_{Nx}^2MI$, зі зростанням σ_{Nx}^2 коваріація оцінки $\hat{\beta}$ зменшуватиметься. Таким чином МНК має властивість регулярізації системи до нормальних рівнянь, подібно за Тихоновим [1]. Остання полягає в мінімалізації звичайного квадратичного функціонала $I = \varepsilon^m\varepsilon$ з регуляризуючим додатком $\alpha\hat{\beta}^{\mathrm{T}}\hat{\beta}$, де α — параметр регуляризації:

$$I = \varepsilon^{\grave{o}}\varepsilon = (Y - X^*)^{\mathrm{T}}(Y - X^*) + \alpha\hat{\beta}^{\mathrm{T}}\hat{\beta},$$

$$\frac{\partial I}{\partial \hat{\beta}} = 0 = 2\left(X^{*\mathrm{T}} X^{*} \hat{\beta} - X^{*\mathrm{T}} Y \; + \; \alpha \hat{\beta} \right), \tag{4.9}$$

звідки $\hat{\beta} = \left(X^{*\mathrm{T}} X^{*} + \alpha I \right)^{-1} X^{*\mathrm{T}} Y.$

Зіставляючи (4.7) і (4.9), бачимо, що в МНК параметр Тихонова дорівнює diag $\sigma_i^2 \cdot M$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. *Яка умова в реальній ситуації не відповідає умовам теореми Гаусса-Маркова?*
2. *Як вплинуть на зміщення МНК-оцінки шуми в вимірах незалежних змінних ММ?*
3. *Як оцінити шуми* $N(t)$ *в* $X(t)$ *і зкоригувати МНК-оцінку* β *?*
4. *В чому полягає подібність регуляризації по Тихонову і МНК-оцінювання в умовах шумів в незалежних змінних?*

4.2. Узагальнений МНК та його практична реалізація

У цьому методі знаходяться МНК-оцінки за зваженими U^{-1} (відфільтрованими) даними:

$$\hat{X}^{-1} = U^{-1} X, \quad \hat{Y} = U^{-1} Y,$$

що еквівалентно мінімізації функціонала

$$I = \; 0{,}5 \sum_{j=1}^{M} \left\| y(j) - x(j) \hat{\beta} \right\|^2 Q^{-1}, \tag{4.10}$$

де Q — матриця ваги кожного j-го виміру: $Q = (\mathrm{cov}\,\hat{\beta}) \cdot U^{\mathrm{T}}$.

Тоді зважена вагою Q^{-1} оцінка узагальненого МНК (УМНК), отримана за умови мінімуму (4.10), дорівнює:

$$\hat{\beta} = \left(X^{\mathrm{T}} Q^{-1} X \right)^{-1} X^{\mathrm{T}} Q^{-1} Y. \tag{4.11}$$

Коваріація оцінки (4.11):

$$\operatorname{cov}\hat{\beta} = \left(X^{\mathrm{T}}Q^{-1}X\right)^{-1} X^{\mathrm{T}}M\left\{N_y N_y^{\mathrm{T}}\right\}Q^{-1}X\left(X^{\mathrm{T}}Q^{-1}X\right)^{-1}.$$

Оцінка (4.11) має мінімальну дисперсію за умови, що

$$Q = M\left\{N_y N_y{}^{\mathrm{T}}\right\},$$

тоді

$$\operatorname{cov}\hat{\beta} = \left[X^{\mathrm{T}}M\left\{NyNN_y^{\mathrm{T}}\right\}X\right]^{-1}.$$

Для некорельованого білого шуму в вимірах $YQ = \sigma_y^2(j)I$. Тоді рекурентна формула УМНК збігається із зваженим МНК:

$$\hat{\beta}(j+1) = \beta(j) + P(j+1)X(j)\left(\frac{1}{\sigma^2_{y(j)}}\right)\left[y(j) - X^{\mathrm{T}}(j)\beta(j)\right], \quad (4.12)$$

$$P(j+1) = P(j) - X(j)\left[X^{\mathrm{T}}(j)P(j)\,X(j) + \sigma_y^2(j)\right]^{-1} X^{\mathrm{T}}(j)P(j).$$

Неточність визначення чи апріорного завдання матриці Q^{-1} призводить до суттєвої втрати оптимальності оцінок (4.11), (4.12). Тобто, алгоритм не є робастним [2]: статистична незначна неадекватність матриці Q коваріації перешкод N_y, викликана, наприклад, окремими перебоями в даних, які утворюють в законі розподілення перешкод N_y так звані «тяжкі хвости» [2], під час оцінювання вектора $\hat{\beta}$ за алгоритмом (4.11), це може привести до суттєвої помилки. Тому в практичній реалізації більш зручним і надійним буде квазіоптимальний УМНК:

— на першому етапі відбувається виявлення та виправлення аномальних даних та квазіоптимальне оцінювання сигналів X, Y шляхом згладжування лінійними фільтрами їх зашумлених вибірок $X(j)$, $Y(j)$, $j = \overline{1, M}$;

— на другому — МНК-оцінювання вектора $\hat{\beta}$ за отриманими на першому етапі оцінками $\hat{X}$ і $\hat{Y}$ точних значень X^*, Y^* сигналів.

Для такого підходу перешкоди $N_{X\varepsilon}, i = \overline{1, n}, N_y$ можуть бути взаємокорельованими. Окрім того, оскільки модель (4.1) лінійна, то, за умови фільтрації всіх змінних $X_i(t)$, $Y(t)$ одним лінійним

фільтром, невідповідність згладжених значень $\hat{X}^*$ і $\hat{Y}^*$ істинним X^*, Y^* не приводить до зміщення оцінки $\hat{\beta}$ відносно β^*. Дійсно, знак рівності в рівнянні (4.1) не порушується, якщо на його ліву і праву частину подіяти лінійним оператором фільтра $W_ф$:

$$W_ф\left\{Y^*\right\} = W_ф\left\{X^*\beta^* + \varepsilon^*\right\} = W_ф\left\{X^*\right\}\beta^* + W_ф\left\{\varepsilon^*\right\}. \qquad (4.13)$$

Математичне сподівання оцінки $\hat{\beta}$:

$$M\left(\hat{\beta}\right) = \left[\hat{X}^{*\mathrm{T}}\hat{X}^* + M\left\{\hat{N}_x\hat{N}^{\mathrm{T}}\right\}\right]^{-1}\hat{X}^*\hat{Y}^*.$$

Якщо для спрощення прийняти що $M\left(\hat{N}_x\hat{N}^{\mathrm{T}}\right) = \mathrm{diag}\left\{\sigma^2_{N_s}\right\}I$, а також покласти, що власні числа матриці $\left(\hat{X}^{*\mathrm{T}}\hat{X}^*\right)^{-1}\mathrm{diag}\left\{\sigma^2_{N_i}\right\}$ менше одиниці, то вираз $\left[I + \left(\hat{X}^{*\mathrm{T}}\hat{X}^*\right)^{-1}\mathrm{diag}\left\{\sigma^2_{N_i}\right\}\right]^{-1}$ можна подати рядом. Тоді :

$$\left(\hat{X}^{*\mathrm{T}}\hat{X}^*\right)\hat{\beta} = \left[I + \left(\hat{X}^{*\mathrm{T}}\hat{X}^*\right)^{-1}\mathrm{diag}\left\{\sigma^2_{N_i}\right\}\right]^{-1}\hat{X}^{*\mathrm{T}}\hat{Y}^* \cong$$

$$\cong \left[I - \left(\hat{X}^{*\mathrm{T}}\hat{X}^*\right)^{-1}\mathrm{diag}\left\{\sigma^2_{N_i}\right\}\right]\hat{X}^{*\mathrm{T}}\hat{Y}^*.$$

Звідси

$$\hat{\beta} \cong \left[\left(\hat{X}^{*\mathrm{T}}\hat{X}^*\right)^{-1}\hat{X}^{*\mathrm{T}}\hat{Y}^* - \left(\hat{X}^{*\mathrm{T}}\hat{X}^*\right)^{-2}\mathrm{diag}\left\{\sigma^2_{N_i}\right\}\right]^{-1}\hat{X}^{*\mathrm{T}}\hat{Y}^*.$$

Враховуючи, що :

$$\beta \cong \left(\hat{X}^{*\mathrm{T}}\hat{X}^*\right)^{-1}\hat{X}^{*\mathrm{T}}\hat{Y}^*,$$

отримаємо вираз для зсуву:

$$\Delta\hat{\beta} = \hat{\beta} - \beta = -\mathrm{diag}\left\{\sigma^2_{N_i}\right\}\left(\hat{X}^{*\mathrm{T}}\hat{X}^*\right)^{-1}\hat{\beta}^*. \qquad (4.14)$$

Оскільки норма $\Delta\beta$ не більше добутку норм складових правої частини рівняння (4.14), то справедлива нерівність:

$$\frac{\left\|\Delta\hat{\beta}\right\|}{\left\|\hat{\beta}^{*}\right\|} \le \left\|\mathrm{diag}\left\{\sigma^{2}_{\hat{N}_i}\right\}\right\| \cdot \left\|\hat{X}^{*\mathrm{T}}\hat{X}^{*}\right\|^{-1}. \qquad (4.15)$$

Що сильніша фільтрація *X, Y* оператором W_{ϕ} фільтра, то менша норма матриці збурень $\sigma^{2}_{\hat{N}_i}$. Тобто фільтр заглушує перешкоди, не порушуючи рівняння (4.13). Але згладжування фільтром складових $X_i(t)$ вектор-функції $X(t)$ звужує їх частотні спектри і, як наслідок, зменшує їх лінійну незалежність. Зменшується число обумовленої матриці $\left(\hat{X}^{*\mathrm{T}}\hat{X}^{*}\right)$ і, як наслідок, збільшується норма зворотної матриці $\left(\hat{X}^{*\mathrm{T}}\hat{X}^{*}\right)^{-1}$.

Для кожних конкретних випадків існує оптимальне значення згладжуючого ефекту фільтра W_{ϕ}, за якого норма зміщення (4.15) буде мінімальною.

Коваріація оцінки $\hat{\beta}$ за методом УМНК при допущенні взаємонекорельованості перешкод, подібна до МНК (4.8), але матриці $M\{\varepsilon\varepsilon^{\mathrm{T}}\}$, $M\{N_y N^{\mathrm{T}}{}_y\}$ вже недіагональні. Чим далі рознесено спектри сигналу і перешкоди, то краща фільтрація і, відповідно, оцінки квазіоптимального УМНК.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. В чому сутність узагальненого МНК?

2. Як впливає фільтрація шумів на зміщення і дисперсію УМНК-оцінок?

4.3. Інтегрований МНК

4.3.1. Загальні положення

МНК- і УМНК-оцінки попередніх методів знаходяться як координата точки мінімуму відповідних функціоналів $\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon$ і $\hat{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\hat{\varepsilon}$. Оскільки функціонал є усередненим на кінцевому інтервалі *T*

значенням квадрата ε чи $\hat{\varepsilon}$, які є сумішшю корисного сигналу $Y^* - X^*\beta$ і випадковою збурення $N_y - N_x\beta$, то він як функція від β не є точним. Відомо [3], що операція диференціювання $\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon\right)$ зашумленої функції $\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon$ є некоректною. Цим обумовлена невисока точність МНК-оцінок на коротких сильнозашумлених вибірках даних *X, Y*. УМНК дещо покращує точність завдяки згладжуванню перешкод в *X, Y*. Але на коротких вибірках впливає на точність фільтрації невизначеність граничних умов. Окрім цього згладжування зменшує обумовленість матриці $\hat{X}^{\mathrm{T}}\hat{X}$, що еквівалентне зменшенню крутості функціонала. Тоді знову зростає область невизначеності *G* оцінки $\hat{\beta}$. Бажано зменшити розкид значень функціонала, не зменшуючи його кривизни в зоні екстремуму. Це можливо зробити для незгладжених *X, Y* шляхом додаткового усереднення по множині квазістатистично незалежних функціоналів, близьких до середньоквадратичного. Такими функціоналами можуть бути зсунуті у часі *t* на інтервал θ середні добутки $\frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}}\varepsilon(t)\,\varepsilon(t+\theta)\,dt$. Усереднюючи їх на інтервалі $[-\tau_1, \tau_1]$, отримаємо критерій:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\tau_2}^{\tau_1}\eta(\theta)\int_0^{T}\varepsilon(t)\varepsilon(t+\theta)dtd\theta, \tag{4.16}$$

де $\eta(\theta)$ — функція ваги, в найпростішому вигляді одинична.

Необхідна умова мінімуму *I* за β_k, $k = \overline{1,n}$:

$$\frac{\partial I}{\partial\beta_k} = \frac{1}{2}\int_{-\tau_1}^{\tau_1}\eta(\theta)\int_0^{\mathrm{T}}\left[\frac{\partial\varepsilon(t)}{d\beta_k}\varepsilon(t+\theta) + \varepsilon(t)\frac{\partial\varepsilon(t+\theta)}{\partial\beta_k}\right]dtd\theta =$$

$$= \int_{-\tau_1}^{\tau_1}\eta(\theta)\int_0^{\mathrm{T}}\left(-x_k(t)\right)\left[y(t+\theta) - \sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i(t+\theta)\right] + \tag{4.17}$$

$$+\left(-x_k(t+\theta)\right)\left[y(t) - \sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i(t)\right] = 0,\ k = \overline{1,n}.$$

Із виразу (4.17) випливає система нормальних рівнянь:

$$A \cdot \hat{\beta} = B, \tag{4.18}$$

де A — матриця $n \times n$ з елементами a_{ik}; B — матриця-стовпчик $n \times 1$ з елементами b_k;

$$a_{ik} = \int_{-t_1}^{t_1} \eta(\theta) \int_0^T \left[\left(x_i(t+\theta) \right) x_k(t) + x_i(t) x_k(t+\theta) \right] dt d\theta, \tag{4.19}$$

$$b_k = \int_{-t_1}^{t_1} \eta(\theta) \int_0^T \left[\left(y_i(t+\theta) \right) x_k(t) + y(t) x_k(t+\theta) \right] dt d\theta. \tag{4.20}$$

Для дискретних у часі t вибірок інтеграли замінимо відповідними сумами. Тоді :

$$a_{ik} = \sum_{1=-p}^{p} \eta(l) \sum_{j=1}^{M} \left[(x_i(j+l)) x_k(j) + x_i(j) x_k(j+l) \right],$$

$$b_k = \sum_{1=-p}^{p} \eta(l) \sum_{j=1}^{M} \left[(y(j+l)) x_k(j) + y(j) x_k(j+l) \right].$$

Розв'язок системи (4.18) дає шукану оцінку $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = A \cdot B. \tag{4.21}$$

4.3.2. Аналіз складових методу

Проаналізуємо наскільки ця оцінка відрізняється від істинної β^* [див. рівняння (4.2)]. Для цього спочатку розглянемо одну зі складових інтеграла (4.16) суми

$$I_e = \frac{1}{2} \sum_{1=-p}^{p} \eta(l) \sum_{j=1}^{M} \varepsilon(j) \varepsilon(j+l), \tag{4.22}$$

наприклад, якщо $l = -m$.

Тобто зсув $\tau = -m\Delta t$, де Δt — крок дискретності вимірів X, Y у часі t. Тоді, без урахування ваги $\eta(m)$, $-m$ — складова дискретної моделі інтегрокореляційного критерію (4.22) дорівнюватиме:

$$I_m = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon_{-\tau} = \frac{1}{2}\left(Y_0 - X_0\hat{\beta}\right)^{\mathrm{T}}\left(Y_{-\tau} - X_{-\tau}\hat{\beta}\right) = \\ = \frac{1}{2}Y_0{}^{\mathrm{T}}Y_{-\tau} - \frac{1}{2}\hat{\beta}\left(X_0{}^{\mathrm{T}}Y_{-\tau} + X^{\mathrm{T}}{}_{-\tau}Y_0\right) + \frac{1}{2}\hat{\beta}^{\mathrm{T}}X_0{}^{\mathrm{T}}X_{-\tau}\hat{\beta}, \quad (4.23)$$

де індекс $-\tau$, що означає зсув $x_i(t)$, $y(t)$ на $\tau = m\Delta t$:

$$X_{-\tau} = \begin{bmatrix} x_1(1)\ldots x_n(1) \\ x_1(2)\ldots x_n(2) \\ \ldots \\ x_1(M-m)\ldots x_n(M-m) \end{bmatrix}, Y_{-\tau} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \ldots \\ y(M-m) \end{bmatrix},$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1(m+1)\ldots x_n(m+1) \\ x_1(m+2)\ldots x_n(m+2) \\ \ldots \\ x_1(M)\ldots x_n(M) \end{bmatrix}, Y_0 = \begin{bmatrix} y(m+1) \\ y(m+2) \\ \ldots \\ y(M) \end{bmatrix}.$$

Якщо зсув $-\tau$ більше часу кореляції перешкод N і $\hat{\varepsilon}$, то математичне сподівання I_m (4.21) буде інваріантне до цих перешкод.

$$M\{I_m\} = \frac{1}{2}\varepsilon_0{}^{*\mathrm{T}}\varepsilon_{-\tau}{}^{*}.$$

Необхідна умова мінімуму I_m:

$$\frac{\partial I_m}{\partial \hat{\beta}^T} = -\frac{1}{2}\left(X_0{}^{\mathrm{T}}Y_{-\tau} + X^{\mathrm{T}}_{-\tau}Y_0\right) + \frac{1}{2}\left(X_0{}^{\mathrm{T}}Y_{-\tau} + X^{\mathrm{T}}_{-\tau}Y_0\right)\hat{\beta} = 0, \quad (4.24)$$

достатня умова

$$\frac{1}{2}\det\left(X_0{}^{\mathrm{T}}X_{-\tau} + X^{\mathrm{T}}_{-\tau}X_0\right) > 0. \quad (4.25)$$

На відміну від МНК, для додатної визначеності матриці $X_0{}^{\mathrm{T}}X_{-\tau} + X^{\mathrm{T}}_{-\tau}X_0$ в (4.25) недостатньо лінійної незалежності функції $x_i(k)$. Визначимо верхню границю $\tau_{\text{гр}}$ для зсуву τ, за якого нерівність (4.23) перетворюється в рівність, тобто система стає виродженою.

Оскільки перешкода N лише покращує обумовленість матриці $X^{\mathrm{T}}X$, то при виведенні $\tau_{\text{гр}}$ братимемо $N = 0$, $X = X^{*}$. Зобразимо $X^{*}_{-\tau}$ рядом Тейлора:

$$X^*_{-\tau} = X^*_0 X \; - \; \tau_0 \dot{X}^*_0 + R_1\left(\ddot{X}^*_0\right), \tag{4.26}$$

де $X^*_0 = \dfrac{d}{dt} X^*_0$, $R_1\left(\ddot{X}^*_0\right)$ – матриця залишкових членів в розкладенні (4.24). З точністю до $R_1\left(\ddot{X}^*_0\right)$ маємо:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left(X^{*\mathrm{T}}_0 X^*_{-\tau}\right) + X^{*\mathrm{T}}_{-\tau} X^*_0 \doteq \frac{1}{2}\left[X^{*\mathrm{T}}_0\left(X^*_0 - \tau\dot{X}^*_0\right) + \left(X^*_0 - \tau\dot{X}^*_0\right)^{\mathrm{T}} X^*_0\right] = \\ = X^{*\mathrm{T}}_0 X^*_0 \frac{\tau}{2}\left(X^{*\mathrm{T}}_0 \dot{X}^*_0 + \dot{X}^{*\mathrm{T}}_0 X^*_0\right) = \Gamma - \frac{\tau}{2}\Gamma_1,\end{gathered} \tag{4.27}$$

де Г, Γ_1 – симетричні матриці: Г – матриця Грама, тому вона додатно визначена.

Відомо, що дві симетричні матриці, з яких одна додатно визначена перетворенням *T*, можна одночасно привести до діагонального виду так, що на діагоналі матриці Г будуть всі одиниці, а на діагоналі Γ_1 — власні значення λ_1 матриці Γ^{-1} (для виразу (4.27) – $\dfrac{\tau}{2}\Gamma^{-1}\Gamma_1$):

$$T^{-1}\left(\Gamma - \frac{\tau}{2}\Gamma_1\right)T = \begin{bmatrix} 1 \cdots 0 \\ \ddots \\ 0 \cdots 1 \end{bmatrix} - \frac{\tau}{2}\begin{bmatrix} \lambda_{11} \cdots 0 \\ \ddots \\ 0 \cdots \lambda_{1n} \end{bmatrix}. \tag{4.28}$$

Граничне значення $\tau_{\text{гр}}$ зсуву визначається за умови:

$$1 \; - \frac{\tau_p}{2} \max \lambda_{1i} = 0,$$

або

$$\tau_{\text{гр}} = \frac{2}{\max \lambda_{1i}}, \tag{4.29}$$

де λ_{1i} – власні значення матриці $\dfrac{\tau}{2}\Gamma^{-1}\Gamma$.

Зрозуміло, що чим більше τ, то гірше обумовлена матриця Г (більше $\| \; \|$), то більше $\max \lambda_{1i}$ і, як наслідок, менший граничний зсув $\tau_{\text{гр}}$.

Розглянемо, як вплине симетрія зсуву $\pm\tau$ на граничне значення. Тут

$$I = \varepsilon_0^{\mathrm{T}}\left(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau}\right) = \left(Y_0 - X_0\hat{\beta}\right)^{\mathrm{T}}\left(Y_\tau + Y_{-\tau} - (X_\tau + X_{-\tau})\hat{\beta}\right) = Y_0^{\mathrm{T}}(Y_\tau + \\ + Y_{-\tau}) - \hat{\beta}^{\mathrm{T}}\left[X_0^{\mathrm{T}}(Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^{\mathrm{T}}Y_0\right] + \hat{\beta}^{\mathrm{T}}X_0^{\mathrm{T}}\left(Y_\tau + Y_{-\tau}\right)\hat{\beta}^{\mathrm{T}}, \tag{4.30}$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1(m+1) & \cdots & x_n(m+1) \\ x_1(m+2) & \dots & x_n(m+2) \\ x_1(M-m) & \cdots & x_n(M-m) \end{bmatrix}, Y_0 = \begin{bmatrix} y(m+1 \\ y(m+2) \\ \vdots \\ y(M-m) \end{bmatrix},$$

$$X_\tau = \begin{bmatrix} x_1(2m+1) & \cdots & x_n(2m+1) \\ x_1(2m+2) & \dots & x_n(2m+2) \\ x_1(M) & \cdots & x_n(M) \end{bmatrix}, Y_\tau = \begin{bmatrix} y(2m+1 \\ y(2m+2) \\ \vdots \\ y(M) \end{bmatrix},$$

де

$$X_{-\tau} = \begin{bmatrix} x_1(1) & \cdots & x_n(1) \\ x_1(2) & \dots & x_n(2) \\ x_1(M-2m) & \cdots & x_n(M-2m) \end{bmatrix}, Y_{-\tau} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(M-2m) \end{bmatrix}, \tau = m.$$

Необхідна умова мінімуму I

$$\frac{\delta I}{\delta \beta^{\mathrm{T}}} = \left[X_0^{\mathrm{T}}(Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^{\mathrm{T}}Y_0\right] + \\ + \left[X_0^{\mathrm{T}}(Y_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^{\mathrm{T}}X_0\right]\hat{\beta} = 0.$$

Достатня умова мінімуму I

$$\det\frac{\delta I}{\delta\beta^{\mathrm{T}}\delta\beta} = \left|X_0^{\mathrm{T}}(X_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^{\mathrm{T}}X_0\right| > 0. \tag{4.31}$$

Аналогічно висновку (4.29) знайдемо граничне $\tau_{\text{гр}}$ із умови, що у формулі (4.31) дорівнює нулю. Розглянемо вже три члени ряду (4.26):

$$X_\tau^* = X_0^* + \tau\dot{X}_0^* + \frac{\tau^2}{2}\ddot{X}_0^* + R_3\left(\dddot{X}^*, \tau\right), \tag{4.32}$$

$$X^*_{-\tau} = X^*_0 - \tau\dot{X}^*_0 + \frac{\tau^2}{2}\ddot{X}^*_0 + R_3(\dddot{X}, -\tau).$$

З точністю до $R_3\left(\dddot{X}, \pm\tau\right)$, отримуємо

$$\begin{aligned} &X^{*\mathrm{T}}_0\left(X^*_\tau + X^*_{-\tau}\right) + \left(X^*_\tau + X^*_{-\tau}\right)^{\mathrm{T}} X_0 \approx \\ &\approx X^{*\mathrm{T}}_0 X^*_0 + \frac{\tau^2}{4}\left[X^{*\mathrm{T}}_0 \ddot{X}^*_0 + X^{*\mathrm{T}}_0 X^*_0\right] = \Gamma + \frac{\tau^2}{4}\Gamma_2, \end{aligned} \tag{4.33}$$

де Γ і Γ_2 – подібні матриці до рівняння (4.28); Γ – додатно-визначена матриця Грама.

Тоді як і рівняння (4.28), вираз (4.33) приводиться перетворенням T до вигляду:

$$T^{-1}\left(\Gamma + \frac{\tau^2}{4}\Gamma_2\right)T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\tau^2}{4}\begin{bmatrix} \lambda_{2i} & 0 \\ 0 & \lambda_{2n} \end{bmatrix},$$

де λ_{2i} – власні значення матриці $\frac{\tau^2}{4}T^{-1}\Gamma_2\left(i = \overline{1,n}\right)$.

Граничне значення зсуву $\tau_{\text{гр}}$ визначатиметься з умови

$$1 + \frac{\tau^2_{\text{гр}}}{4}\max\left|\lambda_{2i}\right| = 0,$$

або

$$\tau_{\text{гр}} = \frac{2}{\sqrt{\max|\lambda_{2i}|}}, \tag{4.34}$$

де $\max|\lambda_{2i}|$ береться за множиною $\{\lambda_{2i}\}$ від'ємних власних значень матриці $\frac{\tau^2}{4}\Gamma^{-1}\Gamma_2$ на відміну від (4.27) для несиметричного зсуву.

Якщо продовжити розкладання (4.30) і підставити його в (4.31), легко впевнитися, що всі непарні члени розкладання (4.31) скоротяться.

Таким чином, для точних X^* матриця

$$X^{*\mathrm{T}}_0\left(X^*_\tau + X^*_{-\tau}\right) + \left(X^*_\tau + X^*_{-\tau}\right)^{\mathrm{T}} X^*_0$$

відрізняється від матриці $X_0^{*\mathrm{T}} X_0^*$ МНК лише парними членами розкладання (4.32), ураховуючи припущення гладкості $x_0(t)$.

Можна очікувати, що ця різниця буде суттєво меншою, ніж у (4.25) для точних X^*, оскільки там присутні всі члени розкладання (4.32). Таким чином, граничне значення (4.34) більше, ніж за умовою (4.29), а при тому ж τ показник (4.30) при неточних $X = X^* + N$ ближче до показника МНК (при точних X^*), ніж показник у рівнянні (4.23). Щоб це підтвердити, розглянемо зсув і коваріацію оцінки $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = \left[X_0^{\mathrm{T}} (X_\tau + X_{-\tau}) + X_\tau + X_{-\tau})^{\mathrm{T}} X_0 \right]^{-1} \times \\ \times [X_0^{\mathrm{T}} (Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^{\mathrm{T}} Y_0]. \tag{4.35}$$

4.3.3. Кількісні показники (4.35)

Зсув $\Delta\hat{\beta}$:

$$\Delta\hat{\beta} = M\left\{\hat{\beta} - \hat{\beta}^*\right\} = M\left\{\left[X_0^{\mathrm{T}} (X_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^{\mathrm{T}} X_0 \right]^{-1}\right\} \times$$

$$\times \left[X_0^{\mathrm{T}} (Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^{\mathrm{T}} Y_0 \right] - \left[\left(X_0^{*\mathrm{T}} X_0^* \right)^{-1} \left(X_0^{*\mathrm{T}} Y^*{}_0 \right) \right],$$

або

$$\Delta\hat{\beta} = M\left\{\left[X_0^{\mathrm{T}} (X_\tau + X_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^{\mathrm{T}} X_0 \right]^{-1}\right\} \times$$

$$\times M\left\{\left[X_0^{\mathrm{T}} (Y_\tau + Y_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^{\mathrm{T}} Y_0 \right] - \left(X_0^{*\mathrm{T}} X_0^* \right)^{-1} \left(X_0^{*\mathrm{T}} Y_0^* \right) = \right.$$

$$= \left[X^{*m}{}_0 \left(X_\tau^* + X_{-\tau}^* \right) + \left(X_\tau + X_{-\tau} \right)^{\mathrm{T}} X_0^* + M\left\{ N_0^{\mathrm{T}} (N_\tau + N_{-\tau}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (N_\tau + N_{-\tau})^{\mathrm{T}} N_0 \right\}\right]^{-1} X_0^{\mathrm{T}} \left(Y_\tau + Y_{-\tau} \right) + \left(X_\tau + X_{-\tau} \right)^{\mathrm{T}} Y_0 +$$

$$+ M\left\{\left[X_0^{*\mathrm{T}} (\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau}) + (X_\tau + X_{-\tau})^{\mathrm{T}} \varepsilon_0 \right]\right\} - \left(X_0^{*\mathrm{T}} X_0^* \right)^{-1} X_0^{*\mathrm{T}} Y_0^*.$$

Скориставшись розкладанням (4.32) і формулою (4.33), отримаємо:

$$\Delta\hat{\beta} = \left[\left(4\Gamma + \tau^2\Gamma_2\right) + 4(M-2m)R_{NN}(\tau)\right]^{-1} \times$$
$$\times\left[4\left(X_0^{*\mathrm{T}}Y_0^* + \tau^2\left(X_0^{*\mathrm{T}}\ddot{Y}_0^* + \ddot{X}_0^{*\mathrm{T}}Y_0^*\right)\right) + 2(M-2m)\times\right.$$
$$\left.\times\left(R_{X^*\varepsilon^*}(\tau) + R_{X^*\varepsilon^*}(-\tau)\right)\right] - \Gamma^{-1}X_0^{*\mathrm{T}}X_0^*,$$

де $R_{NN}(\tau)$ — матриця $(n\times n)$ кореляційних функцій $R_{N_iN_j}(\tau)$, $i, j = \overline{1,n}$, $R_{X^*\varepsilon^*}(\pm\tau)$ — вектор-стовпчик $(n\times 1)$ кореляційних функцій $R_{X_i\varepsilon_j}(\pm\tau)$, $i, j = \overline{1,n}$.

Зсув $\Delta\hat{\beta}$ викликано членами $(M-2m)$ $R_{NN}(\tau)$ і $(M-2m)\left[R_{X\varepsilon}(\tau) + R_{X\varepsilon}(-\tau)\right]$. Член при τ більшому часі кореляції перешкод дорівнює нулю. Друга складова

$$(M-2m)\left[R_{X\varepsilon}(\tau)\right] \approx \frac{\tau^2}{2}\left(X_0^{*\mathrm{T}}\ddot{\varepsilon}_0^* + \ddot{X}_0^{*\mathrm{T}}\varepsilon_0^*\right).$$

Тоді

$$\Delta\hat{\beta} = \left(2\Gamma + \frac{\tau^2}{4}\Gamma_2\right)^{-1}(M-2m)\left((R_{X\varepsilon}(\tau)) + R_{X\varepsilon}(-\tau)\right).$$

Звідси бачимо, що зсув $\Delta\hat{\beta}$ зменшився, якщо виконується нерівність

$$\left(\frac{M-2m}{M-m}\right)\left\|\left(2\Gamma + \frac{\tau^2}{2}\Gamma_2\right)^{-1}\right\| < \left\|\left(2\Gamma - \tau\Gamma_1\right)^{-1}\right\|, \qquad (4.36)$$

або за того ж зміщення $\Delta\hat{\beta}$ оцінки $\hat{\beta}$, граничне $\tau_{\text{гр}}$ зросло.

Оцінка дисперсії оцінки $\hat{\beta}$:

$$\operatorname{cov}\left[\hat{\beta}\right] = M\left\{\left(\hat{\beta} - M\left\{\hat{\beta}\right\}\right)\left(\hat{\beta} - M\left\{\hat{\beta}\right\}\right)^{\mathrm{T}}\right\}.$$

Подамо $\hat{\beta}$ із рівняння (4.35) так:

$$\hat{\beta}=\Big[X_0^m\left(X_\tau^*+X_{-\tau}^*\right)+\left(X_\tau^*+X_\tau^*\right)^{\mathrm{T}}X_0^*+4(M-2m)R_{NN}(\tau)+$$

$$+\xi\left(X^*,N,\tau\right)\Big]^{-1}\Big[\left(X_0^m+N_0^{\mathrm{T}}\right)\left(Y_\tau^*+\varepsilon_\tau+Y_{-\tau}^*+\varepsilon_{-\tau}\right)+$$

$$+\left(X_\tau^*+N_\tau+X_{-\tau}^*+N_{-\tau}\right)^{\mathrm{T}}\left(Y_0^*+\varepsilon_0\right)\Big].$$

За великих M, нехтуючи випадковою складовою і випадковими компонентами $\left[N_0^{\mathrm{T}}\left(\varepsilon_\tau+\varepsilon_{-\tau}\right)\left(N+N_{-\tau}\right)_{\varepsilon_0}\right]$ другого порядку малості, позначивши:

$$C_1'=\left[X_0^{*m}\left(X_\tau^*+X_{-\tau}^*\right)+\left(X_\tau^*+X_{-\tau}^*\right)^{\mathrm{T}}X_0^*+4(M-2m)R_{NN}(\tau)\right]^{-1}X_0^{*m};$$

$$C_1''=\left[X_0^{*m}\left(X_\tau^*+X_{-\tau}^*\right)+\left(X_\tau^*+X_{-\tau}^*\right)^{\mathrm{T}}X_0^*+4(M-2m)R_{NN}(\tau)\right]^{-1}X_{-\tau}^{*m};$$

$$C_1'''=\left[X_0^{*m}\left(X_\tau^*+X_{-\tau}^*\right)+\left(X_\tau^*+X_{-\tau}^*\right)^{\mathrm{T}}X_0^*+4(M-2m)R_{NN}(\tau)\right]^{-1}X_\tau^{*m};$$

$$C_2'=\left[X_0^{*m}\left(X_\tau^*+X_{-\tau}^*\right)+\left(X_\tau^*+X_{-\tau}^*\right)^{\mathrm{T}}X_0^*+4(M-2m)R_{NN}(\tau)\right]^{-1}Y_0^*;$$

$$C_2''=\left[X_0^{*m}\left(X_\tau^*+X_{-\tau}^*\right)+\left(X_\tau^*+X_{-\tau}^*\right)^{\mathrm{T}}X_0^*+4(M-2m)R_{NN}(\tau)\right]^{-1}Y_{-\tau}^*;$$

$$C_2'''=\left[X_0^{*m}\left(X_\tau^*+X_{-\tau}^*\right)+\left(X_\tau^*+X_{-\tau}^*\right)^{\mathrm{T}}X_0^*+4(M-2m)R_{NN}(\tau)\right]^{-1}Y_\tau^*,$$

отримаємо:

$$\operatorname{cov}\left[\hat{\beta}\right]\equiv M\Big\{\Big[C_1'\left(\varepsilon_\tau+\varepsilon_{-\tau}\right)+\left(C_2''+C_1'''\right)\varepsilon_0+C_2'\left(N_\tau+N_{-\tau}\right)+\left(C_2''+C_2'''\right)N_0\Big]\times$$

$$\times C_1'\left(\varepsilon_\tau+\varepsilon_{-\tau}\right)+\left(C_1''+C_1'''\right)\varepsilon_0+C_2'\left(N_\tau+N_{-\tau}\right)+\left(C_2''+C_2'''\right)N_0\Big]^{\mathrm{T}}\Big\}=$$

$$=C_1'M\left\{\left(\varepsilon_\tau+\varepsilon_{-\tau}\right)\left(\varepsilon_\tau+\varepsilon_{-\tau}\right)^{\mathrm{T}}\right\}C_1'^{\mathrm{T}}+C_1'M\left\{\left(\varepsilon_\tau+\varepsilon_{-\tau}\right)\varepsilon_0^{\mathrm{T}}\right\}\Big\{\left(C_1''+C_1'''\right)^{\mathrm{T}}+$$

$$+\left(C_1''+C_1'''\right)M\left(\varepsilon_\tau\varepsilon_{-\tau}\right)^{\mathrm{T}}\Big\}C_1'^{\mathrm{T}}+C_1'M\left\{\left(N_\tau+N_{-\tau}\right)N_0^{\mathrm{T}}\right\}\left(C_1''+C_1'''\right)^{\mathrm{T}}+$$

$$+\left(C_1''+C_1'''\right)M\left\{N_0\left(N_\tau+N_{-\tau}\right)\right\}^{\mathrm{T}}C_1'^{\mathrm{T}}+\left(C_1''+C_1'''\right)M\left\{N_0N_{\tau 0}^{\mathrm{T}}\right\}\left(C_1''+C_1'''\right)^{\mathrm{T}}$$

або

$$\operatorname{cov}\left[\hat{\beta}\right] = C_5'\left[M\left\{\left(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau}\right)\left(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau}\right)^{\mathrm{T}}\right\} + 2M\left\{(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})\varepsilon_0^{\mathrm{T}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2M\left\{\varepsilon_0(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau})^{\mathrm{T}}\right\} + M\left(\varepsilon_0\varepsilon_{\tau 0}^{\mathrm{T}}\right)C_5^{\mathrm{T}}\right] + C_6M\left\{N_0\left(N_\tau + N_{-\tau}\right)^{\mathrm{T}}\right\} + \quad (4.37)$$

$$+M\left\{N_0N_{\tau 0}^{\mathrm{T}}\right\}C_6^{\mathrm{T}} = C_5Q_3C_5^{\mathrm{T}} + C_6F_3C_6^{\mathrm{T}},$$

де $C_1' \approx C_1'' \approx C_1''' = C_5, C_2' \approx C_2'' \approx C_2'' = C_6$.

Враховуючи співвідношення (4.36), для $|\tau| > 0$ можна сподіватися, що $\|C_3\| > \|C_5\| > \|C_1\|$, $\|C_4\| > \|C_6\| > \|C_2\|$, тоді як

$$\|Q_3\| = \|Q_2\|, \ \|F_3\| = \|F_2\|.$$

Внаслідок того, що в (4.37) має місце співвідношення діагональних і нільпонтепних матриць, тому при рівних τ зсув і коваріація оцінок $\hat{\beta}$ при $\pm\tau$ буде менше, ніж для $-\tau$. Тобто симетричний зсув наближає критерії $\varepsilon_0^{\mathrm{T}}\left(\varepsilon_\tau + \varepsilon_{-\tau}\right)$ до ідеального $\varepsilon_0^{*\mathrm{T}}\varepsilon_0^*$. Таким чином, кожна *m*-на складова інтегрокореляційного критерію (4.22) у межах зсуву $\pm m\Delta t = \pm\tau$, меншого за модулем, ніж $\tau_{\text{гр}}$ (4.34), при її мінімізації дає оцінку $\hat{\beta}$ (4.35), близьку до істинної β^*, якщо зсув τ більший ніж час $T_{\text{кор}}$ кореляції перешкод і менший ніж граничний $\tau_{\text{гр}}$.

4.3.4. Рекурентна форма обчислення

Розглянемо рекурентну форму обчислення за критеріями (4.23) і (4.30) для *M* вимірів кроком Δt, тобто

$$t_k = k\Delta t, \ k = \overline{1, M},$$

$$I = \sum_{k=1}^{M}\left[y(k) - \sum_{i=0}^{n}\hat{\beta}_{i2}x_i(k)\right]\left[y\left(k+m\right) - \sum_{i=0}^{n}\hat{\beta}_{i2}x_i(k+m)\right].$$

З умови (4.24) отримаємо систему :

$$\sum_{k=1}^{M}\left[y(k)x_j(k+m)+y(k+m)x_j(k)\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_i\sum_{k=1}^{M}\left[x_i(k)x_j(k+m)+x_j(k+m)x_j(k)\right],\ j=\overline{1,n}$$

або у векторній формі :

$$\hat{\beta}=X^{\mathrm{T}}Y_m+X_m^{\mathrm{T}}Y_0.$$

Позначимо

$$P=\left[X_0^{\mathrm{T}}X_m+X_m^{\mathrm{T}}X_0\right]^{-1}. \qquad (4.38)$$

Тоді

$$\hat{\beta}_2=P\left(X^{\mathrm{T}}Y_m+X_m^{\mathrm{T}}Y_0\right). \qquad (4.39)$$

Подамо рівняння (4.38) в блочному вигляді для (k + 1)-го виміру:

$$P_{k+1}=\left[X_{0k}^{\mathrm{T}}X_{mk}+X_{mk}^{\mathrm{T}}X_{0k}\right]^{-1}=\left[\left[X_{0(k-1)}^{\mathrm{T}}X_{m(k-1)}+X_{m(k-1)}^{\mathrm{T}}X_{0(k-1)}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[x_{0k}x_{mk}^{\mathrm{T}}+x_{mk}x_{0k}^{\mathrm{T}}\right]\right]^{-1}=\left[P_k^{-1}+\left[x_{0k}x_{mk}^{\mathrm{T}}+x_{mk}x_{0k}^{\mathrm{T}}\right]\right]^{-1},$$

$$x_{0k}^{\mathrm{T}}=\left[x_1(k),x_2(k),\ldots,x_n(k)\right],$$

де

$$x_{mk}^{\mathrm{T}}=\left[x_1(k+m),x_2(k+m),\cdots,x_n(k+m)\right]. \qquad (4.40)$$

Із рівняння (4.40) знайдемо, що

$$P_{k+1}^{-1}-P_k^{-1}=x_{0k}x_{mk}^{\mathrm{T}}+x_{mk}x_{0k}^{\mathrm{T}}. \qquad (4.41)$$

Тоді для k-го виміру отримуємо $\hat{\beta}$ (4.39):

$$\hat{\beta}(k+1)=P_{k+1}\left(X_{0(k-1)}^{\mathrm{T}}Y_{mk}+X_{mk}^{\mathrm{T}}Y_{0k}\right)=$$

$$=P_{k+1}\left[X_{0k}^{\mathrm{T}},x_{0k}\right]\begin{bmatrix} Y_{m(k-1)} \\ y(k+m)\end{bmatrix}+\left[X_{m(k-1)}^{\mathrm{T}},x_{mk}\right]\begin{bmatrix} Y_{0(k-1)} \\ y(k)\end{bmatrix}=$$

$$=P_{k+1}\left[P_k^{-1}\hat{\beta}(k)+x_{0k}y(k+m)+x_{mk}y(k)\right]=$$

$$= \hat{\beta}(k) + P_{k+1}\Big[x_{0k} y(k+m) + x_{mk} y(k) + (P_k^{-1} - P_{k+1}^{-1})\hat{\beta}(k) \Big]. \quad (4.42)$$

Із формули (4.42), враховуючи (4.40), отримаємо:

$$\hat{\beta}(k+1) = \hat{\beta}(k) + P_{k+1}\big[x_{0k} y(k+m) + x_{mk} y(k) -$$

$$-\left(x_{0k} x_{mk}^{\mathrm{T}} + x_{mk} x_{0k}^{\mathrm{T}} \right)\hat{\beta}_2(k) \Big] =$$

$$= \hat{\beta}(k) + P_{k+1}\big[x_{0k}\varepsilon(k+m) + x_{mk}\varepsilon(k) \big],$$

де P_{k+1} — визначено згідно з рівнянням (4.38), $\varepsilon(e) = y(e) - x_e^{\mathrm{T}}\beta(e)$, $e = k, k+m$.

Для критерію (4.30), з умови мінімуму, отримаємо систему:

$$\sum_{k=1}^{M}\Big[\big(y(k+m) + y(k-m)x_j(k) + y(k) \big)\big(x_j(k+m) + x_j(k-m) \big) \Big] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_i \Big[\big(x_i(k+m) + x_i(k-m) \big) x_j(k) + x_i(k)\big(x_j(k+m) + x_j(k-m) \big) \Big]$$

або у векторній формі:

$$\Big[X_0^{\mathrm{T}} Z + Z^{\mathrm{T}} X_0 \Big]\hat{\beta} = X_0^{\mathrm{T}}(Y_m + Y_{-m}) + Z^{\mathrm{T}} Y_0,$$

де

$$\mathrm{Z} = X_m + X_{-m}.$$

Позначимо:

$$\Big[X_0^T Z + Z^T X_0 \Big]^{-1} = P.$$

Тоді

$$\hat{\beta} = P\Big[X_0^T (Y_m + Y_{-m}) + Z^T Y_0 \Big].$$

4.3.5. Вагова функція інтегрованого МНК

В умовах невизначеності характеристик збурень N_x і N_y вибір вагової функції $\eta(m)$ функціонал (4.16) слід виконувати за зовнішнім (головним) показником *I*. Знаходитимемо $\eta(m)$ у класі

симетричних відносно $m = 0$ фінітних функцій (таких, що $\eta(0) = \eta(\pm m) = 0$), наприклад такого вигляду:

$$\eta(m) = \eta(m, \gamma, \theta) = (1 + |m|)^{\theta} \left(1 - \cos \frac{1\pi m}{m_{\text{êð}}}\right)^{\gamma},$$

де $\theta \in (\pm\infty), \gamma \in (0, \infty), m_{\text{кр}}$ визначається за умови (4.34), параметри θ і γ оптимізуються (в системах класу БАСІ) за головним показником *I*. Параметр γ впливає на ширину імпульсу $\eta(m)$, а θ — на його асиметрію відносно максимуму (рис. 4.1).

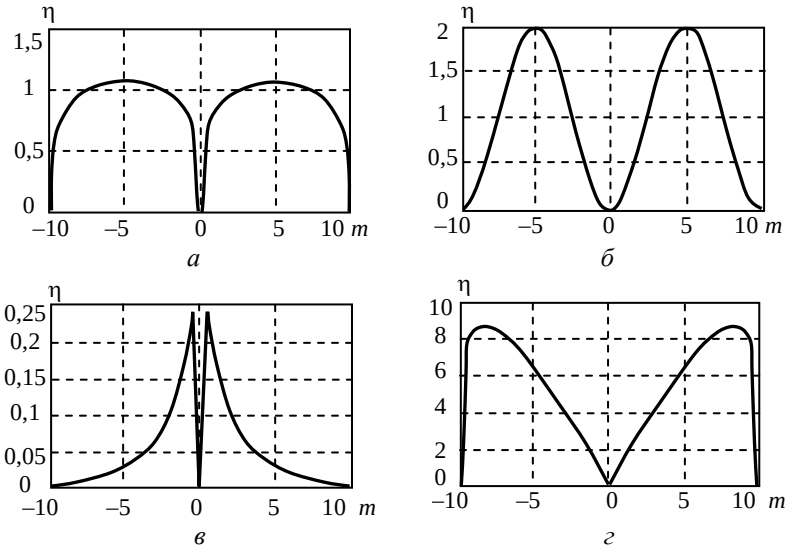


Рис. 4.1. Залежність $\eta(m, \theta, \gamma)$:
а — $\theta = 0, \gamma = 0{,}1$; *б* — $\theta = 0, \gamma = 1$; *в* — $\theta = 2, \gamma = 0{,}1$; *г* — $\theta = 2, \gamma = 0{,}1$

Якщо, $\gamma \to 0$, то $\eta(m)$ прямує до прямокутного імпульсу; якщо $\gamma \to \infty$, то $\eta(m)$ — до δ-функції Дірака, маємо оцінку (4.35); якщо $\theta \to 0$, то імпульси $\eta(m)$ симетричні відносно їх максимумів; якщо $\theta \to \infty$, то імпульс $\eta(m)$ наближається до $m = 0$, а метод до МНК; якщо $\theta \to -\infty$, то маємо оцінку (4.35) для $m = m_{\text{кр}}$. Змінюючи θ і γ, за умови екстремуму *I* можна забезпечити оптимальність оцінки (4.19) інтегрованого МНК.

4.3.6. Алгоритм методу ІМНК

Розглянемо алгоритм роботи ІМНК.

За відомими вхідними та вихідними даними N спостережень:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{Nn} \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix},$$

здійснюється:

1. Знаходження критичного значення зсуву $m_{кр}$.
2. Знаходження матриць A та B.
3. Оцінка параметрів моделі.

Розглянемо три етапи методу ІМНК докладніше.

1.Знаходження критичного значення зсуву $m_{кр}$.

1.1. Знаходження коефіцієнтів матриці A_1 для $m = 1$:

$$a_{ij} = \sum_{k=m}^{N-2*m} \sum_{l=-m}^{m} \eta(l)\left[x_i(k) \cdot x_j(k+l) + x_i(k+l) \cdot x_j(k)\right], \quad (4.43)$$

де $\eta(l) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } l = \pm m; \\ 0, \text{ якщо } |l| < m, \end{cases}$ $i, j = \overline{0, n+1}$.

1.2. Знаходження визначника нормованої матриці A_1 – det(A_1), де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{01}}{a_{00}} & \dots & \frac{a_{0n}}{a_{00}} \\ \frac{a_{10}}{a_{11}} & 1 & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n0}}{a_{nn}} & \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3. Пошук матриці A_m, де $m = \overline{2, N}$, поки не знайдемо таке $m_{кр}$, за якого виконується рівність:

$$\det A_m \le 0.1 \det A_1 .$$

Елементи матриці A_1 знаходяться за формулою (4.43).

2. Знаходження матриць A та B здійснюється за формулами:

$$a_{ij} = \sum_{k=m_{кр.}}^{N-2*m_{кр.}} \sum_{l=-m_{кр.}}^{m_{кр.}} \eta(l)\left[x_i(k) \cdot x_j(k+l) + x_i(k+l) \cdot x_j(k)\right], \quad (4.44)$$

$$b_j = \sum_{k=m_{кр.}}^{N-2*m_{кр.}} \sum_{l=-m_{кр.}}^{m_{кр.}} \eta(l)\left[y(k+l) \cdot x_j(k) + y(k) \cdot x_j(k+l)\right]. \quad (4.45)$$

В результаті маємо отримати матрицю A розмірності $(n+1)\times(n+1)$ та матрицю B, що є вектор-стовпець розмірності $(n+1)$.

3. Оцінка параметрів $\hat{\beta}$ моделі (2.1) є розв'язком матричного рівняння $A \cdot \hat{\beta} = B$, тобто $\hat{\beta} = A^{-1} \times B$.

Алгоритм ІМНК (рис. 4.2 а) являє собою послідовне обчислення $m_{кр}$ (рис. 4.2 б) та матриць A і B (відповідно рис. 4.3 а, 4.3 б).

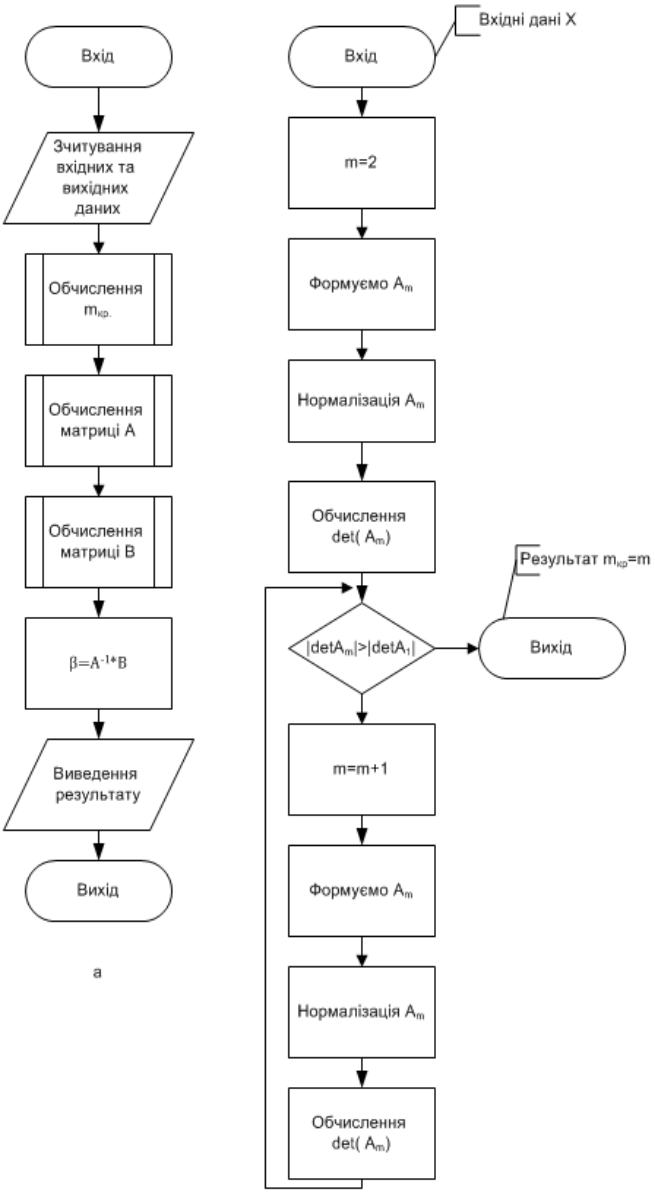


Рис. 4.2. Блок-схема алгоритму

а – методу ІМНК; б – функція знаходження $m_{кр}$

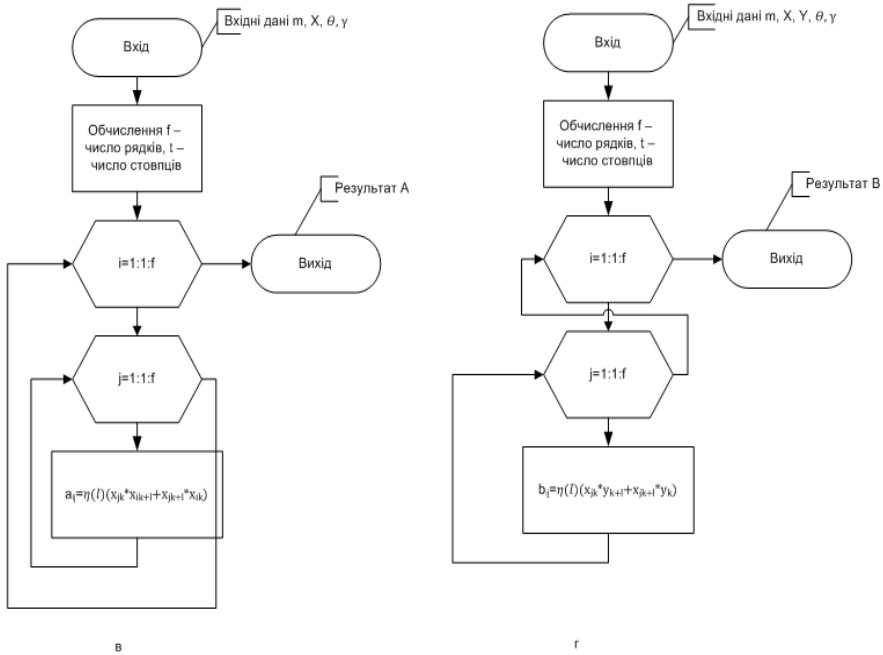


Рис. 4.3 – Блок-схема алгоритму
а – функція обчислення матриці А; б – функція обчислення матриці В.

4.3.7 Приклад тестування методу ІМНК

Розглянемо лінійну багатофакторну модель $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n$.

Для тестування методу ІМНК згенеруємо множину вхідних та вихідних значень моделі заданої функцією (4.46) для 10 експериментів, які представлені в таблиці 4.1. На вхідні та вихідні значення проектованої моделі накладемо білий шум, прикладом якого є випадкові числа з діапазону $[-1;1]$ з рівномірним розподілом.

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + e_y, \qquad (4.46)$$

де $\beta_0 = 0, \beta_1 = \beta_2 = 1;\ t = k \cdot \Delta t\ (k = \overline{1, N})$;

$\Delta t = \dfrac{T}{1000}$;

$x_1(t) = \sin \omega t + e_{x1}$;

$x_2(t) = \sin(\omega t + \varphi) + e_{x2}$;

$\omega = \frac{2\pi}{T}$;

$\varphi \approx 30^\circ$.

e_{x1}, e_{x2}, e_y – випадкові числа з діапазону $[-1;1]$ з рівномірним розподілом.

Таблиця 4.1

Значення вхідних та вихідних значень

№	x_1	x_2	y
1.	-0,9438	-0,2901	-1,23305
2.	0,72135	0,60548	1,29894
3.	-0,9154	-0,1151	-1,00631
4.	0,64704	-0,149	0,48419
5.	-0,7017	0,19377	-0,52352
6.	0,25831	-0,117	0,15577
7.	0,25434	0,93337	1,15011
8.	0,53885	1,1005	1,62137
9.	-0,5241	1,07417	0,57768
10.	-0,3195	0,45229	0,06318

Застосуємо для вибірки (таб. 6.1) метод ІМНК та МНК для порівняння оцінок параметрів.

Для застосування методу ІМНК використовується програмне забезпечення розроблене згідно алгоритму ІМНК. Результати виконання представлено на рис. 4.4.

Коефіцієнти вагової функції було обрано з врахуванням типу шуму, оскільки згладжування при білому шумі і коефіцієнтах $\theta = -2,\ \gamma = 0.01$ буде максимальним. Графік вагової функції $\eta(l, \theta, \gamma)$ представлено на рис. 4.5.

x1	x2	y	
-0.9437670306619677	-0.2901146728183978 7	-1.233050583019 14	m=4
0.7213548044620115	0.6054816213063348	1.298938440302521 7	Beta:
-0.9154187996298442	-0.1151019479044296 2	-1.006307418856112 7	1.0067626985605282
0.6470425018460264	-0.1490448870080073 3	0.484189123151666	0.9737093928167815
-0.7017077740354474	0.1937660424957834 4	-0.523519215069378	T:
0.2583118125747699	-0.1169656342650126 3	0.155765317405823 6	2.380479444189279
0.2543357676966742	0.9333727881231373	1.150113660942768 1	2.530496530103026
0.5388526806619363	1.1004970537488101	1.621368907086165	y середнє=0.25883579794613815
-0.5240647819942206	1.0741720228259921	0.577675988586911 4	чисельник=4.186212387901375
-0.3194733962374851	0.4522876012569555	0.063183558950162 67	Знаменник=0.0012187806260002356
			F=3434.7546216250453

Рис. 4.4. Результати ідентифікації моделі за методом ІМНК

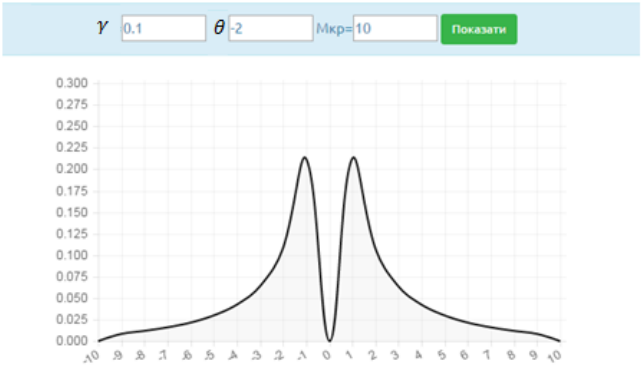


Рис. 4.5. – Графік вагової функції $\eta(l,-2,0.1)$

В результаті проведених обчислень отримано наступні оцінки параметрів за методом ІМНК: $\hat{\beta}_0 = 0$; $\hat{\beta}_1 = 1.006762$; $\hat{\beta}_2 = 0.973709$.

Отже, згідно обчислених оцінок параметрів моделі за допомогою ІМНК отримали модель:

$$\hat{y}(t) = 1.006762 \cdot x_1(t) + 0.973709 \cdot x_2(t) \qquad (4.47)$$

Для застосування методу МНК використаємо додаток Analysis Tools Park у середовищі MS Excel (рис. 4.6).

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,999587758
R-квадрат	0,999175685
Нормированный R-квадрат	0,998940167
Стандартная ошибка	0,031399527
Наблюдения	10

Дисперсионный анализ

	df	SS	MS	F	Значимость F
Регрессия	2	8,365523264	4,182761632	4242,451539	1,60815E-11
Остаток	7	0,006901512	0,00098593		
Итого	9	8,372424776			

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%	Нижние 95,0%	Верхние 95,0%
Y-пересечение	-0,009602162	0,012921837	-0,743095765	0,481612949	-0,04015745	0,020953126	-0,04015745	0,020953126
Переменная X 1	0,986785768	0,016907519	58,36372378	1,13763E-10	0,946805839	1,026765698	0,946805839	1,026765698
Переменная X 2	0,991208451	0,020535241	48,26865468	4,28613E-10	0,942650322	1,039766579	0,942650322	1,039766579

Рис. 4.6. – Результати ідентифікації моделі за методом МНК

В результаті застосування методу МНК в середовищі MS Excel, отримали наступні оцінки моделі: $\hat{\beta}_0 = -0.0096$; $\hat{\beta}_1 = 0.986785$; $\hat{\beta}_2 = 0.991208$.

Згідно розрахунків методом МНК отримали модель:

$$\hat{y}(t) = -0.96 + 0.986785 \cdot x_1(t) + 0.991208 \cdot x_2(t) \qquad (4.48)$$

Виконаємо дослідження побудованої моделі. Результати розрахунків дослідження побудованих моделей методами ІМНК та МНК наведено в таблиці 4.2 та таблиці 4.3 відповідно.

1. Перевірка правильності виконаних розрахунків.

Правильність розрахунків можна перевірити, порівнюючи середні значення y та $\hat{y}$.

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{10} = 0.26;$$

$$\overline{\hat{y}_{IMHK}} = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{10} = 0.26;$$

$$\overline{\hat{y}_{MHK}} = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{10} = 0.26.$$

З проведених розрахунків видно, що середні значення $\overline{\hat{y}_{ІМНК}}$, $\overline{\hat{y}_{МНК}}$ та $\bar{y}$ рівні між собою, що свідчить правильність проведених розрахунків.

Таблиця 42

Результати розрахунків дослідження методом ІМНК

№	y_i	$\hat{y}_i$	e_i	e_i^2	$\hat{y}_i - \bar{y}$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
1.	-1,235	-1,233	0,000	0,000	-1,49	2,224	-1,492	2,2257
2.	1,2984	1,316	-0,017	-0,017	1,06	1,117	1,040	1,0818
3.	-1,001	-1,034	0,027	0,027	-1,29	1,671	-1,265	1,6006
4.	0,4849	0,506	-0,022	-0,022	0,25	0,061	0,225	0,0508
5.	-0,552	-0,518	-0,006	-0,006	-0,78	0,603	-0,782	0,6121
6.	0,1557	0,146	0,010	0,010	-0,11	0,013	-0,103	0,0106
7.	1,1501	1,165	-0,015	-0,015	0,91	0,821	0,891	0,7944
8.	1,6217	1,614	0,007	0,007	1,36	1,837	1,363	1,8565
9.	0,5778	0,518	0,059	0,059	0,26	0,067	0,319	0,1017
10.	0,0638	0,119	-0,056	-0,056	-0,14	0,020	-0,196	0,0383
Σ	2,59	2,60	-0,001	0,009	-	8,434	-	8,372

Таблиця 4.3

Результати розрахунків дослідження методом МНК

№	y_i	$\hat{y}_i$	e_i	e_i^2	$\hat{y}_i - \bar{y}$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
	-1,23305	-1,228	-0,0046	0,000021	-1,49	2,212	-1,492	2,2257
2.	1,29894	1,302	-0,0034	0,000012	1,04	1,089	1,040	1,0818
3.	-1,00631	-1,027	0,0207	0,000429	-1,29	1,653	-1,265	1,6006
4.	0,48419	0,481	0,0030	0,000009	0,22	0,049	0,225	0,0508
5.	-0,52352	-0,510	-0,0135	0,000183	-0,77	0,591	-0,782	0,6121
6.	0,15577	0,129	0,0264	0,000698	-0,13	0,017	-0,103	0,0106
7.	1,15011	1,167	-0,0164	0,000270	0,91	0,824	0,891	0,7944
8.	1,62137	1,613	0,0084	0,000071	1,35	1,834	1,363	1,8565
9.	0,57768	0,538	0,0397	0,001575	0,28	0,078	0,319	0,1017
10.	0,06318	0,123	-0,0603	0,003633	-0,14	0,018	-0,196	0,0383
Σ	2,59	2,60	0	0,0069	-	8,365	-	8,372

2. Обчислення залишків моделей та їх середнього значення:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

Середнє значення $e_{IMHK} \approx 0$, $e_{MHK} \approx 0$, що свідчить про адекватність моделі побудованої за методами ІМНК та МНК.

3. Обчислення коефіцієнта детермінації R^2 та кореляції R.

Коефіцієнт детермінації показує, яка частка загальної варіації результативної ознаки визначається досліджуваним фактором:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N} e_i^2}{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2},$$

$$R^1_{IMHK} = 1 - \frac{0.008531}{8.372425} = 0.9989,$$

$$R^2_{MHK} = 1 - \frac{0.006902}{8.372425} = 0.9991.$$

Відповідно,

$$R^2 = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{N} e_i^2}{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2}},$$

$$R_{IMHK} = 0.9994,$$

$$R_{MHK} = 0.9995.$$

З проведених розрахунків можна зробити висновок про щільний взаємозв'язок між показниками і факторами моделі за методами ІМНКта МНК.

4. Перевірка статистичної значущості отриманих результатів.

4.1 Перевірка адекватності моделі за критерієм Фішера здійснюється за формулою:

$$F = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}{n}}{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y}_i)^2}{N-n-1}}.$$

За таблицею Фішера знаходимо критичне значення $F_{кр.}$ з n та $(N-n-1)$ ступенями вільності, задавши рівень довіри $(1-\alpha)\cdot 100\%$ (як правило $\alpha = 0.05$).

Якщо $F > F_{кр.}$, то модель адекватна. Якщо модель не адекватна, то необхідно повернутися до етапу побудови моделі і, можливо, ввести додаткові фактори або перейти до нелінійної моделі.

Згідно проведених обчислень:

$$F_{ІМНК} = 3434.75,$$

$$F_{ІМНК} = 4242.45.$$

Табличне значення $F_{табл.} = 19.35$, очевидно, що обчислені значення значно перевищують табличне, що свідчить про адекватність побудованих моделей (4.47) та (4.48).

4.2 Перевірка значущості коефіцієнтів рівняння регресії здійснюється за критерієм Стьюдента за формулою:

$$t_i = \frac{|\beta_i|}{\sigma_e^2 \cdot c_{ii}},$$

де $\sigma_\varepsilon^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}\left(y_j - \hat{y}_j\right)^2$;

c_{ii} – діагональний елемент матриці $\left(X^T X\right)^{-1}$.

Розраховані значення за методом ІМНК:

$t_{\beta_1} = 2.3804,$

$t_{\beta 2} = 2.5304.$

Розраховані значення за методом МНК:

$t_{\beta 0} = -0.7430,$

$t_{\beta_1} = 58.3637$,

$t_{\beta 2} = 48.2686$.

Табличне значення для рівня значимості $p = 0.05$ та ступенів вільності 10 дорівнює $t_{табл.} = 2.22$.

Оскільки розраховані значення t_{β_1} та t_{β_2} для методів ІМНК та МНК більші за табличне $t_{табл.}$, то можна стверджувати про статистичну значимість коефіцієнтів β_1 та β_2 і істотний вплив на узагальнюючий показник. Враховуючи, що $t_{табл.} > t_{\beta_0}$ коефіцієнт β_0 можна вважати не значимим для моделі (4.48).

Висновок: Виходячи із проведених розрахунків та розглянутого прикладу, можна зробити висновок про ефективність використання інтегрованого методу найменших квадратів для оцінки параметрів моделі, заданоїзашумленими вхідними та вихідними даними. Правильність розрахунків, адекватність моделі та значимість обчислених коефіцієнтів підтверджено методами статистичного аналізу.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. *За яких умов буде ефективним ІМНК?*
2. *Чим обмежується зсув $\pm\tau$ сигналів в ІМНК?*
3. *Чому симетричний зсув краще за односторонній?*
4. *Поясніть виведення формул зсуву і коваріації ІМНК-оцінок.*
5. *Чи буде різниця між ІМНК-оцінками в звичайному і рекурентному алгоритмі при великих вибірках?*
6. *Яким умовам повинна задовольняти вагова функція $\eta(m)$ в ІМНК?*
7. *Як слід змінювати параметри γ і θ вагової функції залежно від довжин кореляції сигналів і шумів?*
8. *Назвіть алгоритм методу ІМНК.*

4.4. Метод адаптивного одноразового ділення (МОД)

4.4.1. Сутність методу

Даний метод можна розглядати як метод допоміжних змінних, в якому допоміжна змінна

$$U = \begin{bmatrix} u_1(1)u_2(1)\ldots u_n(1) \\ u_1(M)u_2(M)\ldots u_n(M) \end{bmatrix} \tag{4.49}$$

має такий вигляд

$$u_{ij} = \begin{cases} x_i^{-1}(j), \left|x_i^{-1}(j)\right| \geq \Delta_i; \\ 0, \left|x_i^{-1}(j)\right| < \Delta_i, \; j = \overline{1, M}, \Delta_i > 0. \end{cases}$$

Система функцій $\left\{x_i^{-1}(j)\right\}$ лінійно незалежна, так як за умовою $\left\{x_i(j)\right\}$ лінійно незалежна.

Згідно з методом допоміжних змінних, існує оцінка $\hat{\beta}$, яка може бути знайдена з рівняння

$$U^{\mathrm{T}}Y = U^{\mathrm{T}}X\hat{\beta},$$

$$\hat{\beta} = (U^{\mathrm{T}}X)^{-1}U^{\mathrm{T}}Y, \tag{4.50}$$

де

$$U^{\mathrm{T}}X = \begin{bmatrix} M & \sum\limits_{k=1}^{M} x_2(k)x_1^{-1}(k) & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{M} x_n(k)x_1^{-1}(k) \\ \sum\limits_{k=1}^{M} x_1(k)x_2^{-1}(k) & M & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{M} x_n(k)x_2^{-1}(k) \\ \sum\limits_{k=1}^{M} x_1(k)x_n^{-1}(k) & \sum\limits_{k=1}^{M} x_2(k)x^{-1}(k) & \cdots & M \end{bmatrix},$$

$$U^{\mathrm{T}}Y = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^{M} y(k)\, x_1^{-1}(k) \\ \sum_{k=1}^{M} y(k)\, x_2^{-1}(k) \\ \cdots \\ \sum_{k=1}^{M} y(k)\, x_n^{-1}(k) \end{vmatrix}$$

і розглядається множина M відліків k, у яких виконується умова:

$$\left| x_j^{-1}(j) \right| \geq \Delta_i .$$

4.4.2. Зміщення оцінок

Якщо перешкоди N_i не корелюють між собою, а також з X^*, Y^* і малі, то, вважаючи наближено

$$x_i^{-1}(j) = x_i^{*-1}(j) - N_i(j),$$

неважко отримати, що оцінка $\hat{\beta}$ для точної структури моделі, коли $\varepsilon^* = 0$, буде незміщеною, оскільки $M\left\{U^{\mathrm{T}}X\right\} = U^{\mathrm{T}*}X^*$, $M\left\{U^{\mathrm{T}}Y\right\} = U^{\mathrm{T}*}Y^*$. Зміщення може мати місце, якщо $\varepsilon^* \neq 0$. При цьому

$$\delta\hat{\beta} = (U^{*\mathrm{T}}X^*)^{-1}U^{*\mathrm{T}}\varepsilon^*, \qquad (4.51)$$

так як з умови $X^{*\mathrm{T}}\varepsilon^* = 0$ в загальному випадку не випливає умова $U^{*\mathrm{T}}\varepsilon^* = 0$, хоча U^* та X^* зв'язані співвідношенням (4.49). Зміщення (4.51) менше зміщення оцінок МНК через перешкоди N_i в X, якщо вплив $\varepsilon^* \neq 0$ з формули (4.51) менше впливу перешкод N на зміщення оцінок МНК.

4.4.3. Коваріація оцінок (4.50)

$$\operatorname{cov}\left[\hat{\beta}\right] = M\left\{\left[\hat{\beta} - M\left\{\hat{\beta}\right\}\right]\left[\hat{\beta} - M\left\{\hat{\beta}\right\}\right]^{\mathrm{T}}\right\}.$$

Вважаючи некорельованість випадкових похибок у $\left(U^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}$ і $\left(U^{\mathrm{T}}Y\right)$ розкладаючи (4.50) у ряд

$$\hat{\beta} \approx M\left\{\hat{\beta}\right\} + \left[\delta\left(U^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}\right]\left[U^{*\mathrm{T}}Y^{*}\right] + \left(U^{*\mathrm{T}}X^{*}\right)^{-1}\left[\delta U^{\mathrm{T}}Y^{*} + U^{*\mathrm{T}}\tilde{\varepsilon}\right],$$

отримаємо

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}[\beta] &= M\left[\left[\delta(U^{\mathrm{T}}X^{-1}\right]\left[U^{*\mathrm{T}}Y^{*}\right] + \left(U^{*T}X^{*}\right)^{-1}\left[\delta U^{\mathrm{T}}Y^{*} + U^{*\mathrm{T}}\tilde{\varepsilon}\right]\right]\times \\
&\times\left[\left[\delta\left(U^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}\right]\left[U^{*\mathrm{T}}Y^{*}\right] + \left(U^{*\mathrm{T}}X^{*}\right)^{-1}\right]\left[\delta U^{\mathrm{T}}Y^{*} + U^{*\mathrm{T}}\tilde{\varepsilon}\right]^{\mathrm{T}} = \\
&= M\left\{\left[\delta\left(U^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}\right]\left[\left[U^{*\mathrm{T}}Y^{*}\right]\right]\left(U^{*\mathrm{T}}Y^{*}\right)\right]^{\mathrm{T}}\left[\delta\left(U^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}\right]^{\mathrm{T}}\right\} + \qquad (4.52) \\
&+\left[U^{*\mathrm{T}}X^{*}\right]^{-1}Y^{*\mathrm{T}}M\left\{\delta U\delta U^{\mathrm{T}}\right\}\left[\left(U^{*\mathrm{T}}X^{*}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{-1}Y^{*} + \\
&+\left[U^{*\mathrm{T}}X^{*}\right]^{-1}U^{*\mathrm{T}}M\left\{\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\right\}\left[\left(U^{*\mathrm{T}}X^{*}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{-1}U^{*},
\end{aligned}$$

де перший і другий компоненти залежать від порогів Δ_i у (4.49) і від шумів N в X, а третій — від шумів у Y. При зменшенні порога Δ до нуля перший компонент (як і в МНК, яка залежить від N) прямує до нуля, оскільки при $\Delta \to 0$ можуть існувати точки k, у яких $u_i(k) \to \infty$, а отже, $\left\|\left(U^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}\right\| \to 0$. При $\Delta \to 0, u \to 0$, $\left(U^{\mathrm{T}}X\right)^{-1} \to 0$, тобто перший компонент при зменшенні Δ спадає. Другий компонент (4.52) пропорційний коваріаційній матриці $M\left\{\delta U\delta U^{\mathrm{T}}\right\}$ і при $\Delta \to 0$ прямує до нескінченості, а при $\Delta \to \infty$ — до нуля. Третій компонент від Δ не залежить. Отже, для конкретних умов існує оптимальний вектор порогів $\Delta^{*}, \Delta_i^{*}, i = \overline{1,n}$, за якого норма коваріації мінімальна.

Якщо перешкоди $N_i, \tilde{\varepsilon}$ некорельовані, а $\varepsilon^{*} \to 0$, то оцінка (4.50) буде незміщеною. Ефективність оцінок оптимізується в БАСІ за основним показником I_{qk} шляхом підбору вектора Δ.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. *В чому полягає ідея МОД?*
2. *Як вплине поріг* Δ_i *в МОД на зміщення і дисперсію оцінок параметрів ММ?*
3. *Чому* $\Delta_i > 0$ *?*
4. *Які допущення зроблено для наближеного виведення зміщення і дисперсії МОД-оцінок параметрів ММ?*

4.5. Метод прогнозу кореляцій

Постановка задачі така ж, як і в попередньому методі: сигнали X^*, Y^* гладкі, перешкоди ε, N взаємонекорельовані, нормовані кореляційні функції перешкод затухають швидше, ніж відповідні функції сигналів X^*, Y^*; за зашумленими вибірками X, Y треба отримати оцінку $\hat{\beta}$, близьку до оцінки МНК для точних даних.

Згідно з МНК,

$$\hat{\beta} = \left(X^{\mathrm{T}} X\right)^{-1} X^{\mathrm{T}} Y = A^{-1} B, \tag{4.53}$$

де $A = \left[a_{ij}\right]_{i=1}^{n}$, B — вектор-стовпчик скалярних добутків $\left(y(k), x_i(k)\right)$, $k = \overline{1, M}$.

Коефіцієнти a_{ij} можна подати як відповідні кореляційні функції при нульовому зсуві змінних:

$$a_{ij} = MR_{x_i x_j}(0);\ b_i = MR_{yx_i}(0).$$

Відповідно для зсуву m маємо

$$a_{ij}^{(m)} = MR_{x_i x_j}(m);\ b_i^{(m)} = MR_{yx_i}(m).$$

Нехай $R_{x_i x_i}(\tau) = R^*_{x_i x_i}(\tau) + \delta R_{x_i x_i}(\tau), 0 < \tau < r + m,$ де $\delta R_{x_i x_i}$ — похибка, переважно пов'язана з шумами N_i у вимірах x_i.

Покладемо в інтервалі $[m, rm]$ лінійну модель автокореляції

$$\hat{R}_{x_i x_i}(\tau) = \alpha_0 + \alpha_1\left(\tau - \tau_{\mathrm{ср}}\right). \tag{4.54}$$

Тоді як оцінки коефіцієнтів a_{ij} в формулі (4.53) візьмемо прогнозні в точку $k = 0$ оцінки рівняння (4.54) кореляційних функцій, побудованих на інтервалі $[m, rm]$, де кореляція перешкод майже відсутня:

$$\hat{\alpha}_{ii} = M\hat{R}_{x_i x_i}(0) = \alpha_{0i};\ a_{ij} = MR_{x_j x_j}(0), i \neq j;\ b_i = MR_{yx_i}(0). \quad (4.55)$$

У рівнянні (4.54) моделі $\hat{R}_{x_i x_i}$

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{1}{r+1}\sum_{k=m}^{r+m}\tau_k;\ \alpha_0 = \frac{1}{r+1}\sum_{k=m}^{r=m}R_{x_i x_i}(\tau_k);$$

$$\alpha_{1i} = \sum_{i=m}^{r+m}\left(\tau_k - \tau_{\text{ср}}\right)R_{x_i x_i}(\tau_k) / \sum_{k=m}^{r+m}(\tau_k - \tau_{\text{ср}})^2.$$

Тоді (4.53) і (4.55) визначають $\hat{\beta}_{\text{МПК}}$ — оцінку за даним методом — методом прогнозу кореляцій (МПК).

Позначимо $\alpha_{ii} - \hat{\alpha}_{ii} = \delta a_{ii}, \delta A = [\delta\alpha_{ii}]_{i=1}^{n}$ — вектор-стовпчик;

$E\delta\alpha = \delta A_{\text{МПК}},\ A = A^* + \delta A_{\text{МПК}},$ де через A^* позначено матрицю A для МНК за відсутності шумів.

Використовуючи розкладання в ряд Тейлора, загалом отримаємо

$$\delta B = \left(A^* + \delta A\right)^{-1} B^* - A^{*-1}B^* \approx$$

$$\approx A^{*-1}B^* - \left(A^{*-1}\right)^2 \delta A B^* - A^{*-1}B^* =$$

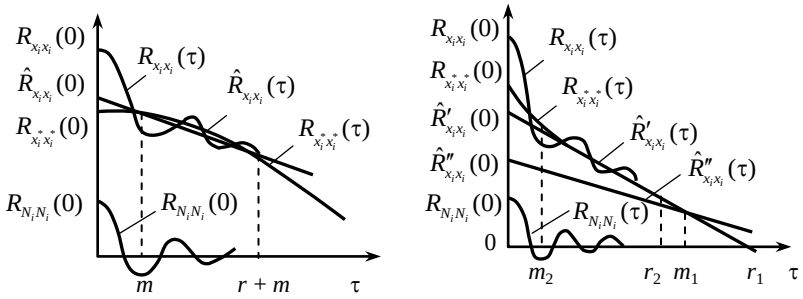
$$= -A^{*-1}\delta A A^{*-1}B^* = -A^{*-1}\delta A\beta^*.$$

Розглянемо два випадки:

1) на рис. 4.7, *а* $\hat{R}_{x_i^* x_i^*}(\tau), \tau \in [0, r+m]$ — опукла функція. Тоді $\alpha_{ii} > \hat{\alpha}_{ii},\ \delta A_{\text{МНК}} > A_{\text{МПК}}$. Отже, $\|\delta\beta_{\text{МПК}}\| < \|\delta\beta_{\text{МНК}}\|$;

2) на рис. 4.7, б $R_{x_i^* x_i^*}(\tau)$ — увігнута функція. Підбором інтервалу (m, r) можна досягнути аналогічного результату і в цьому випадку. Із рис. 4.7 видно, що інтервал (m_2, r_2) задовольняє ці вимоги на відміну від інтервалу (m_1, r_1). Отже, і в цьому випадку можна отримати менший зсув. Для опису $R_{x^* x^*}(\tau)$ можуть

застосовуватися ортогональні системи функцій та інші види моделей. У системах типу БАСІ структура і параметри $R(\tau)$ можуть вибиратися за головним показником I_{qk}. Метод передбачає згладжування і прогнозування у точці $\tau = 0$ кореляційних функцій від сигналів $x_i(t), x_j(t)$. Аналізуючи дисперсії цих оцінок кореляцій, легко переконатися, що $\sigma^2_{\delta R}$ тим більше, чим менша довжина вибірки Т.



а *б*

Рис. 4.7. Графік лінійної екстраполяції опуклої (*а*) і увігнутої (*б*) кореляційних функцій

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. Яким чином в методі прогнозу кореляцій (МПК) досягається зменшення зміщення і дисперсії МПК-оцінок параметрів ММ?

4.6. Приклад побудови прогнозних моделей системою ідентифікації типу БАСІ

Показники економіки як функції часу, можуть мати найрізноманітнішу структуру, довжину ряду, точність, тип прихованої закономірності розвитку (зміни) у часі, кроку у часі, інтервалу прогнозу тощо.

Елементи, з яких складається модель часового ряду, можуть бути аналітичними функціями часу t (степеневі: $t^i, -\infty < i < \infty$; періодичні тригонометричні: $\sin(wt+\varphi)$; комбіновані та інші функції $f(t)$ часу або затриманими у часі t значеннями самого ряду $y(t)$ $\left(y\left(t-\tau\right)\right), 0 \le \tau \le t_1$, де t_1 — кінцеве значення часу. Як правило, час t зображено дискетами t_k, k = 0, 1, 2,… не завжди з рівномірним кроком Δt.

У випадку невідомої структури моделі ряду, перебираючи різні варіанти структур, побудованих на вказаних елементах, можна в БАСІ-системі підібрати найкращу структуру (за основним критерієм I — критерієм точності прогнозу). Моделі зі степеневими елементами, як правило, краще використовувати для коротких рядів, а авторегресійні — для довгих (де не так сильно впливає невизначеність початкових умов).

Показник I точності прогнозу, який фізично реалізується, зобразимо зваженою сумою часткових показників $I_i\left(i=1,2,3\right)$, що відповідають за якість окремих властивостей моделі ряду. Показник I_1:

$$I_i = \frac{1}{n} tr\left[\operatorname{diag} \frac{\left|\hat{\beta}_i^{\text{П}} - \hat{\beta}_i^{\text{Н}}\right|}{\left|\hat{\beta}_i\right|} \right], i = \overline{1,n},$$

де $\hat{\beta}_i^{\text{П}}$, $\hat{\beta}_i^{\text{Н}}$, $\hat{\beta}_i$ — оцінки i-го параметра моделі, отримані за вибіркою парних, непарних та всіх дискретів k часу t_k, це так званий параметричний показник регулярності.

Показник I_2:

$$I_2 = \left(\varepsilon^{\text{T}}\varepsilon\right)\left(x^t x\right)^{-1},$$

$$\varepsilon^{\text{T}} = \left[\varepsilon(1),\ldots,\varepsilon(M)\right], \hat{x}^{\text{T}} = \left[\hat{x}(1),\ldots,\hat{x}(M)\right], \qquad (4.56)$$

де $\varepsilon(k)$ — похибки апроксимації сигналу $x(k)$ відповідною моделлю в k-й точці ряду, це так званий показник незміщеності або точності моделювання ряду моделлю.

Показник I_3:

$$I_3 = \left|1-K\right|,$$

$$K = \frac{\sum_{i=1}^{L} \eta_i \left| x(M-i)\hat{x}(M-i) \right|}{\sum_{i=1}^{L} \eta_i \left| x(M-i) \right| \cdot \sum_{i=1}^{L} \eta_i \left| \hat{x}(M-i) \right|}. \qquad (4.57)$$

Тут η_i — коефіцієнт розподілу бажаної точності прогнозу за L останніми точками вибірки $x(k)$, $k = \overline{1, M}$; $\sum_{i=1}^{L} \eta_i = 1$; $\hat{x}(M-i)$ — прогнозні значення, отримані з моделі, побудованої на скороченій на L останніх точок вибірки $k = \overline{1, M-L}$.

Оскільки вважається, що прогнозований ряд $x(k)$ складається з прихованої детермінованої гладкої у часі складової і випадкової складової, близької до гауссівського шуму, то у варіаційному ряді упорядкованих за складністю (мірності вектора β), показник I_1 збільшується тоді, як показник I_2 зі зростанням n зменшується. Залежно від мети ідентифікації варіюються коефіцієнти ваги g_i зваженої суми показників:

$$I = \sum_{i=1}^{3} g_i I_i, \ \sum_{i=1}^{3} g_i = 1, \ g \geq 0. \qquad (4.58)$$

Для задачі контролю параметрів β_i моделі відомої структури максимальна вага g_1; для задачі точної апроксимації ряду $x(k)$ моделлю $\hat{x}(k)$ — g_2; для задачі прогнозу — g_3. Сукупність показників I_1, I_2, I_3 забезпечує компроміс між стабільністю оцінок моделі, точністю $\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon$ апроксимації та точністю прогнозу.

На конкретному прикладі реального часового ряду, що має 43 дискрети $x(k)$ з рівномірним кроком $\Delta t = 4$ місяці (один з показників у енергетиці України) (табл. 4.4).

Таблиця 4.4

Залежність *x* від *k*

k	*x*	*k*	*x*	*k*	*x*	*k*	*x*
1	10550	12	13600	23	59250	34	57800
2	47070	13	14550	24	16850	35	49630
3	47350	14	49900	25	17830	36	18780
4	11500	15	56750	26	54800	37	16000
5	10900	16	16050	27	50700	38	53950
6	54700	17	14680	28	14150	39	57500
7	50000	18	59300	29	13550	40	22000
8	14320	19	57700	30	47430	41	19650

9	12900	20	15500	31	56350	42	59900
10	51650	21	13350	32	19450	43	57550
11	50740	22	55600	33	17600		

Розглянемо розв'язання задачі прогнозу $x(k)$, на шести останніх точках, вважаючи їх невідомими.

Така постановка задачі дозволяє реалізувати $k=\overline{1,37}$, фізично не реалізований при прогнозі в майбутнє, об'єктивний показник I відносної точності прогнозу на ці шість точок:

$$I=\frac{\left[\varepsilon(38),\ldots,\varepsilon(43)\right]\left[\varepsilon(38),\ldots,\varepsilon(43)\right]^{\mathrm{T}}}{\left[x(38),\ldots,x(43)\right]\left[x(38),\ldots,x(43)\right]^{\mathrm{T}}}, \qquad (4.59)$$

тобто відносне середньоквадратичне відхилення $\varepsilon(k)=\hat{x}(k)-x(k),\quad k=\overline{38,43}$ прогнозованих значень $\hat{x}(k)$ від відомих $x(k)$. У критерії (4.57) взято $\eta_i=\frac{1}{L}=\frac{1}{6}$. Коефіцієнти ваги g_i в узагальненому критерії (4.58) прийнято такими: $g_1=0{,}9$; $g_2=0{,}4$; $g_3=0{,}4$. Середнє значення ряду 35 100, середньоквадратичне відхилення ряду від середнього — 19 550, коефіцієнт варіації — 0,55. Наведеному у табл. 4.4 ряду в БАСІ відповідали різні математичні моделі:

1) *моделі у вигляді степеневого полінома (від дискретів k часу) з цілими, дробовими, додатними та від'ємними показниками степеня*:

$$\hat{x}(k)=\beta_0+\beta_1 k; \qquad (4.60)$$

$$\hat{x}(k)=\beta_0+\beta_1 k+\beta_2 k^2; \qquad (4.61)$$

$$\hat{x}(k)=\beta_0+\beta_1 k+\beta_2 k^2+\beta_3 k^3; \qquad (4.62)$$

$$\hat{x}(k)=\beta_0+\beta_1 k^{\frac{1}{4}}+\beta_2 k^{\frac{1}{3}}+\beta_3 k^{\frac{1}{2}}+\beta_4 k^{\frac{3}{2}}; \qquad (4.63)$$

$$\hat{x}(k)=\beta_0+\beta_1 k+\beta_2 k^{-1}+\beta_3 k^{-3}; \qquad (4.64)$$

2) *моделі авторегресії від k із постійним та змінним кроком*:

$$\hat{x}(k)=\beta_0+\beta_1 x(k-1); \qquad (4.65)$$

$$\hat{x}(k)=\beta_0+\beta_1 x(k-1)+\beta_2 x(k-2); \qquad (4.66)$$

$$\hat{x}(k)=\beta_0+\beta_1 x(k-1)+\beta_2 x(k-2)+\beta_3 x(k-3); \quad (4.67)$$

$$\hat{x}(k)=\beta_0+\beta_1 x(k-4); \quad (4.68)$$

$$\hat{x}(k)=\beta_0+\beta_1 x(k-1)+\beta_2 x(k-2)+\beta_3 x(k-3)+\beta_4 x(k-4); \quad (4.69)$$

$$\hat{x}(k)=\beta_0+\beta_1 x(k-1)+\beta_2 x(k-4); \quad (4.70)$$

$$\hat{x}(k)=\beta_0+\beta_1 x(k-1)+\beta_2 x(k-4)+\beta_3 x(k-8), \quad (4.71)$$

3) *комбіновані поліноміально-авторегресійні моделі,* які виявила БАСІ як інтелектуальна система в процесі ідентифікації багатьох часових рядів:

$$\hat{x}(k)=\beta_0+\beta_1 k+\beta_2 x(k-1); \quad (4.72)$$

$$\hat{x}(k)=\beta_0+\beta_1 k+\beta_2 x(k-1); \quad (4.73)$$

$$\hat{x}(k)=\beta_0+\beta_1 k+\beta_2 x(k-4); \quad (4.74)$$

$$\hat{x}(k)=\beta_0+\beta_1 k+\beta_2 x(k-1)+\beta_3 x(k-4).$$

На множині структур (4.60)–(4.74) моделей часового ряду (табл. 4.4) та множині методів (МНК, ІМНК, УМНК, МОД) було перевірено ефективність використання фізично реалізованого критерію (4.58) щодо його близькості до фізично не реалізованого критерію (4.60). Під ефективністю розумілася правильність вибору найкращого за фізично не реалізованим критерієм (4.60) методу, вибраного за фізично реалізованим критерієм (4.59).

Результати числового моделювання в 15 рядках подано в табл. 4.4 в стовпчиках:

1 – типи моделей (степеневі, авторегресійні, комбіновані);

2 – відносна середньоквадратична похибка моделювання ряду відповідною моделлю на $k=\overline{1,3,7}$ при ідентифікації її за МНК;

3 – значення фізично не реалізованого ідеального критерію (4.60) за МНК;

4 – фізично реалізований критерій (4.59) при ідентифікації моделі за МНК;

5 – найкращий за критерієм (4.59) метод ідентифікації для відповідної до рядка моделі;

6 – значення ідеального критерію (4.60) для вибраного за реальним критерієм (4.59) методом для відповідної до рядка моделі;

7 – значення критерію (4.59) для вибраного за ним найкращого методу ідентифікації для відповідної до рядка моделі;

8 – найкращий за ідеальним критерієм (4.60) метод ідентифікації відповідної до рядка моделі;

9 – значення ідеального критерію (4.60) для найкращого за ним методом ідентифікації моделі відповідного рядка;

10 – значення реального критерію (4.59) для найкращого за критерієм (4.60) методом ідентифікації моделі відповідного рядка;

11 – коефіцієнт ефективності БАСІ-системи.

Таблиця 4.5

Результати моделювання

№ з/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	10,89	0,49	0,47	0,25	УМНК	0,41	0,242	МОД	0,363	0,26	1,3
2	10,90	0,484	0,593	0,26	ІМНК	0,415	0,223	ІМНК	0,415	0,223	1,43
3	10,91	0,476	0,883	0,41	ІМНК	0,38	0,2	ІМНК	0,38	0,2	2,32
4	10,92	0,485	0,593	0,27	УМНК	0,43	0,226	ІМНК	0,365	0,235	1,62
5	10,93	0,488	0,49	0,25	ІМНК	0,45	0,23	УМНК	0,425	0,237	1,15
6	10,94	0,49	0,435	0,24	УМНК	0,42	0,235	УМНК	0,415	0,235	1,05
7	10,95	0,62	0,58	0,28	УМНК	0,56	0,262	УМНК	0,558	0,262	1,04
8	10,96	0,123	0,143	0,04	МНК	0,143	0,04	МОД	0,096	0,048	1,49
9	10,97	0,133	0,1	0,03	МНК	0,1	0,03	МОД	0,088	0,126	1,13
10	10,98	0,113	0,122	0,037	МДЗ	0,092	0,03	МОД	0,092	0,03	1,33
11	10,99	0,131	0,103	0,034	МДЗ	0,091	0,031	МОД	0,091	0,031	1,13
12	10,100	0,0087	0,092	0,015	МДЗ	0,063	0,011	МОД	0,063	0,011	1,46
13	10,101	0,488	0,47	0,245	МДЗ	0,489	0,225	УМНК	0,411	0,237	1,14
14	10,102	0,132	0,108	0,035	МНК	0,108	0,035	МОД	0,0181	0,038	1,33
15	10,103	0,131	0,111	0,036	МНК	0,111	0,037	МНК	0,111	0,037	1

Проаналізуємо отримані результати розрахунків:

1. На множині з 15-ти структур моделей і 4 методів ідентифікації для конкретного ряду (див. табл. 4.4) найкращою за ідеальним критерієм (4.60) виявилась авторегресивна модель (4.63) зі змінним запізненням на k-1, k-4 і k-8 кроків; найкращий метод — МОД. За реальним критерієм (4.59) отримано такий самий результат (!). Загалом із 15 розглянутих випадків у восьми оптимальний метод ідентифікації за реальним критерієм (4.59) було обрано правильно (рядки 2, 3, 6, 7, 10, 11, 12, 15 табл. 4.5), тобто він збігся з методом, обраним за ідеальним, але фізично не реалізованим критерієм (4.60). В інших семи випадках (рядки 1, 4, 5, 8, 9, 13, 14) ідеальний показник (4.62) для методу, вибраного за реальним показником, несуттєво гірший за цей показник для оптимального за ідеальним показником методом (стовпчики 6 і 9, рис. 4.8).

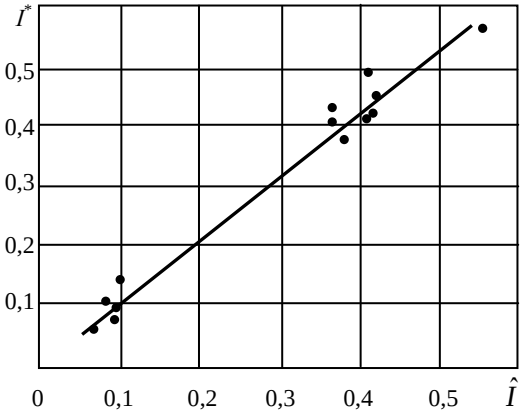


Рис. 4.8. Залежність ідеального показника I^*, отриманого для оптимального за ним методу ідентифікації від того самого показника для оптимального за реальним показником $\hat{I}$ методу ідентифікації

З рис. 4.8 випливає висновок про сильну кореляцію показників (4.58) і (4.60) і, як наслідок, можливість ефективного використання фізично реалізованого критерію (4.59).

2. У міру ускладнення моделей (4.61), (4.62), (4.73), що є степеневими рядами, показник (4.56) (другий стовпчик табл. 4.5) середньоквадратичної похибки апроксимації ряду (табл. 4.4) моделями (4.60)–(4.62) зменшується, що природно витікає з першої

теореми Вейерштрасса про апроксимацію степеневими поліномами (рядами Тейлора). Разом з тим ідеальний критерій (4.59) точності прогнозу при ускладненні моделей погіршується (рядки 1, 2, 3 третього стовпчика табл. 4.5). Це підтверджує необ'єктивність внутрішнього апроксимативного критерію (4.56) некоректність лише його використання для задачі прогнозу.

3. Дещо інша ситуація складається для авторегресивних і змішаних поліноміально-авторегресійних моделей (4.65)–(4.74).

Тут унаслідок регуляризованої властивості МНК, якщо змінні зашумлені, внутрішній критерій (4.56) середньоквадратичної міри близькості на ділянці апроксимації і зовнішній, як ідеальний (4.60), так і реальний (4.58) критерії стають досить сильно корельованими (рис. 4.9).

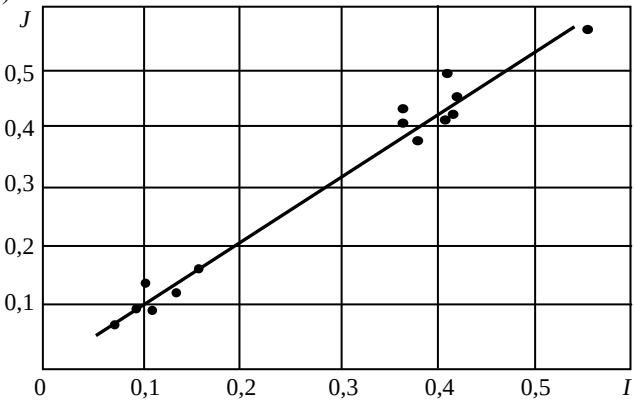


Рис. 4.9. Регресійна залежність J (4.48) від I (4.51)

Тобто для цього класу моделей менш критичне використання апроксимативного критерію (4.56) в задачі прогнозу в точках (38–43) за зашумленими даними в точках (1–37).

Тут має місце саморегулювання. Що складніша авторегресія, то гірша обумовленість інформаційної матриці МНК для точних даних, а для неточних — діагональні члени матриці МНК збільшуються.

Але для зашумлених некорельованою перешкодою даних діагональні елементи цієї матриці збільшуються і, як результат, зменшуються (за модулем) МНК-оцінки коефіцієнтів моделі, тим самим спрощуючи (регуляризуючи за Тихоновим [11]) модель.

4. Зіставимо значення ідеального критерію (4.59) для моделей, отриманих за МНК (стовпчик 3), і одному із запропонованих методів (стовпчик 6) з оптимізацією за реальним критерієм (4.58). Із 15 моделей лише для моделі (4.72) показник (4.60) несуттєво менший. Тобто тільки тут за критерієм (4.59) помилково замість МНК було вибрано МОД. В інших чотирнадцяти випадках метод, знайдений за умови мінімуму фізично реалізованого критерію (4.59) точності прогнозу, дав кращі результати, ніж МНК, або такі самі, якщо за (4.59) вибирався як кращий МНК (див. стовпчики 6 і 3 табл. 4.5).

5. У межах одного методу ідентифікації, наприклад МОД (стовпчик 6, рядки 10–13), розкид ідеального критерію (4.60) залежно від структури моделі становить від 0,063 до 0,489, що підтверджує актуальність вибору структури моделі.

У межах однієї, наприклад оптимальної за критерієм (4.58) моделі (4.71), оптимізація рішення на множині з чотирьох методів (МНК, МОД, УМНК, ІМНК) дає виграш в 1,5 рази (0,092 — для МНК і 0,063 — для МОД як оптимального методу).

6. Загалом оптимізація на множині методів і моделей дає суттєвий виграш у точності прогнозу. Визначимо цей виграш як відношення критерію (4.60) для моделі з коефіцієнтами, визначеними за МНК (стовпчик 3, табл. 4.5), до значення того самого критерію для тієї самої моделі з коефіцієнтами, визначеними оптимальним за (4.60) методом (стовпчик 9, табл. 4.5). У стовпчику 11 табл. 4.5 подано це відношення, що лежить у межах від 1 до 2,32. У середньому воно становить 1,33. Загальний і очевидний висновок-рекомендація: якщо ви маєте декілька методів ідентифікації і можливість використання моделей, то пошук найкращої за основним показником і пари «модель-метод» в умовах невизначеності дає можливість краще розв'язати задачу ідентифікації.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. Які складові I_j загального критерію I (6.50) і як вони впливають на якість прогнозної моделі?

2. Які моделі-претенденти було використано в БАСІ-системі?

3. Які методи ідентифікації?

4. Що (відносно ефективності БАСІ) показали результати (табл. 6.2) ідентифікації ММ з метою прогнозу?

5. Який максимальний коефіцієнт ефективності БАСІ і в чому він відповідає ІМНК-оцінюванню?

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н.* Методы решения некоректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенина. — М. : Наука, 1979. — С. 250.

2. *Цыпкин Я. З.* Основы информационной теории идентификации / Я. З. Цыпкин. — М. : Наука, 1984. — 380 с.

3. *Виленкин С. Я.* Статистическая обработка результатов исследования случайных функций / С. Я. Виленкин. — М. : Энергия, 1979. — 200 с.

4. *Сильвестров А. Н.* Идентификация и оптимизация автоматических систем / А. Н. Сильвестров, П. И. Чинаєв. — М. : Енергоатомиздат, 1987. — 200 с.

5. *Івахненко А. Г.* Довгострокове прогнозування і управління складними системами / А. Г. Івахненко. — К. : Техніка, 1975. — 250 с.

6. *Островерхов М.Я.* Методи дослідження електротехнічних комплексів і систем/М.Я. Островерхов, А.М. Сільвестров, К.Х. Зеленський/К.: ТАЛКОМ, 2019. – 300 с.

Розділ 5

НЕПЕРЕРВНІ МОДЕЛІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

5.1. Моделі, побудовані на основі законів механіки

Структуру моделей динаміки фізичної системи отримують на основі законів механіки, електрики, гідравліки, термодинаміки та ін. Наприклад, система «пружина-маса» (рис. 5.1), до якої прикладемо момент $M_1(t)$.

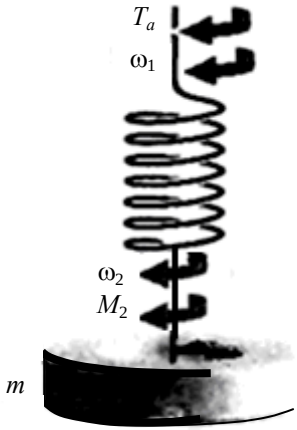


Рис. 5.1. Обертовий об’єкт «пружина-маса»

Припустимо, що пружина має малу масу порівняно з диском. Необхідно виміряти момент $M_2(t)$ маси m, виходячи із законів механіки. Сума діючих моментів повинна дорівнювати нулю $M_1(t) = M_2(t)$. Зовнішній момент $M_1(t)$ прикладений до кінця пружини, передається крізь цей пружний елемент. Різниця кутових швидкостей пружного елемента $\omega(t) = \omega_2(t) - \omega_1(t)$ характеризує кутову швидкість одного кінця пружного елемента щодо іншого і називається **відносною змінною.** Для пружини і маси, що обертаються без демпфера (рис. 5.1) або лінійно переміщуються з демпфером (рис. 5.2), в основу моделі покладено закони Ньютона.

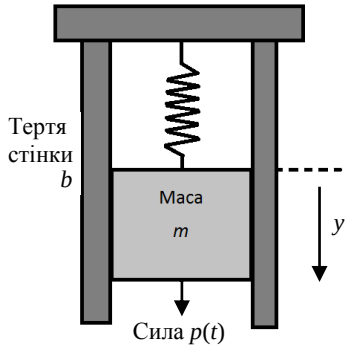


Рис. 5.2. Рухомий об’єкт «пружина-маса»

У прикладі (рис. 5.2) вважатимемо тертя вантажу об стінки в’язким. Тоді, згідно з другим законом Ньютона, отримаємо диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=p(t), \qquad (5.1)$$

де k — коефіцієнт пружності пружини; b — коефіцієнт тертя.

Більшість фізичних систем в малому діапазоні зміни змінних близькі до лінійних. Зі зростанням змінних всі системи стають нелінійними. Так, система «пружина-маса» (рис. 5.2) лінійна і описується рівнянням (5.1) лише для малих відхилень $y(t)$.

Якщо до системи в стані спокою застосувати збурення $x_1(t)$, то на виході з’явиться реакція $y_1(t)$. Якщо піддати систему збуренню $x_2(t)$, то вона дасть реакцію $y_2(t)$. Необхідною умовою лінійності є умова, за якої при збуренні $x_1(t) + x_2(t)$ система мала реакцію $y_1(t) + y_2(t)$. Це називають принципом ***суперпозиції.***

Для лінійної системи повинен виконуватися фактор масштабування: при множенні вхідної змінної на константу β вихідна змінна системи дорівнювала б $\beta^* y$. Цю властивість називають ***гомогенністю.***

Система $y = x_2$ не є лінійною, тому що для неї не виконується принцип суперпозиції. Система $y = mx + b$ негомогенна. Проте в околиці робочої точки x_0, y_0 щодо малих відхилень Δx і Δy її можна вважати лінійною. Якщо $x = x_0 + \Delta x$ і $y = y_0 + \Delta y$, то $\Delta y = m\Delta x$ задовольняє необхідні умови лінійності.

Нехай певний елемент характеризується збуренням $x(t)$ і реакцією на нього $y(t)$:

$$y(t) = f\left[x(t)\right],$$

Безперервну функцію f в околиці робочої точки x_0 можна розкласти в ***ряд Тейлора:***

$$y = f(x) = f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)}{1!} + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots .$$

Значення похідної $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$ характеризує нахил дотичної до функції $y = f(x)$ в робочій точці x_0. Ця дотична є апроксимацією кривої $f(x)$ у випадку малих значень $(x - x_0)$ відхилення від робочої точки:

$$y = f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} (x-x_0) = y_0 + \beta(x-x_0), \qquad (5.2)$$

де β — тангенс кута нахилу дотичної до кривої в робочій точці. Рівняння (5.2) можна записати у відхиленнях:

$$\Delta y = \Delta x.$$

Нехай вантаж масою m розташовано на пружині. Робоча точка відповідає стану рівноваги, коли пружна сила пружини дорівнює вазі вантажу mg, де g — прискорення сили тяжіння: $F_0 = mg$ (рис. 5.3). Якщо пружина має залежність $F = y_2$, то в положенні рівноваги $y_0 = \sqrt{mg}$. Лінійна модель для малих відхилень:

$$\Delta F = \beta \Delta y = \left.\frac{dF}{dy}\right|_{y_0} \Delta y = 2y_0 * \Delta y.$$

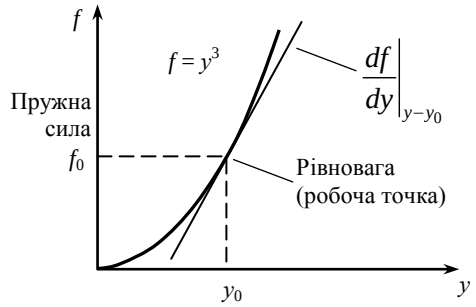


Рис. 5.3. Залежність пружної сили від y

Якщо змінна *y* залежить від декількох збурень $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

то при лінеаризації беруться перші члени кратного ряду Тейлора [див. формулу (1.7)]:

$$y = f(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x=x_0}(x_1 - x_{10}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x=x_0}(x_2 - x_{20}) + ... + \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{x=x_0}(x_n - x_{n0}).$$

Розглянемо коливання маятника (рис. 5.4, *а*). Момент, що діє на масу, дорівнює:

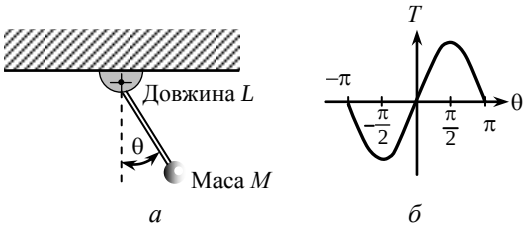
$$M = mgL\sin\theta,$$

де g — прискорення сили тяжіння. Умова рівноваги маятника $\theta_0 = 0°$. Нелінійну залежність між T і θ зображено на рис. 5.4, *б*. Обчислимо похідну в точці рівноваги. Тоді

$$T - T_0 \approx MgL\left.\frac{\partial \sin\theta}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0}(\theta = \theta_0),$$

де $T_0 = 0$, $\theta_0 = 0$, отже,

$$T = MgL(\cos°)(\theta - 0°) = MgL\theta. \qquad (5.3)$$



а *б*

Рис. 5.4. Коливання маятника:
а — маятник; *б* — залежність $T(\theta)$

Лінійна модель (5.3) в діапазоні $-\pi/6 \le \theta \le \pi/6$ відрізняється лише на 2 % від дійсних коливань маятника.

Розглянемо більш складну механічну систему (рис. 5.5). Рівняння руху механічної системи в просторі зображень за Лапласом за нульових початкових умов отримане на підставі складання сил, що діють на елементи системи:

$$m_1 s V_1(s) + (b_1 + b_2) V_1(s) - b_1 V_2(s) = p(s),$$

$$m_2 s V_2(s) + b_1 \left[V_2(s) - V_1(s) \right] + k \frac{V_2(s)}{s} = 0,$$

або

$$\left[m_1 s + (b_1 + b_2) \right] V_1(s) - b_1 V_2(s) = p(s), \qquad (5.4)$$

$$-b_1 V_1(s) + \left(m_2 s + b_1 + \frac{k}{s} \right) V_2(s) = 0,$$

де s — змінна Лапласа.

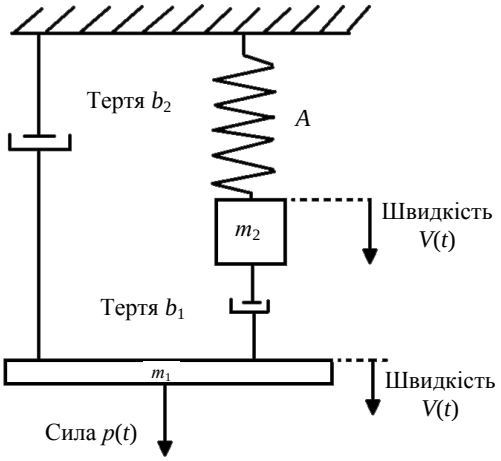


Рис. 5.5. Механічна система з двома масами

Рівняння (5.4) у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} m_1 s + b_1 + b_2 & -b_1 \\ -b_1 & m_2 s + b_1 + \dfrac{k}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(s) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вважаючи, що вихідна змінна — це швидкість руху маси m_1, за допомогою обернення матриці отримаємо:

$$V_1(s) = \frac{(m_2 s + b_1 + k/s) p(s)}{(m_1 s + b_1 + b_2)(m_2 s + b_1 + k/s) - b_1^2}.$$

Передатна функція системи:

$$W(s)=\frac{V_1(s)}{p(s)}=\frac{(m_2s^2+b_1s+k)}{(m_1s+b_1+b_2)(m_2s^2+b_1s+k)-b_1^2s}.$$

Якщо за вихідну змінну прийняти переміщення $x_1(t)$, то

$$\frac{X_1(s)}{p(s)}=\frac{V_1(s)}{sp(s)}=\frac{W(s)}{s}.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. *Поясніть з позицій теоретичної механіки рівняння (8.1) об'єкти (Рис. 8.2).*
2. *В чому полягає лінеаризація моделі маятника?*
3. *Визначте передаточну функцію 2-х масової системи (Рис. 8.5).*
4. *Поясніть структурну схему ММ ДПС (Рис. 8.8).*
5. *Розгляньте ММ (Рис. 8.12÷8.21) різних динамічних об'єктів. В чому їх принципова наближеність?*

5.2. Моделі, побудовані на основі законів електромеханіки

5.2.1. Передатна функція двигуна постійного струму як виконавчого елемента в системах бортової автоматики літальних апаратів

Електродвигун (рис. 5.6) перетворює електричну енергію на механічну енергію обертового руху. Завдяки високому обертальному моменту, можливості регулювання швидкості в широкому діапазоні, компактності, добрими характеристиками навантаження, двигуни постійного струму широко застосовуються в роботах-маніпуляторах, стрічкопротяжних механізмах, дисководах, у машинобудуванні та виконавчих пристроях слідкуючих систем.

Двигуни цього типу здатні створювати високий момент за малого моменту інерції ротора. Значення механічної сталої часу 15 мс.

Передатну функцію двигуна отримаємо шляхом лінійної апроксимації реальних характеристик. Вхідна керуюча напруга може бути подана на обмотку збудження або на якір. Якщо

відсутня насиченість, то магнітний потік Ф у повітряному зазорі буде пропорційний струму збудження i_f :

$$\Phi = K_f i_f .$$

Момент, що розвивається двигуном:

$$M_m = K_1 \Phi i_a(t) = K_1 K_f i_f(t) i_a(t) . \qquad (5.5)$$

Якщо двигун, керований по колу збудження, то перетворюючи (5.5) за Лапласом, отримаємо:

$$M_m(s) = (K_1 \Phi I_a) I_f(s) = K_m I_f(s) , \qquad (5.6)$$

де $i_a = I_a$ струм якоря, а K_m носить назву *сталої електродвигуна*.

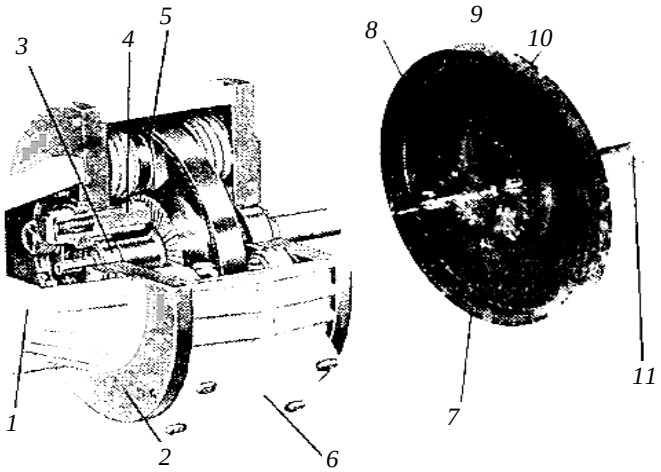


Рис. 5.6. Двигун постійного струму плоскої конструкції з постійними магнітами:
1 — захисна алюмінієва кришка; *2* — плоска форма, що забезпечує компактність конструкції; *3* — підшипники; *4* — щітки; *5* — постійні магніти зі сплаву Алніко, які забезпечують високе відношення «потужність/вага»; *6* — примусова вентиляція; *7* — обмотка; *8* — мідний колектор; *9* — якір; *10* — тарілчаста форма якоря, що забезпечує малий момент інерції; *11* — вал

Струм збудження пов'язаний з напругою збудження U_f законами електрики

$$U_f(s) = (R_f + L_f s) I_f(s), \tag{5.7}$$

де R_f — опір; L_f — індуктивність обмотки збудження.

Момент, що розвиває двигун, застосовується до навантаження:

$$M_m(s) = M_L(s) + M_d(s), \tag{5.8}$$

де $M_L(s)$, M_d — динамічний та статичний моменти навантаження

$$M_L(s) = Js^2\theta(s) + bs\theta(s). \tag{5.9}$$

З виразів (5.6)–(5.8) отримаємо:

$$M_L(s) = M_m(s) + M_d(s); \tag{5.10}$$

$$M_m(s) = K_m I_f(s);$$

$$I_f(s) = \frac{U_f(s)}{R_f + L_f s}.$$

Передатна функція двигуна «*вхід напруга* U_f — *вихід кут* θ»:

$$\frac{\theta(s)}{U_f(s)} = \frac{K_m}{s(Js+b)(L_f s + R_f)} = \frac{K_m / JL_f}{s(s+b/J)(s+R_f/L_f)},$$

або

$$\frac{\theta(s)}{U_f(s)} = G(s) = \frac{K_m / bR_f}{s(\tau_f s + 1)(\tau_L s + 1)},$$

де $\tau_f = L_f / R_f$ і $\tau_L = J/b$.

Якщо $\tau_L > \tau_f$ то сталою часу обмотки збудження можна знехтувати. Структурну схему двигуна, керованого по колу збудження, зображено на рис. 5.7. Момент, що розвивається двигуном, пропорційний добутку струму I_a якоря на струм $I_з$ збудження :

$$M_m(s) = (K_1 K_f I_f) I_a(s). \qquad (5.11)$$

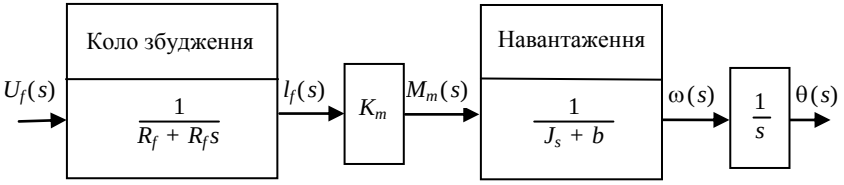


Рис. 5.7. Модель двигуна, керованого струмом збудження

Якщо використано постійні магніти, то момент двигуна буде пропорційний струму I_a якоря:

$$M_m(s) = K_m I_a(s),$$

де K_m — коефіцієнт, що залежить від магнітної проникності стального осердя.

Струм у колі якоря пов'язаний з напругою за другим законом Кірхгофа:

$$U_a(s) = (R_a + L_a s) I_a(s) + E_b(s), \qquad (5.12)$$

де $E_b(s)$ — проти-ЕРС, яка пропорційна швидкості ω обертання:

$$E_b(s) = K_b \omega(s),$$

Із рівняння (5.12) визначимо I_a, як функцію від U_a, ω:

$$I_a(s) = \frac{U_a(s) - K_b \omega(s)}{R_a + L_a s}. \qquad (5.13)$$

Із рівнянь (5.9)–(5.10) отримаємо вираз для моменту навантаження:

$$M_L(s) = Js^2\theta(s) + bs\theta(s) = M_m(s). \qquad (5.14)$$

Зв'язок між змінними двигуна, керованого по колу якоря, показано на рис. 5.8. Із рівнянь (5.11), (5.13) і (5.14) (або за структурною схемою) отримаємо передатну функцію двигуна:

$$W(s)=\frac{\theta(s)}{U_a(s)}=\frac{K_m}{s\left[(R_a+L_as)(Js+b)+K_bK_m\right]}=$$

$$=\frac{K_m}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)},$$

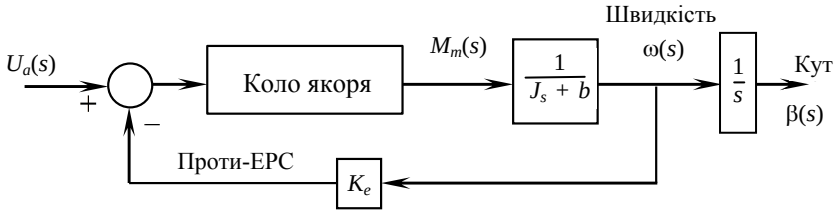


Рис. 5.8. Модель двигуна, керованого струмом якоря

Якщо сталою часу якоря $\tau_1 = L_a / R_a$ можна знехтувати, то

$$W(s)=\frac{\theta(s)}{V_a(s)}=\frac{K_m}{s\left[R_a(Js+b)+K_bK_m\right]}=$$

$$=\frac{K_m/(R_ab+K_bK_m)}{s(\tau_1 s+1)}, \qquad (5.15)$$

де еквівалентна стала часу $\tau_1 = R_aJ/(R_ab+K_bK_m)$.

5.2.2. Передатна функція гідравлічного приводу рульових машинок літальних апаратів

Для лінійного переміщення маси m може бути використано гідравлічний пристрій. Рідина подається від джерела під постійним тиском і її стисливістю можна знехтувати. Переміщення $x(t)$ золотника вниз призводить до подачі рідини у верхню частину гідроциліндра і тоді поршень переміщується вниз. Мала сила, необхідна для переміщення $x(t)$, перетворюється на велику силу, пов'язану з переміщенням поршня $y(t)$. Об'ємна витрата рідини Q залежить від переміщення $x(t)$ і різниці тисків, що діють на поршень, тобто $Q = g(x, P)$. Скориставшись методом лінеаризації, запишемо:

$$Q=\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x_0,P_0}x+\left(\frac{\partial g}{\partial P}\right)_{x_0,P_0}P=k_xx-k_pP, \qquad (5.16)$$

де (x_0, P_0) — координати робочої точки.

Сила, що розвивається поршнем гідроциліндра, дорівнює добутку його площі A на тиск P:

$$AP = m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt}. \tag{5.17}$$

Підставляючи (5.16) в рівняння (5.17), отримаємо

$$\frac{A}{k_p}\left(k_x x - Q\right) = m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt}. \tag{5.18}$$

Окрім того, об'ємна витрата рідини пов'язана з переміщенням поршня:

$$Q = A\frac{dy}{dt}. \tag{5.19}$$

Підставляючи (5.19) в рівняння (5.18), отримаємо:

$$\frac{Ak_x}{k_p}x = m\frac{d^2y}{dt^2} + \left(b + \frac{A^2}{k_p}\right)\frac{dy}{dt}.$$

Тоді, скориставшись перетворенням Лапласа, отримаємо передатну функцію, що зв'язує переміщення $x(t)$ золотника з переміщенням $y(t)$ поршня:

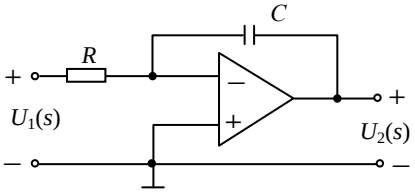
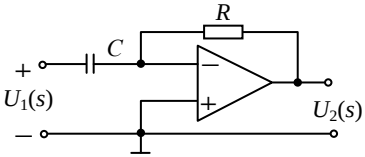
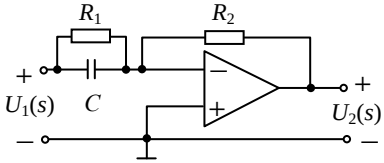
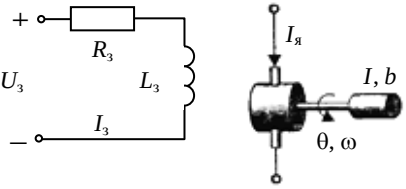
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s(Ms + B)}, \tag{5.20}$$

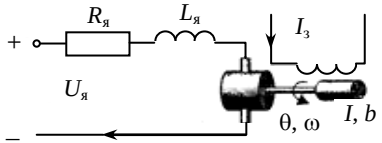
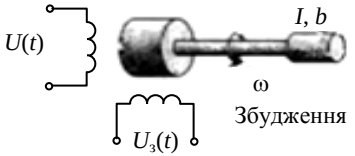
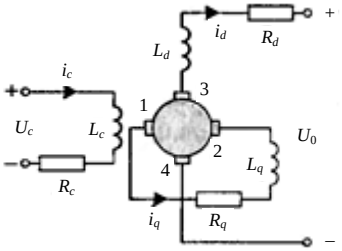
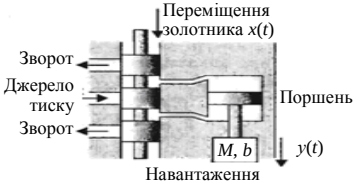
де $K = \dfrac{Ak_x}{k_p}$ і $B = b + \dfrac{A^2}{k_p}$.

За структурою передатна функція (5.20) гідравлічного виконавчого пристрою збігається з передатною функцією (5.15) електродвигуна. Подамо, як приклад передатні функції широковідомих пристроїв систем автоматики літальних апаратів (ЛА) (табл. 5.1).

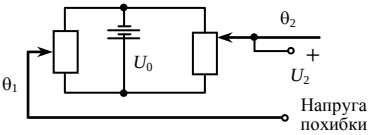
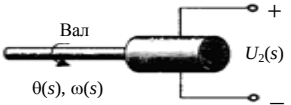
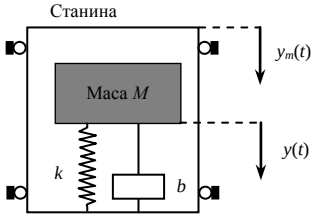
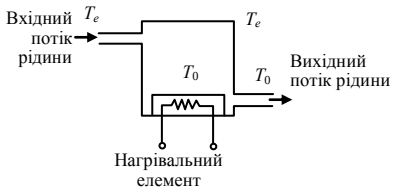
Таблиця 5.1

Передатні функції динамічних елементів

Елемент	Передатна функція
Інтегруюча ланка, яку реалізовано на операційному підсилювачі (ОП) 	$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{1}{RCs}$
Диференціююча ланка на ОП 	$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -RCs$
Пропорційно-диференціююча ланка на ОП 	$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{R_2(R_1Cs+1)}{R_1}$
Двигун постійного струму з керуванням по колу збудження 	$\frac{\theta(s)}{U_з(s)} = \frac{K_m}{s(Js+b)(L_f s+R_f)}$

Елемент	Передатна функція
Двигун постійного струму з керуванням по колу якоря 	$$\frac{\theta(s)}{V_я(s)} = \frac{K_m}{s[(R_a + L_a s)(Js + b) + K_b K_m]}$$
Двофазний двигун змінного струму 	$$\frac{\theta(s)}{U_з(s)} =$$ $$\tau = J/(b - m)$$ K_m — нахил лінеаризованої залежності швидкості від моменту
Електромашинний підсилювач систем бортової автоматики ЛА 	$$\frac{U_0(s)}{U_c(s)} = \frac{(K/R_c R_q)}{(s\tau_c + 1)(s\tau_q + 1)},$$ $$\tau_c = L_c/R_c,\ \ \tau_q = L_q/R_q.$$ У режимі холостого ходу $$i_d \approx 0,\ \tau_c \approx \tau_q,$$ $$0{,}05c < \tau_c < 0{,}5c,$$ $$U_{12} = U_q,\ U_{34} = U_d$$
Гідравлічний виконуючий пристрій рульова машинка ЛА 	$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s(ms + B)}$$ $$K = \frac{Ak_x}{k_p},\ B = \left(b + \frac{A^2}{k_p}\right)$$ $$k_x = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_0},\ \ k_p = \left.\frac{\partial g}{\partial P}\right|_{P_0}$$ $g = g(x, P)$ = потік A – площа поршня

Продовження табл. 5.1

Елемент	Передатна функція
Потенціометрична схема формування похибки системи стабілізації кута θ ЛА  	$U_2(s) = k_s\left(\theta_1(s) - \theta_2(s)\right);$ $U_2(s) = k_s\theta_e(s);$ $k_s = \dfrac{U_0}{\theta_{\max}}$
Тахогенератор – датчик кутової швидкості обертання кута θ  	$U_2(s) = K_t\omega(s) = K_t s\theta(s);$ $K_t = \text{const}$
Акселерометр – датчик перевантаження ЛА  	$x_0(t) = y(t) - x_m(t);$ $\dfrac{X_0(s)}{X_m(s)} = \dfrac{-s^2}{s^2 + (b/m)s + k/m},$ для низькочастотних коливань де $\omega < \omega n$, $\dfrac{X_0(j\omega)}{X_m(j\omega)} \approx \dfrac{\omega^2}{k/m}$
Система підігріву рідини  	$\dfrac{T(s)}{q(s)} = \dfrac{1}{C_1 s + (QS + 1/R)},$ де $T = T_0 - T_e$ – різниця температур: C_1 – теплоємність; Q – витрата рідини = const; S – питома теплоємність води; R_1 – тепловий опір ізоляції; $q(s)$ – теплова потужність нагрівального елемента

5.3. Моделі у вигляді структурних схем об'єктів ідентифікації та систем керування ними

У теорії ідентифікації та керування часто використовують зображення систем у вигляді структурних схем. Структурні схеми складаються з ланок спрямованої дії, кожній із яких відповідає певна передатна функція. На рис. 5.9 зображено структурну схему двигуна постійного струму, керованого по колу збудження, яка відображає зв'язок між кутом повороту $\theta(s)$ і напругою $U_f(s)$.

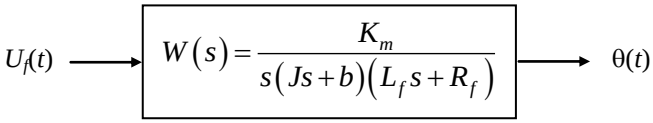


Рис. 5.9. Структурна схема двигуна постійного струму

У загальному випадку для моделі системи з декількома керованими змінними використовується структурна схема з перехресними зв'язками. У системі є дві вхідні і дві вихідні змінні (рис. 5.10).

Рис. 5.10. Система з двома входами і двома виходами

За допомогою передатних функцій можна записати зв'язуючі їх рівняння:

$$Y_1(s)=W_{11}(s)X_1(s)+W_{12}(s)X_2(s),$$

$$Y_2(s)=W_{21}(s)X_1(s)+W_{22}(s)X_2(s),$$

де $W_{ij}(s)$ — передатна функція від j-го входу до i-го виходу.

Загалом, за наявності n входів і m виходів можна записати в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1n}(s) \\ G_{21}(s) & \dots & G_{2n}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{m1}(s) & \dots & G_{mn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix},$$

або векторно-матричній формі

$$Y = WX,$$

де Y і X — матриці-стовпці, елементами яких є m вихідних і n вхідних змінних, а W — матрична передатна функція розмірності mn.

Далі розглядаємо приклади систем типу «об'єкт-регулятор», де для вибору оптимального регулятора необхідно знати математичну модель об'єкта — передатну функцію. Структуру її визначають, виходячи із законів фізики, а параметри слід уточнити шляхом розв'язання задачі ідентифікації.

Приклад 5.1. Система зчитування інформації з диска.

Завдання керування дисководом: позиціонувати зчитувальну головку точно на задану доріжку і забезпечити перехід від однієї доріжки до іншої в межах 10 мс. Для приведення в дію важеля зчитувальної головки використовується двигун із постійними магнітами.

Головку зчитування закріплено на ковзному елементі, закріпленому на важелі (рис. 5.11). Гнучка пластина дає можливість головці плавати над диском із зазором менше 100 нм. Тонкоплівкова головка сприймає магнітний потік і формує сигнал, що надходить на підсилювач.

Сигнал помилки $E(s)$ (рис. 5.12) формується на підставі заданого розміру доріжки. Можна вважати, що передатна функція датчика $H(s) = 1$, лінійного підсилювача — K_m. Двигун, керований по колу якоря, подано моделлю (табл. 5.1, п. 5).

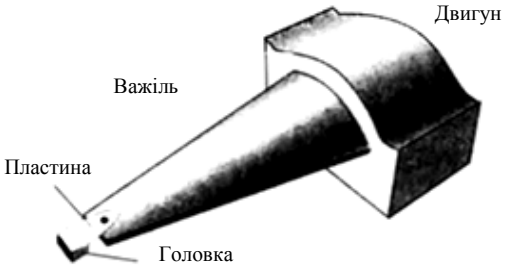


Рис. 5.11. Зчитувальна головка дисковода

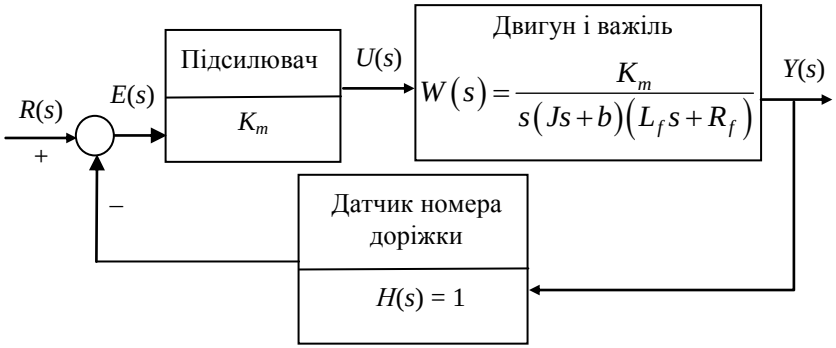


Рис. 5.12. Структурна схема зчитування системи дисковода

Отже,

$$W(s) = \frac{K_m}{s(Js+b)(Ls+R)},$$

або

$$W(s) = \frac{K_m / bR}{s(\tau_L s+1)(\tau s+1)},$$

де τ, τ_L і K_m / b_R підлягають визначенню методами ідентифікації.

Оскільки $\tau << \tau_L$, можна знехтувати величиною τ. Тоді визначають лише дві невідомі (5 і 20).

$$W(s) \approx \frac{K_m / bR}{s(\tau_L s+1)} = \frac{5}{s(s+20)}.$$

Приклад 5.2. Автономний самохідний місяцехід.

Самохідним апаратом (місяцеходом) (рис. 5.13) із живленням від сонячних батарей може керувати за допомогою команд $x(t)$. Система керування може бути розімкненою або замкненою.

Рис. 5.13. Місяцехід

Розімкнена система має передатну функцію:

$$W_0(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s^2 + a_1 s + a_0},$$

замкнена система — відповідно:

$$W_c(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s^2 + a_1 s + a_0 + K}.$$

Для бажаного рівня якості керування необхідно визначити і періодично уточнювати змінні від часу і обставин три параметри: K, a_1, a_0.

Приклад 5.3. Система керування кутом крену літака.

Скористаємося спрощеною моделлю динаміки літака у вигляді передатної функції, що зв'язує відхилення елеронів δ_e і кут φ крену літака (рис. 5.14, *а*). На рис. 5.14, *б* зображено замкнену систему керування положення літака у повітрі, мета якої полягає у

підтримці кута крену φ, близького до φ_a, в умовах непередбачених зовнішніх збурень. Два апріорні параметри 11,4 і 1,4 моделі літака слід уточнювати в польоті за допомогою методів ідентифікації, бо вони можуть суттєво змінюватись.

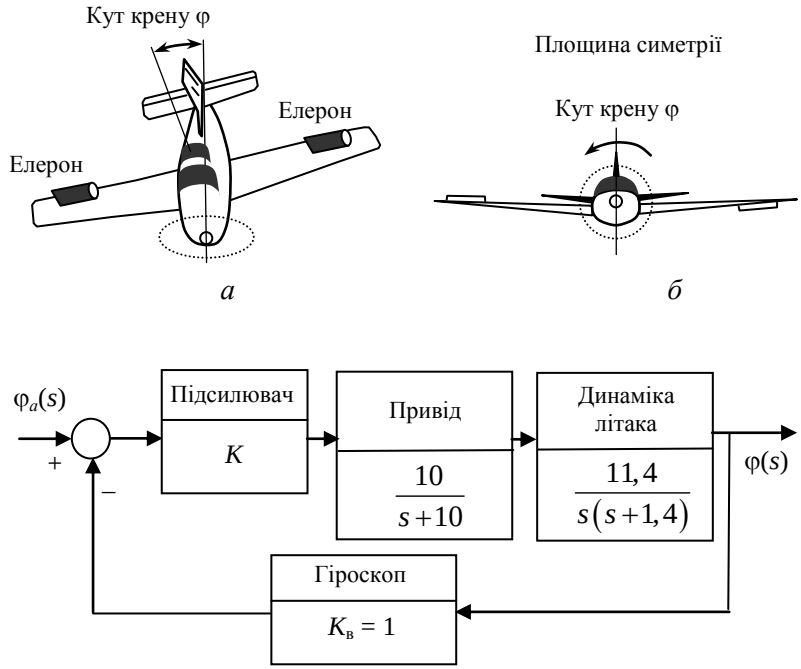


Рис. 5.14. Керування кутом крену літака за допомогою елеронів:
а — загальний вигляд; *б* — площа симетрії;
в — система керування

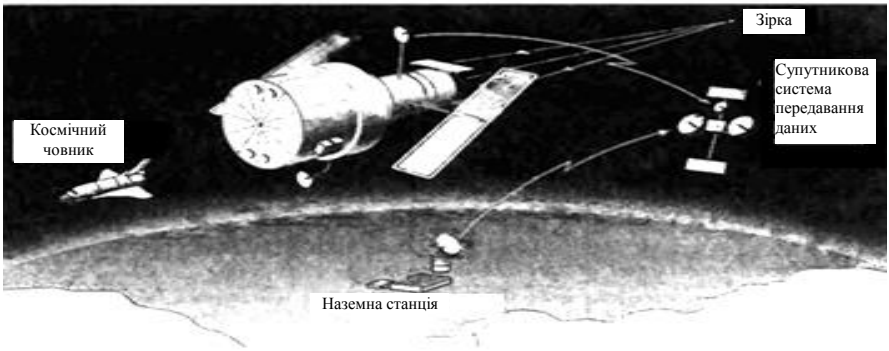
Приклад 5.4. Для виконання астрономічних спостережень на орбіту виводиться космічний телескоп.

Система керування наведенням повинна володіти точністю 0,01 кутової хвилини і стежити за рухом об'єктів зі швидкостями до 0,21 кутової хвилини на секунду. Космічний телескоп зображено на рис. 5.15, *а*, а структурну схему системи — на рис. 5.15, *б*.

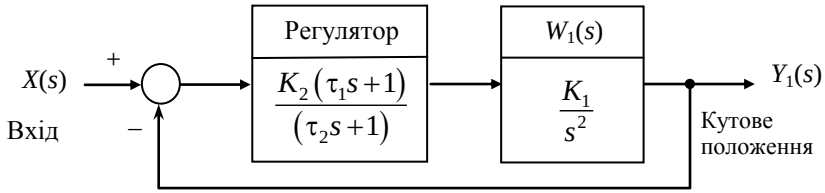
Ідентифікації підлягає або K_1 або всі коефіцієнти замкненої системи з передатною функцією

$$W_3(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1},$$

де $b_0 = K_1 K_2, b_1 = K_2 \tau, a_1 = \tau_1, a_2 = (K_1, K_2)^{-1}, a_3 = \tau_2 (K_1, K_2)^{-1}$.



а



б

Рис. 5.15. Космічний телескоп:
а — загальний вигляд; *б* — система керування наведенням телескопа на зірку

Приклад 5.5. Безпілотна модель літака з автопілотом.

Для утримання моделі літака на заданому курсі і висоті використовується автопілот. Структурна схема системи керування (рис. 5.16) включає регулятор *W*(s), параметри якого залежать від моделі літака. Останні підлягають ідентифікації для адаптації параметрів регулятора.

Приклад 5.6. Система керування ракетою.

На рис. 5.17 зображено структурну схему системи керування швидкістю ракети з ПІ-регулятором, параметри якого залежать від змінних у часі параметрів ракети. Для забезпечення стійкості і якості замкненої системи необхідна ідентифікація параметрів (100,2) ракети.

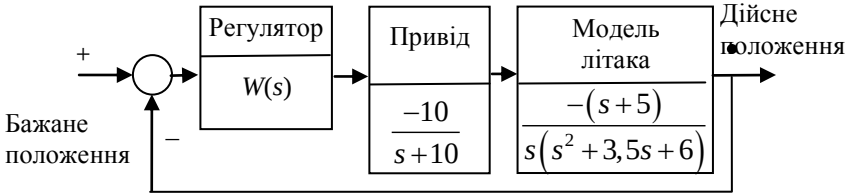


Рис. 5.16. Структурна схема системи керування з автопілотом

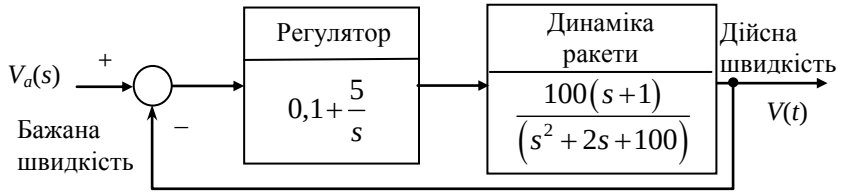
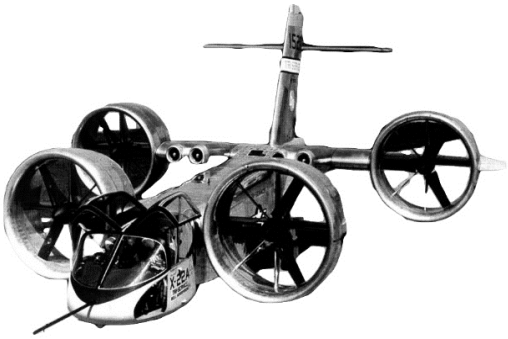


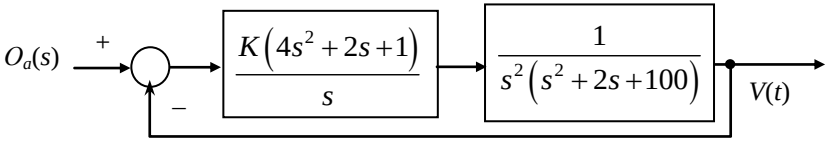
Рис. 5.17. Система керування швидкістю ракети

Приклад 5.7. Літак із вертикальним зльотом.

На рис. 5.18, *а* зображено літак із вертикальним зльотом, який забезпечується чотирма двигунами, що обертаються навколо горизонтальної осі. Структурну схему системи керування висотою підйому літака наведено на рис. 5.18, *б*.



а



б

Рис. 5.18. Літак із вертикальним зльотом:
а — загальний вигляд; *б* — система керування

Передатна функція літака при вертикальному зльоті має два нульових і два комплексних корені:

$$W(s)=\frac{1}{s^2\left(s^2+2s+100\right)},\quad s_{1,2}=0, s_{3,4}\cong -1\pm j10\,.$$

Тобто літак нестійкий і сильноколивальний. Для стабілізації режиму вертикального зльоту необхідна ідентифікація.

Приклад 5.8. Реактивний винищувач.

На рис. 5.19, *а* зображено багатоцільовий реактивний винищувач і його структурну схему керування за кутом атаки (рис. 5.19, *б*), де ідентифікації підлягають аеродинамічні коефіцієнти (АДК) літака.

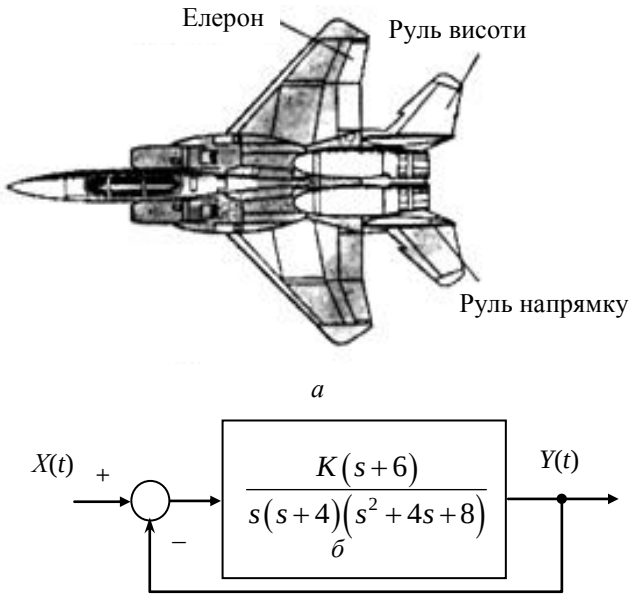
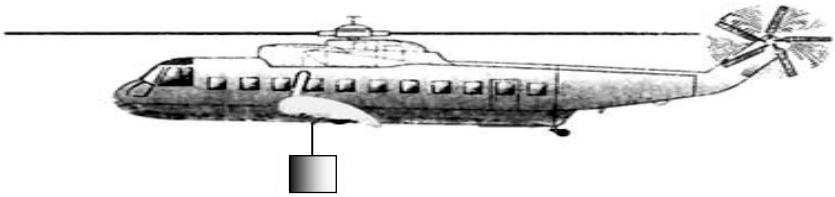


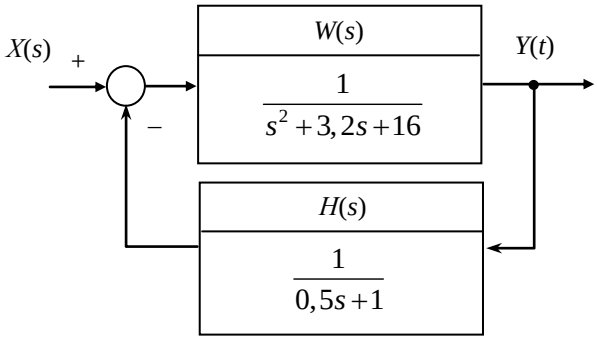
Рис. 5.19. Багатоцільовий винищувач:
а — загальний вигляд;
б — структурна схема системи керування кутом атаки

Приклад 5.9. Вертоліт із вантажем на тросі.

На рис. 5.20, *а* зображено вертоліт із вантажем на тросі. На рис. 5.20, *б* наведено структурну схему системи керування положенням вантажу, де візуальний зворотний зв'язок здійснюється пілотом, поданим передатною функцією $H(s)$. Параметри передатних функцій як вертольоту, так і пілоту можуть суттєво змінюватися, що призводить до зміни коренів передатної функції замкненої системи «пілот–вертоліт» і, як наслідок, коливальності системи, а то й стійкості системи.



а



б

Рис. 5.20. Система керування вертольотом,
який переносить вантаж:
а — вертоліт, який переносить вантаж; *б* — система керування

Приклад 5.10. Космічний корабель.

Космічний корабель (рис. 5.21, *а*), служить для доставки на орбіту корисного вантажу і поверненню його на Землю. Корабель, що важить без вантажу близько 75 т, оснащено елеронами в задній частині крил і гальмівним двигуном у хвості, за допомогою яких здійснюється керування його польотом. На рис. 5.21, *б* наведено структурну схему системи керування швидкістю зниження. Передатна функція корабля має вигляд

$$W(s) = \frac{0,30(s+0,05)(s^2+1600)}{(s^2+0,05s+16)(s+70)},$$

але її параметри суттєво змінюються в функції висоти H, швидкості ψ та масі палива. Для забезпечення безпеки посадкового режиму необхідна поточна ідентифікація $W(s)$ і відповідна корекція передатної функції $W_1(s)$ регулятора. При цьому для коректної задачі ідентифікації необхідно спростити передатну функцію $W(s)$.

Як бачимо, існує безліч об’єктів ідентифікації. Це об’єкти, що змінюють свої параметри в процесі роботи. Для забезпечення бажаної якості керування ними виникає необхідність в ідентифікації їх передатних функцій.

а

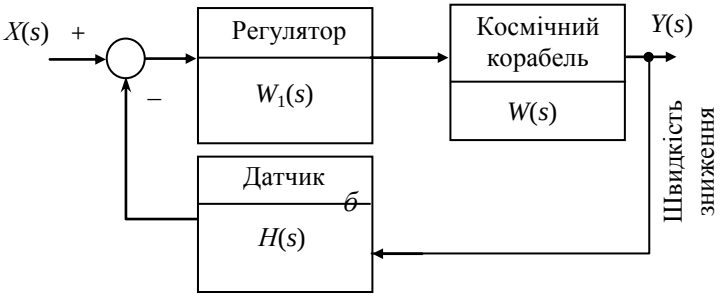


Рис. 5.21. Космічний корабель «Шатл»:
а — фото космічного корабля; *б* — структурна схема системи керування швидкістю зниження

5.4. Спрощення передатних функцій

Складні системи, передатні функції яких мають високий порядок, доцільно вивчати, використовуючи їх апроксимацію моделями зниженого порядку, що особливо важливо в задачі ідентифікації і адаптивного керування.

Існує декілька методів зниження порядку передатних функцій. Порівняно простим способом є видалення неіснуючих полюсів, які мають достатньо велику від'ємну дійсну частину і слабо впливають на вид перехідної характеристики. Наприклад, якщо система має передатну функцію

$$W(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+30)},$$

то безболісно можна знехтувати полюсом $s = –30$.

Однак ми повинні зберегти коефіцієнт передачі системи на нульовій частоті, тому нова передатна функція матиме вигляд

$$W(s) = \frac{K/30}{s(s+2)}.$$

Більш точний метод полягає в тому, що частотну характеристику системи зниженого порядку намагаються підігнати якомога ближче до частотної характеристики системи високого порядку. Нехай система високого порядку описується передатною функцією

$$W(s) = K\frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + ... + a_1 s + 1}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_1 s + 1},$$

всі полюси якої знаходяться в лівій половині s-площини і $m \le n$. Апроксимуюча передатна функція зниженого порядку має вигляд:

$$\hat{W}(s) = K\frac{c_p s^p + ... + c_1 s + 1}{d_g s^g + ... + d_1 s + 1} = k\frac{C_1(s)}{D_1(s)},$$

де $p \le g < n$.

Коефіцієнт K — один і той же для початкової та апроксимуючої передатних функцій, що необхідно для збігу властивостей систем в сталому режимі. Метод засновано на підборі C_1 і D_1 так, щоб частотна характеристика для $\hat{W}(s)$ була якомога ближче до частотної характеристики для $W(s)$. Це еквівалентно твердженню, що відношення $W(jw)/\hat{W}(jw)$ повинно на всіх частотах якомога менше відрізнятися від 1. Коефіцієнти C_1 і D_1 визначаються за допомогою таких виразів:

$$M^{(k)}(s) = \frac{d^k}{ds^k} M(s)$$

і

$$\Delta^{(k)}(s) = \frac{d^k}{ds^k} \Delta(s),$$

де $M(s)$ і $\Delta(s)$ є, відповідно, поліноми в чисельнику і знаменнику дробу $W(jw)/\hat{W}(jw)$. Введемо позначення :

$$M_{2q} = \sum_{k=0}^{2q} \frac{(-1)^{k+q} M^k(0) M^{(2k-q)}(0)}{k!(2k-q)!}, \; q = 0,1,2 \ldots,$$

аналогічний вираз для Δ_{2q}. Коефіцієнти C_1 і D_1 визначаються з умови

$$M_{2q} = \Delta_{2q},$$

де q = 1, 2, ... і т. д. до числа, необхідного для визначення всіх невідомих коефіцієнтів.

Приклад 5.11. Спрощення передатної функції.

Розглянемо систему третього порядку:

$$W(s) = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{1}{1 + (11/6)s + s^2 + (1/6)s^3}. \qquad (5.20)$$

Скориставшись моделлю другого порядку

$$\hat{W}(s) = \frac{1}{1 + d_1 s + d_2 s^2},$$

запишемо:

$$M(s) = 1 + d_1 s + d_2 s^2 \quad \text{і} \quad \Delta(s) = 1(11/6)s + s^2 + (1/6)s^3.$$

Тоді

$$M^0(s) = 1 + d_1 s + d_2 s^2,$$

і $M_0(0) = 1$. Аналогічно отримаємо

$$M^1 = \frac{d}{ds}\left(1 + d_1 s + d_2 s^2\right) = d_1 + 2d_2 s\ .$$

Таким чином, $M_1(0) = d_1$. Продовжуючи цей процес для M і для Δ отримаємо:

$$\begin{aligned} M^0(0) &= 1, & \Delta^0(0) &= 1, \\ M^1(0) &= d_1, & \Delta^1(0) &= 1/16, \\ M^2(0) &= 2d_2, & \Delta^2(0) &= 2, \\ M_3(0) &= 0, & \Delta^3(0) &= 1. \end{aligned}$$

Тепер прирівняємо $M_2 q = \Delta_2 q$ для $q = 1$ і $q = 2$. Для $q = 1$ маємо:

$$M_2 = (-1)\frac{M^0(0)M^2(0)}{2} + \frac{M^1(0)M^1(0)}{1} + (-1)\frac{M^2(0)M^0(0)}{2} = \\ = -d_2 + d_1^2 - d_2 = -2d_2 + d_1^2.$$

Аналогічно для Δ_2:

$$\Delta_2 = (-1)\frac{\Delta^0(0)\Delta^2(0)}{2} + \frac{\Delta^1(0)\Delta^1(0)}{1} + (-1)\frac{\Delta^2(0)\Delta^0(0)}{2} = \\ = -1 + \frac{121}{36} - 1 = \frac{49}{36}. \qquad (5.21)$$

Із рівняння (5.21) випливає, що для $q = 1$ $M_2 = \Delta_2$, отже

$$-2d_2 + d_1^2 = 49/36\,. \qquad (5.22)$$

Завершуючи процес для $M_4 = \Delta_4$ отримаємо:

$$d_2^2 = 7/18\,. \qquad (5.23)$$

Спільне рішення (5.22) і (5.23) дає: $d_1 = 1{,}615$ і $d_2 = 0{,}625$. (Інші розв'язки відкидаємо, тому що вони дають полюси в правій половині s-площині) Таким чином, система зниженого порядку має передатну функцію

$$\hat{W}(s) = \frac{1}{1 + 1{,}615s + 0{,}625s^2} = \frac{1{,}60}{s^2 + 2{,}584s + 1{,}60}\ .$$

де $W(s)$ має полюси $s = –1, –2, –3$; полюси $\hat{W}(s)$ такі: $s = –1{,}029$ та $–1{,}555$. Оскільки модель зниженого порядку має два полюси, можна оцінити, що система матиме передемпфовану перехідну характеристику з часом встановлення близько 3 с.

Кількість невідомих параметрів моделі (5.20) при цьому скоротилась на одиницю, що спрощує задачу ідентифікації. Інший підхід до спрощення побудований на розкладанні $W(s)$ у ряд Маклорена і обчислення за ним коефіцієнтів спрощеної передатної функції $\hat{W}(s)$ буде розглянуто в розд. 6.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. Дайте визначення стану системи.
2. Перейдіть від диференційного рівняння системи (Рис. 8.24) до системи в формі Коші в скалярному і векторно-матричному поданні?
3. Як перейти від системи рівнянь в формі Коші до матричної передаточної функції?
4. Як методом Ейлера перейти від неперервних до дискретних моделей?
5. Які змінні входять в модель (8.43) епідемії короно-вірусу?
6. Які змінні стану моделі електроприводу принтера?
7. Які змінні стану моделі перевернутого маятника?

5.5. Моделі в змінних стану

5.5.1. Змінні стану

Аналіз систем у часовій області ґрунтується на понятті стану системи. **Стан системи — це сукупність таких змінних, опис якими динаміки системи дозволяє визначити її майбутній стан і вихідну змінну.** Для динамічної системи її стан описується набором змінних $[x_1(t), x_2(t),\ldots, x_n(t)]$, які визначають майбутню поведінку системи, якщо відомо її потоковий стан і всі зовнішні впливи. Наприклад, двовимірна система (рис. 5.22) має $y_1(t)$ і $y_2(t)$ — вихідні змінні, а $u_1(t)$ і $u_2(t)$ — вхідні. Якщо відомі початкові значення $[x_1(t_0), x_2(t_0),\ldots, x_n(t_0)]$ і вхідні сигнали $u_1(t)$ і $u_2(t)$ для $t \geq t_0$, то цього достатньо, щоб визначити майбутні значення всіх змінних стану і вихідних змінних.

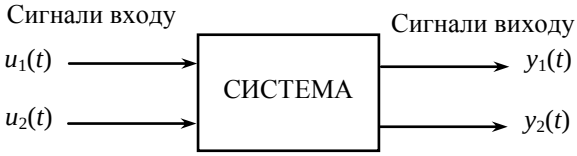


Рис. 5.22. Структурна схема системи

Таким чином, змінні стану описують поведінку системи в майбутньому, якщо відомі потоковий стан, зовнішній вплив і рівняння динаміки системи.

Загальний вигляд динамічної системи наведено на рис. 5.23.

Рис. 5.23. Динамічна система

Поняття змінних стану проілюструємо на прикладі системи «маса–пружина» (див. рис. 5.1) зі загасанням (рис. 5.24). Кількість змінних стану, вибраних для опису системи, має бути по можливості мінімальним, щоб серед них не було зайвих. Для даної системи цілком достатньо мати дві змінні стану: $x_1(t)$ — положення і $x_2(t)$ — швидкість руху маси m; (x_1, x_2), $x_1(t) = y(t)$ — вихідна змінна. Тоді

$$x_1(t) = y_1(t),\ x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}.$$

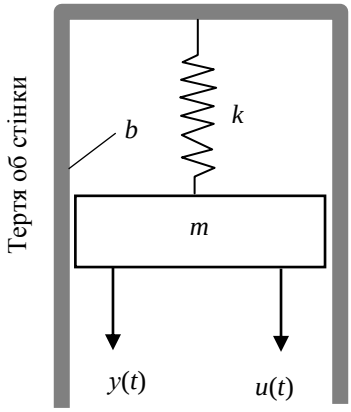


Рис. 5.24. Система «маса–пружина» зі загасанням

Диференціальне рівняння (5.1), яке описує поведінку системи

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+ky=u(t),$$

з урахуванням введених змінних стану, набуває вигляду:

$$m\frac{dx_2}{dt}+bx_2+kx_1=u(t).$$

Останнє рівняння можна зобразити у вигляді системи двох диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2;\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-\dfrac{k}{m}x_1-\dfrac{b}{m}x_2+\dfrac{1}{m}u.\end{cases}$$

Ці рівняння описують залежність швидкості зміни кожної змінної стану від змінних стану x_1, x_2 і вхідної змінної $u(t)$.

Загалом стан системи описується диференціальними рівняннями першого порядку відносно кожної зі змінних стану:

$$\dot{x}_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n+b_{11}u_1+...+b_{1m}u_m,$$

$$\dot{x}_1=a_{21}x_2+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n+b_{21}u_1+...+b_{2m}u_m, \qquad (5.24)$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + ... + b_{nm}u_m ,$$

де $\dot{x} = dx/dt$. Система (5.24) в матричній формі:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Матриця-стовпчик, яка складається зі змінних стану, називається *вектором стану*.

Вектор вхідних впливів позначається як u. Тоді систему (5.25) можна описати у векторно-матричному вигляді:

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (5.26)$$

Матриця A — квадратна розмірності $n \times n$, матриця B має розмірність $n \times m$. Рівняння стану зв'язує швидкість зміни стану системи з самим станом і вхідними сигналами. Загалом вихідні змінні стану системи зв'язані зі змінними стану і вхідними впливами рівнянням виходу

$$y = Cx + Du , \quad (5.27)$$

де y — сукупність вихідних сигналів, подана в вигляді вектора-стовпчика.

Скориставшись рівнянням (5.26), запишемо рівняння стану для системи (див. рис. 5.24):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) . \quad (5.28)$$

Рівняння виходу:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1.$$

Розв'язок диференціального рівняння стану (5.28) формально можна отримати схожим на розв'язок скалярного диференціального рівняння першого порядку:

$$\dot{x} = ax + bu\,, \tag{5.29}$$

де $x(t)$ і $u(t)$ — скалярні функції часу. Перетворимо за Лапласом рівняння (5.29):

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s),$$

звідки

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} + \frac{b}{s-a}U(s). \tag{5.30}$$

Обернене перетворення Лапласа рівняння (5.30) дає розв'язок:

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(1-\tau)}bu(\tau)d\tau, \tag{5.31}$$

який подібний за виглядом і розв'язком до векторно-матричного диференціального рівняння стану (5.26).

Розглянемо **матричну експоненціальну функцію**. Подамо її у вигляді ряду

$$eAt = \exp(At) = I + At + \frac{A_2 t_2}{2!} + ... + \frac{A^k t^k}{k!} + ...$$

Розв'язок рівняння стану, подібний (5.31), матиме вигляд:

$$x(t) = \exp(At)x(0) + \int_0^t \exp[A(t-\tau)]Bu(\tau)d\tau\,. \tag{5.32}$$

Розв'язок (5.32) можна також отримати, застосувавши перетворення Лапласа до рівняння (5.26) і згрупувавши члени. В результаті отримаємо:

$$X(s) = [sI - A]^{-1}x(0) + [sI - A]^{-1}BU(s)\,, \tag{5.33}$$

де $[sI - A]^{-1} = \Phi(s)$ зображення Лапласа функції $\Phi(s) = \exp(At)$.

Застосувавши до (5.33) обернене перетворення Лапласа і враховуючи, що другий доданок у правій частині містить добуток $\Phi(s)BU(s)$, отримаємо рішення (5.32). Матрична експоненціальна функція $\Phi(t)$ описує вільний рух системі й називається **фундаментальною матрицею** або **перехідною матрицею стану**. Таким чином, розв'язок (5.32) можна записати у вигляді:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau\,.$$

За рівнянням стану системи із входом і виходом визначимо її передатну функцію. Взявши для рівнянь (5.26) і (5.27) перетворення за Лапласом за нульових початкових умов $X(0) = 0$ отримаємо:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s), \tag{5.34}$$

і

$$Y(s) = CX(s) + DU(s). \tag{5.35}$$

Групуючи члени в рівнянні (5.33), отримаємо:

$$(sI - A)X(s) = BU(s).$$

Оскільки $[sI - A]^{-1} = \Phi(s)$, то $X(s) = \Phi(s)\, BU(s)$.

Підставляючи $X(s)$ в рівняння (5.35), отримаємо:

$$Y(s) = [C\, \Phi(s)\, B + D]\, U(s).$$

Передатна функція $W(s) = Y(s)/U(s)$, тобто:

$$W(s) = C\Phi(s)B + D. \tag{5.36}$$

Приклад 5.12. Зв'язок моделі в змінних стану і відповідних передатних функціях моделі короткоподійного поздовжнього руху літака.

Рівняння стану

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX \end{aligned}, \tag{5.37}$$

де $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; x_1 — відхилення від балансованого кута атаки літака; x_2 — відхилення кутової швидкості обертання літака; U — відхилення руля висоти літака; $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ — аеродинамічні коефіцієнти.

Для визначення матричної передатної функції $W(s)$ (5.36) візьмемо перетворення Лапласа для системи (5.37) за нульових початкових умов:

$$SX(s) = AX(s) + BU(s),$$
$$Y(s) = CX(s).$$

Звідси, згідно з рівнянням (5.36) (для $D = 0$)

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B, \tag{5.38}$$

або

$$W(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s - a_{11}) & -a_{12} \\ -a_{21} & (s - a_{22}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & 0 \\ 0 & W_{22}(s) \end{bmatrix},$$

де $W_{11}(s) = \dfrac{x_1(s)}{U(s)} = \dfrac{b_1(s - a_{22})}{s^2 + a_{11}a_{22}s + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$,

$$W_{22}(s) = \frac{x_2(s)}{U(s)} = \frac{b_2(s - a_{11})}{s^2 + a_{11}a_{22}s + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}.$$

Задача ідентифікації може розв'язуватися як для системи (5.37) у змінних стану, так і для передатних функцій (5.38).

5.6. Часові характеристики і перехідна матриця стану

Перехідні характеристики системи можна отримати шляхом розв'язання рівняння стану, яке має вигляд:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau. \tag{5.39}$$

Якщо відомі початкові умови $x(0)$, вектор вхідних впливів $u(t)$ і перехідна матриця стану $\Phi(t)$, то реакція системи $x(t)$ може бути обчислена тим чи іншим способом. Таким чином, задача зводиться до обчислення матриці $\Phi(t)$, яка в основному і визначає реакцію системи. Слід згадати й деякі методи обчислення ряду

$$\Phi(t) = \exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

з обмеженою кількістю членів.

Відомі також ефективні методи обчислення $\Phi(t)$ за допомогою комп'ютерних алгоритмів.

У рівнянні (5.33) показано, що $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$. Тоді, якщо обчислити обернену матрицю, то можна знайти і $\Phi(t)$ як обернене перетворення Лапласа для $\Phi(s)$, тобто

$$\Phi(t) = L^{-1}[\Phi(s)].$$

Розглянемо перетворення Лапласа рівняння (5.39), вважаючи вхідні сигнали рівними 0. Тоді для $u(\tau) = 0$ із рівняння (5.39) маємо:

$$X(s) = \Phi(s)x(0).$$

Перехідна матриця стану буде оберненим перетворенням Лапласа від $\Phi(s)$, тобто

$$\Phi(t) = L^{-1}[\Phi(s)]\,.$$

Тоді залежність змінних стану від початкових умов $x(0)$ визначається, наприклад, для системи (5.37) другого порядку так:

$$X_1(s) = \varphi_{11}(s)x_1(0) + \varphi_{12}x_2(0)\,;$$

$$X_2(s) = \varphi_{21}(s)x_1(0) + \varphi_{22}x_2(0)\,,$$

де φ_{ij} — складові матричної перехідної функції $\Phi(s)$.

Часові характеристики системи, яка описується векторно-матричним диференціальним рівнянням стану, можна отримати, скориставшись **дискретною апроксимацією**. Подібна апроксимація ґрунтується на розбитті часової осі на достатньо малі відрізки. Тоді значення змінних стану будуть обчислюватися в дискретні моменти часу $t = 0, T, 2T, \ldots$, де T є кроком дискретності у часі. Цей метод широко використовується для числового аналізу і для обчислення на цифрових комп'ютерах. Якщо крок дискретності T — досить малий порівняно зі сталими часу системи, то точність обчислень буде цілком припустимою.

Рівняння стану лінійної системи має вигляд:

$$\dot{x} = Ax + Bu\,.$$

Скористаємось класичною формулою похідної:

$$\dot{x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

для обчислення значень $x(t)$ при розбитті t на малі відрізки $\Delta t = T$.

Отримаємо **апроксимацію** похідної

$$\dot{x} = \frac{x(t+T) - x(t)}{T}$$

і підставимо її в рівняння:

$$\frac{x(t+T) - x(t)}{T} \approx Ax(t) + Bu(t).$$

Звідси

$$x(t+T) \approx TAx(t) + x(t) + TBu(t) = (TA + I)x(t) + TBu(t), \quad (5.40)$$

де t розбито на малі відрізки тривалістю T. Тому час t набуває дискретних значень $t = kT$, $k = 0,1,2,3,...$ Тоді вираз (5.40) набуває вигляду:

$$x[(k+1)T \approx (TA + I)x(kT) + TBu(kT). \quad (5.41)$$

Таким чином, значення вектора стану в $(k + 1)$-й момент часу визначається через значення x і u в k-й момент часу. Вираз (5.41) можна записати інакше:

$$x(k+1) \approx \psi(T)x(k) + TBu(k), \quad (5.42)$$

де $\psi(T) = (TA + I)$.

Вираз (5.42) показує, що визначення $x(t)$ зводиться до обчислення його дискретної апроксимації $x(k + 1)$ на основі попереднього значення $x(k)$. Ця рекурентна операція, відома як **метод Ейлера**, являє собою послідовність обчислень і просто реалізується на цифрових комп'ютерах. Для розрахунків можуть також бути використані більш точні методи чисельного інтегрування, наприклад методи Рунге–Кутта.

Приклад 5.13. Неперервна та дискретна модель епідемії.

У біології також важливо визначати відповідні моделі. Так поширення епідемічного захворювання описується системою нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha x_1 - \beta x_1 x_2 + u_1(t), \\ \dot{x}_2 &= -\beta x_1 x_2 - \gamma x_2 + u_2(t), \\ \dot{x}_3 &= \alpha x_1 + \gamma x_2, \end{aligned} \quad (5.43)$$

де взаємодію між групами населення подано нелінійним членом $x_1 x_2$.

Вважатимемо, що $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $u_1(t) = 0$, $u_2(0) = 1$ і $u_2(k) = 0$ при $k \geq 1$. Виберемо крок дискретності T = 0,2 діб і задамо початкові умови у вигляді $x^{\mathrm{T}}(0)$ = [1 0 0]. Тоді, підставляючи в рівняння (5.43) $t = kT$, отримаємо рівняння

$$\frac{x_1(k+1) - x_1(k)}{T} = -x_1(k) - x_1(k)x_2(k),$$

$$\frac{x_2(k+1) - x_2(k)}{T} = x_1(k)x_2(k) - x_2(k) - u_2(k),$$

$$\frac{x_3(k+1) - x_3(k)}{T} = x_1(k) + x_2(k).$$

Визначимо із цих рівнянь $x_i(k+1)$:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 0{,}8x_1(k) - 0{,}2x_1(k)x_2(k), \\ x_2(k+1) &= 0{,}8x_2(k) - 0{,}2x_1(k)x_2(k) + u_2(k), \\ x_3(k+1) &= x_3(k) - 0{,}2x_1(k) + 0{,}2x_2(k). \end{aligned} \qquad (5.44)$$

У перший момент часу, для $t = T$ маємо:

$$x_1(1) = 0{,}8x_1(0) = 0{,}8,$$

$$x_2(1) = 0{,}2u_1(0) = 0{,}2,$$

$$x_3(1) = 0{,}2x_1(0) = 0{,}2.$$

Ще раз використовуючи рівняння (5.44) і враховуючи, що $u_2(1) = 0$, отримаємо:

$$x_1(k+1) = 0{,}8x_1(k) - 0{,}2x_1(k)x_2(k) = 0{,}608,$$

$$x_2(k+1) = 0{,}8x_2(k) - 0{,}2x_1(k)x_2(k) + u_2(k) = 0{,}192,$$

$$x_3(k+1) = x_3(k) - 0{,}2x_1(k) + 0{,}2x_2(k) = 0{,}40.$$

Аналогічно, при $t = 3T$ маємо:

$$x_1(3) = 0,463\,,\ x_2(3) = 0,177\,,\ x_3(3) = 0,56\,.$$

Подальші обчислення виконуються аналогічно.

Годинні характеристики лінійних систем обчислюються шляхом використання перехідної матриці стану або за допомогою дискретної апроксимації рівняння стану. Для нелінійних систем найбільш придатним є метод дискретизації рівняння стану.

Приклад 5.14. Модель електроприводу принтера у просторі стану.

У принтері для комп'ютера друкувальний пристрій горизонтально переміщається уздовж сторінки за допомогою пасового приводу з двигуном постійного струму (рис. 5.25). У цій конструкції положення друкувального пристрою вимірюється за допомогою фотодатчика, а натягнення паса змінює його коефіцієнт пружності. Для вибору належних параметрів електродвигуна, шківа, регулятора і аналізу впливу коефіцієнта пружності паса на характеристики системи потрібно розробити модель приводу. Після цього визначимо передатну функцію системи і виберемо решту її параметрів.

На рис. 5.25 зображено модель пасового приводу. Припускається, що коефіцієнт пружності паса дорівнює k; радіус шківа — r; кут повороту вала двигуна — u; кут повороту правого шківа — u_p; маса друкувального пристрою — m; його положення — $y(t)$. Виходом фотодатчика є напруга U_1, пропорційна переміщенню y, тобто $U_1 = k_1 y$. Регулятор виробляє вихідну напругу U_2, яка є функцією U_1. Напруга U_2 подається на обмотку збудження двигуна. Лінеаризована залежність:

$$\nu_2 = k_2 \frac{d\nu_1}{dt}\,.$$

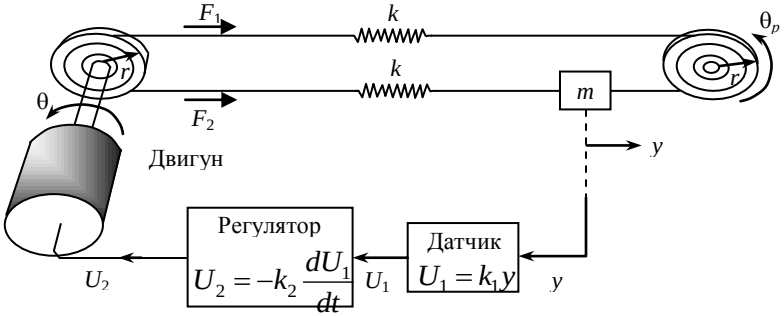


Рис. 5.25. Модель пасового приводу принтера

Зауважимо, що $y = r\theta_p$. Тоді сила натягу F_1 дорівнює:

$$F_1 = k(r\theta - r\theta_p) = k(r\theta - y).$$

Сила натягу $F_2 = k(y - r\theta)$. Сила, яка діє на масу *m*:

$$F_1 - F_2 = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

і

$$F_1 - F_2 = k(r\theta - y) - k(y - r\theta) = 2k(r\theta - y) = 2kx_1,$$

де $x_1 = k(r\theta - y)$ приймемо за першу змінну стану.

Другою змінною стану буде $x_2 = dy/dx$, тоді:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{2k}{m}x_1. \qquad (5.45)$$

Якщо як третю змінну стану вибрати $x_3 = dy/dx$, то

$$\frac{dx_1}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} - \frac{dy}{dt} = rx_3 - x_2. \qquad (5.46)$$

Диференціальне рівняння електродвигуна. При $L = 0$ струм збудження $i = v_2 / R$ і момент на валу $M_m = K_m i$.

$$M_m = \frac{K_m}{R} U_2,$$

Момент M обумовлює обертання шківа, тому

$$M = J \frac{d_2\theta}{dt_2} + b\frac{d\theta}{dt} + r\left(M_1 - M_2\right).$$

Оскільки

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{d_2\theta}{dt_2},$$

то

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{M_m - M_d}{J} - \frac{b}{J}x_3 - \frac{2kr}{J}x_1,$$

де

$$M_m = \frac{K_m}{R} U_2 \text{ і}$$

$$U_2 = -k_1 k_2 = \frac{dy}{dt} = -k_1 k_2 x_2.$$

У результаті отримуємо:

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{K_m k_1 k_2}{JR} x_2 - \frac{b}{J}x_3 - \frac{2kr}{J}x_1 - \frac{Td}{J}. \qquad (5.47)$$

Рівняння (5.45)–(5.47) описують динаміку системи. Диференціальне рівняння стану в векторно-матричному вигляді:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & r \\ \frac{2k}{m} & 0 & 0 \\ -\frac{2kr}{J} & -\frac{K_m k_1 k_2}{JR} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J} \end{bmatrix} M_d.$$

Приклад 5.15. Перевернутий маятник як фізична модель нестійкої системи ракети на старті.

Проблема керування положенням ракети на початковій стадії польоту: ракета знаходиться в рівновазі, якщо $\theta(t) = 0$ і $d\theta/dt = 0$. Ця проблема класично моделюється у вигляді перевернутого маятника, який змонтовано на візку (рис. 5.26).

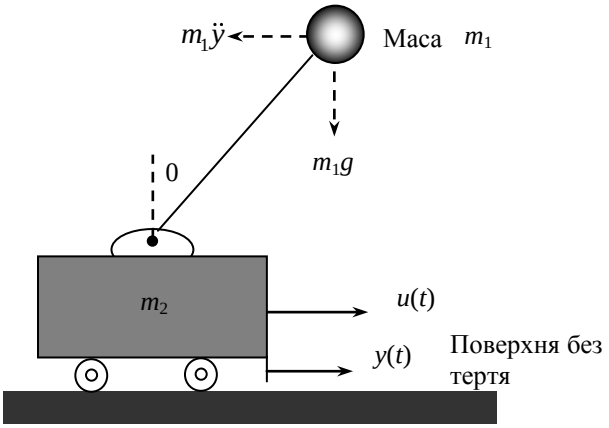


Рис. 5.26. Перевернутий маятник на візку

Візок повинен рухатися таким чином, щоб маса m завжди займала близьке до вертикального положення. Як змінні стану природно прийняти кут відхилення маятника $\theta(t)$ і переміщення візка $y(t)$. Диференціальне рівняння, яке описує рух цієї системи, можна отримати, записавши вираз для суми сил, які діють у горизонтальному напрямку, і суми моментів відносно точки обертання. Вважатимемо, що $m_2 >> m_1$ і кут відхилення від вертикалі θ є малим, тому рівняння є лінійним. Сума сил, які діють у горизонтальному напрямку, дорівнює

$$m_2\ddot{y} = m_1 l\ddot{\theta} - u(t) = 0, \qquad (5.48)$$

де $u(t)$ — сила, прикладена до візка; l — відстань від маси m_2 до точки обертання.

Сума моментів відносно точки обертання

$$m_2 l\ddot{y} = m_1 l_2 \ddot{\theta} - m_1 \lg\theta = 0. \qquad (5.49)$$

Виберемо змінні стану для двох рівнянь другого порядку $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})$. Рівняння (5.48) і (5.49) із врахуванням цих змінних стану:

$$m_2 \dot{x}_2 + m_1 l \dot{x}_4 - u(t) = 0, \qquad (5.50)$$

$$\dot{x}_2 + l\dot{x}_4 - g x_3 = 0. \qquad (5.51)$$

Для того, щоб отримати необхідні диференціальні рівняння першого порядку, визначимо із (5.51) $l\dot{x}_4$ і підставимо його в рівняння (5.50):

$$m_2 \dot{x}_2 + m_1 g x_3 = u(t),$$

де враховано, що $m_2 >> m_1$.

Далі, підставляючи $\dot{x}_2$ із (5.50) в рівняння (5.51), отримаємо:

$$m_2 \dot{x}_2 + m_2 g x_3 + u(t) = 0.$$

Таким чином, отримаємо систему у змінних стану:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\frac{mg}{M} x_3 + \frac{1}{M} u(t),$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = -\frac{g}{l} x_3 - \frac{1}{Ml} u(t).$$

Звідси отримуємо матриці системи вигляду (5.26):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(mg/M) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & g/l & 0 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ -1/Ml \end{bmatrix}.$$

5.7. Моделі об’єктів із розподіленими параметрами та їх ідентифікація

5.7.1. Моделювання об’єктів із розподіленими параметрами

У таких об’єктах [2; 3; 4] параметри розподіляються вздовж просторових координат. Так, у газопроводі тиск, а в теплообмінній трубці температура поступово змінюється уздовж осі труб. У насадковому абсорбері поступово змінюється з висотою насадки концентрація зрошуючої рідини, а також концентрація компонентів газу, що піднімається їй назустріч. У теплообмінній стінці змінюється температура за її товщиною.

Математичними моделями об’єктів із просторовим розподіленням параметрів є рівняння статики чи динаміки виділеної нескінченно малої акумулюючої області разом із граничними умовами зміни визначального параметра, а для динамічних моделей ще й початковими умовами, тобто просторове розподілення визначального параметра в початковий момент часу.

Моделювання об’єктів із просторовим розподіленням параметрів пов’язане із врахуванням напрямків зміни. Вони можуть змінюватися відповідно одному просторовому напрямку (осі) X, наприклад, вздовж осі трубопроводу чи через теплообмінну стінку; двом (X, Y) чи трьом взаємно ортогональним напрямкам (X, Y, Z). Можлива радіальна зміна параметра, наприклад тепловиділяючого елемента (ТВЕЛ) атомного реактора.

Можливе також поєднання радіального та лінійного розподілення параметра, наприклад температури у трубчатому каталітичному реакторі; сферичне розподілення параметра, наприклад, яскравості світла від точкового джерела.

Для всіх цих випадків підхід до вибору нескінченно малої акумулюючої ємності буде різним: це може бути вісь нескінченно малої довжини у випадках одновимірного лінійного розподілення параметра, прямокутник чи паралелепіпед нескінченно малих розмірів у випадках двовимірного лінійного розподілення; це може бути сфера нескінченно малої товщини у випадку сферичного розподілення параметра.

Раціональний вибір форми та місця розшатування нескінченно малої області під час математичного опису об’єктів із розподіле-

ними параметрами пов'язаний із об'ємними формами об'єкта, а головне, з напрямками просторового розподілення визначальних параметрів. Нескінченно мала акумулююча область у цьому випадку повинна вибиратися таким чином, щоб можна було її розмістити в довільному місці об'єкта. Граничні зміни визначального параметра в просторових межах об'єкта задаються граничними умовами. Граничні умови, таким чином, визначають діапазон змін визначальних параметрів і, крім того, визначають можливості просторового розташування вибраної нескінченно малої ємності. Щоб вибрану нескінченно малу акумулюючу область можна було віднести до кожної точки об'єкта моделювання, необхідно вибрати певну систему координат і розташувати її таким чином, щоб вона відповідала напрямкам зміни визначального параметра.

Виходячи з цього, можна зробити висновок, що математичне моделювання об'єктів із розподіленими параметрами пов'язане з певними просторовими системами координат, у яких розташовують об'єкт моделювання відповідно до напрямків розподілення (зміни) визначального параметра.

Застосовуються декартова, циліндрична та сферична системи координат. Розглянемо це на конкретних прикладах.

Тепловий об'єкт має просторові межі, на яких температура відповідним чином пов'язана з навколишнім середовищем. Цей зв'язок температури з навколишнім середовищем на межах об'єкта моделювання називається *граничними умовами*. Динамічні моделі, які розглядають зміну визначального параметра в часі, містять у собі також початкові умови визначального параметра, тобто його розподілення в початковий момент часу.

Таким чином, математична модель динаміки об'єкта з розподіленими параметрами містить у собі рівняння динаміки характерної для даного об'єкта нескінченно малої області, граничні та початкові умови зміни визначального параметра.

Для теплообмінних процесів теплообміну використовують граничні умови чотирьох видів.

1) Граничні умови першого виду визначають визначальний параметр, наприклад $\theta(x, y)$, на межах об'єкта, тобто коли просторова координата X набуває граничних значень від $X = 0$ до $X = 1$

$$\theta(t,x)_{x=0} = \theta_0(t),\Big|$$

$$\theta(x,t)\big|_{x=1}(t).$$

2) Граничні умови другого виду задають тепловий потік на межах об'єкта, наприклад:

$$\lambda \frac{\partial \theta(t,x)}{\partial x}\bigg|_x = q_0(t),$$

де λ — коефіцієнт теплопровідності; $q_0(t)$ — тепловий потік.

Знаком «мінус» вказаний протилежний напрямок теплового потоку від напрямку збільшення температури.

3) Граничні умови третього виду визначають закон теплообміну між середовищами на межах об'єкта, наприклад конвективного теплообміну:

$$-\lambda \frac{\partial \theta(t,x)}{\partial x}\bigg|_x = x_1 = a\left[\theta(t,x)\big|_x = x_1\theta_1(t)\right], \qquad (5.52)$$

де a — коефіцієнт тепловіддачі; $\theta_1(t)$ — температура середовища, яке контактує з об'єктом.

4) Граничні умови четвертого виду визначають умови теплообміну двох твердих тіл, для яких спостерігається однаковість температур та теплових потоків на межах об'єкта:

$$\theta(x,t)\big|_x = x_1 = \theta_1(x,t)\big|_x = x_1,$$

$$\lambda \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\bigg|_x = x_1 = -\lambda \frac{\partial \theta_1(x,t)}{\partial x}\bigg|_x = x_1.$$

Моделювання об'єктів із розподіленими параметрами інших типів пов'язано з граничними умовами меншої різноманітності. Найчастіше у цих випадках зустрічаються граничні умови першого роду, наприклад для об'єктів із просторовим розподіленням тиску, концентрації та ін.

Для рівнянь у циліндричній системі координат також можна записати граничні умови чотирьох видів:

1) граничні умови першого виду:

$$\theta(r,t)\big|_{r=r0} = \theta_0(t),$$

$$\theta(r,t)\big|_{r=r1} = \theta_1(t);$$

2) граничні умови другого виду:

$$\lambda \frac{\partial \theta(r,t)}{\partial r}\bigg|_{r=r1} = q_0(t);$$

3) граничні умови третього виду:

$$\lambda \frac{\partial \theta(r,t)}{\partial r}\bigg|_{r=r0} = a\left[\theta(r,t)\big|_{r=r0} - \theta_1(t)\right];$$

4) граничні умови четвертого виду:

$$\theta(r,t)\big|_{r=r1} = \theta_1(t)\,|_{r=r1},$$

$$\lambda \frac{\partial \theta(r,t)}{\partial r}\bigg|_{r=r1} \lambda \frac{\partial \theta(r,t)}{\partial r}\bigg|_{r=r1}.$$

Граничні умови в сферичній системі координат подібні до циліндричної системи.

Дослідження динаміки об’єктів із розподіленими параметрами проводиться в області годинних характеристик. Однак розв’язком диференціального рівняння динаміки є сім’я годинних характеристик. Конкретизація певної годинної характеристики пов’язана із задàнням *початкових умов*, тобто задàнням значення визначального параметра в початковий момент часу, як наприклад для визначальної змінної $\theta(x,y)$

$$\theta(t,x)\big|_{x=0} = (t). \qquad (5.53)$$

5.7.2. Класифікація математичних моделей об’єктів із розподіленими параметрами

Статичні моделі. Для одновимірного розподілення в просторі — це звичайні диференціальні рівняння з просторовою незалежною змінною, а у випадках дво- чи тривимірного розподілення — це

диференціальні рівняння у частинних похідних із просторовими незалежними змінними. Статичні моделі з розподіленими параметрами можна отримати шляхом складання балансних рівнянь для нескінченно малих областей без врахування зміни їх визначальних параметрів у часі або з динамічних моделей шляхом виключення з числа змінних часу, тобто приймаючи стале в часі значення змінних моделі.

Статичну модель теплового об'єкта з тривимірним просторовим розподіленням параметрів у декартовій системі координат отримаємо із динаміки та граничних умов, наприклад третього виду (5.52), прийнявши, що змінні не залежать від часу:

$$a\left(\frac{\partial^2\theta(x,y,z,)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta(x,y,z,)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta(x,y,z,)}{\partial z^2}\right)=-\frac{q}{\rho c}. \quad (5.54)$$

Граничні умови третього виду:

$$\begin{cases} -\lambda\left.\dfrac{\partial\theta(x,y,z)}{\partial x}\right|_{x=0}=a_x\left[\theta_0-\theta(x,y,z)\big|_{x=0}\right], \\ -\lambda\left.\dfrac{\partial\theta(x,y,z)}{\partial y}\right|_{x=0}=a_y\left[\theta_0-\theta(x,y,z)\big|_{x=0}\right], \\ -\lambda\left.\dfrac{\partial\theta(x,y,z)}{\partial z}\right|_{x=0}=a_z\left[\theta_0-\theta(x,y,z)\big|_{x=0}\right]. \end{cases}$$

Статичну модель у циліндричній системі отримаємо із динаміки і граничних умов:

$$a\left(\frac{\partial^2\theta(x,r,\varphi,)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta(x,r,\varphi,)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\theta(x,r,\varphi,)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\theta(x,r,\varphi,)}{\partial\varphi^2}\right)=-\frac{q}{\rho c}.$$

Граничні умови:

$$\begin{cases} -\lambda \left.\dfrac{\partial\theta(x,r,\varphi)}{\partial x}\right|_{x=x_1} = a_x\left[\theta_0 = \theta(x,r,\varphi)\big|_{x=x_1} - \theta_1\right], \\ -\lambda \left.\dfrac{\partial\theta(x,r,\varphi)}{\partial r}\right|_{r=r_1} = a_r\left[\theta_0 = \theta(x,r,\varphi)\big|_{r=r_1} - \theta_1\right], \\ -\lambda \left.\dfrac{\partial\theta(x,r,\varphi)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_1} = a_\varphi\left[\theta_0 = \theta(x,r,\varphi)\big|_{\varphi=\varphi_1} - \theta_1\right]. \end{cases}$$

Статичну модель у сферичній системі координат отримаємо із динаміки з врахуванням, що $\dfrac{\partial\theta}{\partial t} = 0$:

$$a\left(r\frac{d^2\theta(r)}{dr^2} + 2\frac{d\theta(r)}{dr}\right) = -\frac{rq}{\rho c}$$

граничні умови:

$$-\lambda \left.\frac{d\theta(r)}{dr}\right|_{r=r_1} = a\left(\theta(r)\big|_{r=r_1} - \theta_1\right).$$

Розв'язок статичної моделі визначає розподілення визначального параметра уздовж просторових координат. Це стаціонарне поле розподілення визначального параметра.

Приклад 5.16. Визначити залежність $\theta(x) = f(\theta_1, \theta_0)$ одновимірного теплового поля в стінці завтовшки δ із статичної моделі (5.53) та (5.54) від зовнішніх температур θ_{x_0} та θ_{x_1}:

$$a\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} = -\frac{q}{\rho c}, \tag{5.55}$$

$$\begin{cases} -\lambda \left.\dfrac{d\theta(x)}{dx}\right|_{x=0} = a\left[\theta_0 - \theta(x)\big|_{x=0}\right], \\ -\lambda \left.\dfrac{d\theta(x)}{dx}\right|_{x=\delta} = a_1\left[\theta(x)\big|_{x=\delta} - \theta_1\right]. \end{cases} \tag{5.56}$$

Спростимо рівняння (5.55):

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} = -\frac{q}{\lambda},$$

розв'язок якого шукатимемо у вигляді:

$$\theta(x) = C_0 + C_1 x - \frac{q}{2\lambda} x^2. \qquad (5.57)$$

Для визначення констант C_0 та C_1 скористуємося граничними умовами (5.56). Для цього потрібно мати $\theta(x)$ і $\frac{d\theta(x)}{dx}$. Похідна від (5.57):

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = C_1 - \frac{q}{\lambda} x. \qquad (5.58)$$

Підставимо вирази (5.57) та (5.56) в рівняння (5.56):

$$\begin{cases} -\lambda C_1 = a(\theta_0 - C_0), \\ -\lambda\left(C_1 - \frac{q}{\lambda}\delta\right) a_1\left(C_0 + C_1\delta - \frac{q}{\lambda}\delta^2 - \theta_1\right). \end{cases} \qquad (5.59)$$

І розв'яжемо систему рівнянь (5.59) відносно C_0 та C_1. Тоді

$$C_0 = \frac{\theta_0\left(\delta + \frac{\lambda}{a_1}\right) + \frac{\lambda}{a}\theta_1 + q\frac{\delta}{a}\left(\frac{\lambda}{a_1} + \frac{\delta}{2}\right)}{\delta + \frac{\lambda}{a_1} + \frac{\lambda}{a}},$$

$$C_1 = \frac{\theta + q\frac{\delta}{a}\left(\frac{\lambda}{a_1} + \frac{\delta}{2}\right) - \theta_0}{\delta + \frac{\lambda}{a_1} + \frac{\lambda}{a}}.$$

Підставивши θ_0 та θ_1 в рівняння (5.57) та спростивши, отримаємо рівняння теплового поля в стінці:

$$\theta(x)=k\left[\theta_0\left(\frac{\delta-x}{\lambda}+\frac{1}{a_1}\right)+\theta_1\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\right)\right]+$$

$$+q\frac{k\delta^2}{\lambda}\left\{\left(\frac{\lambda}{a\delta}+\frac{x}{\delta}\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{\delta}{2\lambda}\right)-\frac{1}{k}\left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right\}, \qquad (5.60)$$

де $k=\left(\frac{1}{\grave{a}}+\frac{\delta}{\lambda}+\frac{1}{a_1}\right)^{-1}$.

Із розв'язку статичної моделі (5.60) отримаємо залежності:

$$\theta(x)=k\left(\frac{\delta-x}{\lambda}+\frac{1}{a_1}\right)\theta_0,$$

$$\theta(x)=k\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\right)\theta_1.$$

Приклад 5.17. Визначимо залежність $\theta(r)=(\theta_0,\theta_1)$ теплового поля статичної моделі для радіального розподілення температури:

$$a\left(r\frac{d^2\theta(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\theta(r)}{dr}\right)=-\frac{q}{\rho c}, \qquad (5.61)$$

$$-\lambda\frac{d\theta(r)}{dr}\bigg|_{r=r_0}=a\left(\theta_0-\theta(r)\big|_{r=0}\right), \qquad (5.62)$$

$$-\lambda\frac{d\theta(r)}{dr}\bigg|_{r=r_0}=a_1\left(\theta(r)\big|_{r=r_1}-\theta_1\right), \qquad (5.63)$$

яке враховує вплив на $\theta_0(r)$ температур θ_0 та θ_1.

Враховуючи (5.61), отримаємо циліндричне диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2\theta(r)}{dr^2}+\frac{1d\theta(r)}{rdr}=-\frac{q}{\lambda}. \qquad (5.64)$$

Позначимо

$$\frac{d\theta(r)}{dr} = y \tag{5.65}$$

і підставимо в рівняння (5.64), яке матимемо вигляд:

$$\frac{dy}{dr} + \frac{y}{r} = -\frac{q}{\lambda}. \tag{5.66}$$

Приймемо, що

$$y = UV \tag{5.67}$$

і підставимо це в рівняння (5.66):

$$\frac{dU}{dr}V + \frac{dV}{dr}U + \frac{UV}{r} = -\frac{q}{\lambda}. \tag{5.68}$$

Виберемо V з умови, щоб

$$\frac{dV}{dr}U + \frac{UV}{r} = U\left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r}\right) = 0. \tag{5.69}$$

Для $U \neq 0$ ця умова виконується, якщо

$$V = \frac{1}{r}. \tag{5.70}$$

Дійсно, з врахуванням (5.70) та (5.69), вираз (5.68) матиме вигляд:

$$\frac{dU}{dr}\frac{1}{r} = -\frac{q}{\lambda},$$

звідки

$$dU = -\frac{q}{\lambda} r dr$$

або

$$U = -\frac{qr^2}{\lambda 2} + C_0. \tag{5.71}$$

Враховуючи (5.70) та (5.71), а також (5.67), вираз (5.65) дорівнює

$$\frac{d\theta(r)}{dr} = -\frac{qr}{\lambda 2} + \frac{C_0}{r}. \tag{5.72}$$

Проінтегруємо (5.72):

$$\theta(r) = -\frac{q}{2\lambda} - \frac{r^2}{2} + C_0 \ln r + C_1. \tag{5.73}$$

Визначимо константи C_0 та C_1, підставивши (5.72) та (5.73) в граничні умови (5.62) та (5.63) та враховуючи відповідні значення *r*:

$$-\frac{\lambda}{\alpha}\left(-\frac{q}{2\lambda}r_0 + \frac{C_0}{r_0}\right) - \frac{q}{4\lambda}r_0^2 + C_0 \ln r_0 + C_1 = \theta_0,$$

$$\frac{\lambda}{\alpha_1}\left(-\frac{q}{2\lambda}r_1 + \frac{C_0}{r_1}\right) - \frac{q}{4\lambda}r_1^2 + C_0 \ln r_1 + C_1 = \theta_1.$$

Після спрощення отримаємо:

$$-C_0\left(\ln r_0 - \frac{\lambda}{\alpha r_0}\right) + C_1 = \theta_0 + q\left(\frac{r_0^2}{4\lambda} - \frac{r_0}{2\alpha}\right),$$

$$C_0\left(\ln r_1 - \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1}\right) + C_1 = \theta_1 + q\left(\frac{r_1^2}{4\lambda} - \frac{r_1}{2\alpha_1}\right).$$

Звідси

$$C_0 = \frac{\theta_0 - \theta_1 + q\left[\frac{r_0^2 - r_1^2}{4\lambda} - \left(\frac{r_0}{2\alpha} + \frac{r_1}{2\alpha_1}\right)\right]}{\ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right) - \frac{\lambda}{\alpha_{r0}} - \frac{\lambda}{\alpha_{1r1}}}, \tag{5.74}$$

$$C_1 = \frac{\theta_1\left(\ln r_0 - \frac{\lambda}{\alpha r_0}\right) - \theta_0\left(\ln r_1 + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right) - \frac{\lambda}{\alpha r_0} - \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1}} =$$

$$= \frac{q\left[\left(\frac{r_1^2}{4\lambda} + \frac{r_1}{2\alpha_1}\right)\left(\ln r_0 - \frac{\lambda}{\alpha r_0}\right) - \left(\frac{r_0^2}{4\lambda} - \frac{r_0}{2\lambda}\right)\left(\ln r_1 + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1}\right)\right]}{\ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right) - \frac{\lambda}{\alpha r_0} - \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1}}. \quad (5.75)$$

Підставивши (5.74) та (5.75) в (5.73), отримаємо:

$$\theta(r) = \frac{\ln\frac{r_1}{r} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1}}{M}\theta_0,$$

$$\theta(r) = \frac{\ln\frac{r}{r_0} + \frac{\lambda}{\alpha r_0}}{M}\theta_1,$$

$$M = \ln\frac{r_1}{r_0} + \frac{\lambda}{\alpha r_0} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1}.$$

Передатні функції. Передатна функція представляє зображення за Лапласом відношення вихідної змінної до вхідної. Вихідною змінною об'єктів із розподіленими параметрами є визначальний параметр, розподілений у просторі. Наприклад, у моделях теплових об'єктів з просторовим розподіленням температури, визначальним параметром, а значить і виходом об'єкта, є розподілена в просторі температура, як правило, в певній точці простору $\left(\theta(x,t)\big|_{x-x_1}\right)$.

Входами об'єктів є зовнішні зміни, що впливають на їх визначальний параметр, і, звичайно, їх вплив визначають граничні умови. Для теплових об'єктів як вхідний параметр є температура одного із середовищ, з яким контактує об'єкт, на прикладі гранична умова (5.55):

$$-\lambda\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\big|_{x=0} = \alpha\left(\theta_0(t) - \theta(x,t)\big|_{x=0}\right). \quad (5.76)$$

У цьому випадку входом об'єкта може бути температура зовнішнього середовища $\theta_0(x)$, якщо $\theta(x,t)$ — визначальний параметр. Для отримання передатної функції каналу $\theta_0(x)-\theta(x,t)$ з динамічної моделі, яку подано рівнянням динаміки нескінченно малої акумулюючої області та рівняннями граничних умов [наприклад (5.76)], необхідно звести ці рівняння в одне і розв'язати його відносно вихідної величини та провести перетворення рівнянь. При зведенні рівняння динаміки нескінченно малої акумулюючої області та граничних умов виникає необхідність у розв'язанні рівняння динаміки, тобто його інтегруванні і визначенні його констант інтегрування з використанням граничних умов.

Рівняння динаміки нескінченно малої акумулюючої області можна записати в приростах, що забезпечує у цьому випадку полегшення перетворення Лапласа в зв'язку з нульовими початковими умовами всіх змінних та їх похідних у цьому випадку.

Детальніше методику отримання передатних функцій об'єктів із розподіленими параметрами розглянемо для рівняння динаміки одновимірного теплового потоку в декартовій системі координат, отриманого з рівняння динаміки з врахуванням, що:

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}=0;\frac{\partial\theta}{\partial z}=0.$$

Враховуючи це рівняння, маємо:

$$a\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}=-\frac{q(t)}{\rho c}. \qquad (5.77)$$

Граничні умови:

$$-\lambda\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}|_{x=0}=\alpha_0\left[\theta_0(t)-\theta(x,t)|_{x=0}\right], \qquad (5.78)$$

$$-\lambda\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}|_{x=\delta}=\alpha_1\left[\theta(x,t)|_{x=\delta}-\theta_1(t)\right]. \qquad (5.79)$$

Така модель має місце, наприклад, під час моделювання теплового потоку через товсту однорідну стінку з температурами

зовнішніх середовищ з одного боку $\theta_0(t)$, а з іншого — $\theta_1(t)$. Розподілена на товщині стінки температура $\theta(x,t)$ буде вихідною величиною, а температури середовищ, з якими контактує стінка — $\theta_0(t)$ та $\theta_1(t)$ будуть входами. Таким чином, можна виділити два канали впливу з передатними функціями:

$$W_1(s)=\frac{\Delta\theta(x,s)}{\Delta\theta_0(s)}, \qquad (5.80)$$

$$W_2(s)=\frac{\Delta\theta(x,s)}{\Delta\theta_1(s)}.$$

Розглянемо отримання передатної функції (5.80) із рівняння динаміки нескінченно малої акумулюючої області й граничних умов (5.78) та (5.79).

Запишемо у приростах рівняння динаміки (5.77) та граничних умов (5.78) та (5.79):

$$a\frac{\partial^2\Delta\theta(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial\Delta\theta(x,t)}{\partial t}=-\frac{\Delta q(t)}{\rho c};$$

$$-\lambda\frac{\partial\Delta\theta(x,t)}{\partial x}|_{x=0}=\alpha_0\left(\Delta\theta_0(t)-\Delta\theta(x,t)|_{x=0}\right);$$

$$-\lambda\frac{\partial\Delta\theta(x,t)}{\partial x}|_{x=\delta}=\alpha_1\left(\Delta\theta(x,t)|_{x=\delta}-\Delta\theta_1(t)\right).$$

Перетворимо ці рівняння за Лапласом, приймаючи $\frac{\partial}{\partial t}=s$, та позначимо

$$\Delta\theta(x,t)=\theta(x,t);\Delta q(t)=q(t);\ \Delta\theta_0(t)=\theta_0(t);\ \Delta\theta_1(t)=\theta_1(t);$$

$$a\frac{d^2\theta(x,p)}{dx^2}-p\theta(x,p)=-\frac{q(p)}{\rho c}, \qquad (5.81)$$

$$-\lambda\frac{d\theta(x,p)}{dx}|_{x=0}=\alpha_0\left(\theta_0(p)-\theta(x,p)|_{x=0}\right), \qquad (5.82)$$

$$-\lambda\frac{d\theta(x,p)}{dx}|_{x=\delta}=\alpha_1\left(\theta(x,p)|_{x=\delta}-\theta|_{x=\delta}-\theta_1(p)\right). \qquad (5.83)$$

Вираз (5.81) є звичайним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Його розв'язок має вимушену $\theta_{вим}$ і вільну $\theta_в$ складові:

$$\theta(x,p)=\underline{\underline{\theta}}_{вим}+\bar{\theta}_в; \qquad (5.84)$$

$$\underline{\underline{\theta}}_{вим}=-\frac{q(p)}{p\rho c};\ \bar{\theta}_в=C_0e^{S_1x}+C_1e^{S_2x},$$

де S_1 та S_2 — корені характеристичного рівняння

$$\frac{a}{s}\bar{\bar{S}}^2+1=0,\ \bar{\bar{S}}=\frac{d}{dx}. \qquad (5.85)$$

Звідси

$$S_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{s}{a}}. \qquad (5.86)$$

Вираз (5.84) із врахуванням (5.85) та (5.86):

$$\theta(x,p)=-\frac{q(p)}{p\rho c}+C_0e^{x\sqrt{\frac{p}{a}}}+C_1e^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}}. \qquad (5.87)$$

Константи інтегрування C_0 та C_1 визначимо із граничних умов (5.82) та (5.83). Для цього із виразу (5.87) знайдемо похідну

$$\frac{d\theta(x,p)}{dx}=C_0\sqrt{\frac{p}{a}}e^{x\sqrt{\frac{p}{a}}}-C_1\sqrt{\frac{p}{a}}e^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}}. \qquad (5.88)$$

Підставимо вирази (5.87) та (5.88) в рівняння граничних умов (5.82) та (5.83):

$$-\lambda\left(C_0\sqrt{\frac{s}{a}}e^{x\sqrt{\frac{s}{a}}}-C_1\sqrt{\frac{s}{a}}e^{-x\sqrt{\frac{s}{a}}}\right)_{x=0}=$$

$$=\alpha_0\left[\theta_0(s)-\left(-\frac{q(s)}{\rho c}+C_0e^{x\sqrt{\frac{s}{a}}}-C_1e^{-x\sqrt{\frac{s}{a}}}\right)_{x=0}\right];$$

$$-\lambda\left(C_0\sqrt{\frac{s}{a}}e^{x\sqrt{\frac{s}{a}}}-C_1\sqrt{\frac{s}{a}}e^{-x\sqrt{\frac{s}{a}}}\right)_{x=\delta}=$$

$$=\alpha_1\left[\left(\frac{q(s)}{\rho c}+C_0e^{x\sqrt{\frac{s}{a}}}+C_1e^{-x\sqrt{\frac{s}{a}}}\right)_{x=\delta}-\theta_1(s)\right].$$

Після підстановки значень $\overline{\overline{X}}=0$ та $\overline{\overline{X}}=\delta$, що відповідають граничним умовам, отримаємо:

$$-\lambda\left(C_0\sqrt{\frac{s}{a}}-C_1\sqrt{\frac{s}{a}}\right)=\alpha_0\left[\theta_0(s)+\frac{q(s)}{\rho c}-C_0-C_1\right];$$

$$-\lambda\left(C_0\sqrt{\frac{s}{a}}e^{\delta\sqrt{\frac{s}{a}}}-C_1\sqrt{\frac{s}{a}}e^{-\delta\sqrt{\frac{s}{a}}}\right)=$$

$$=\alpha_1\left[-\frac{q(s)}{\rho c}+C_0e^{\delta\sqrt{\frac{s}{a}}}+C_1e^{-\delta\sqrt{\frac{s}{a}}}-\theta_1(s)\right].$$

Згрупуємо складові цих рівнянь із константами C_0 та C_1:

$$\left(1-\frac{\lambda}{\alpha_0}\sqrt{\frac{p}{a}}\right)C_0+\left(1+\frac{\lambda}{\alpha_0}\sqrt{\frac{p}{a}}\right)C_1=\theta_0(p)-\frac{q(p)}{\rho c},\qquad(5.89)$$

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{s}{a}}+1\right)e^{\delta\sqrt{\frac{s}{a}}}C_0-\left(\frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{s}{a}}-1\right)e^{-\delta\sqrt{\frac{s}{a}}}C_1=\frac{q(s)}{\rho c}+\theta_1(s).\quad(5.90)$$

Розв'язавши рівняння (5.89) та (5.90) відносно C_0 та C_1, отримаємо:

$$C_0=\frac{\left(\theta_1(s)-\frac{q(s)}{\rho c}\right)\left(1+\frac{\lambda}{\alpha_0}\sqrt{\frac{s}{a}}\right)-\left(\theta_0(s)-\frac{q(s)}{s\rho c}\right)e^{-\delta\sqrt{\frac{s}{a}}}\left(1-\frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{s}{a}}\right)}{\left(1+\frac{\lambda}{\alpha_0}\sqrt{\frac{s}{a}}\right)e^{\delta\sqrt{\frac{p}{a}}}\left(1+\frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{s}{a}}\right)-e^{-\delta\sqrt{\frac{s}{a}}}\left(1-\frac{\lambda}{\alpha_0}\sqrt{\frac{s}{a}}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{s}{a}}\right)},$$

$$C_1 = \frac{\left(\theta_0(s) - \frac{q(s)}{s\rho c}\right) e^{\delta\sqrt{\frac{s}{a}}} \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{s}{a}}\right) - \left(\theta_1(s) - \frac{q(s)}{s\rho c}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha_0}\sqrt{\frac{s}{a}}\right)}{e^{\delta\sqrt{\frac{s}{a}}}\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{s}{a}}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha_0}\sqrt{\frac{s}{a}}\right) - e^{-\delta\sqrt{\frac{s}{a}}}\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha_0}\sqrt{\frac{s}{a}}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{s}{a}}\right)}. \quad (5.91)$$

Вираз (5.91) зв'язує вихідну $\theta(x,s)$ з трьома вхідними $q(s), \theta_0(s)$ та $\theta_1(s)$. Із цього виразу можемо отримати відповідно три передатні функції. Розглянемо отримання однієї з них, наприклад, каналу $\theta_0(s) \to \theta(x,s)$:

$$W(s) = \frac{\theta(x,s)}{\theta_0(s)} = \left(\frac{(1+b\beta s)e^{\left(1-\frac{x}{\delta}\right)s} - (1-b\beta s)e^{-\left(1-\frac{x}{\delta}\right)s}}{(1+bs)(1+b\beta s)e^{s} - (1-bs)(1-b\beta s)e^{s}} \right), \quad (5.92)$$

де

$$\overline{\overline{P}} = \delta\sqrt{\frac{s}{a}}; b = \frac{\lambda}{\alpha_0\delta}; \beta = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}.$$

Після підстановки констант інтегрування C_0 та C_1 остаточно отримаємо:

$$\theta(x,s) = \frac{q(s)}{s\rho c} +$$

$$+ \frac{\left(\theta_1(s) - \frac{q(s)}{s\rho c}\right)\left[\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha_0}\sqrt{\frac{s}{a}}\right)e^{x\sqrt{\frac{s}{a}}} - \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha_0}\sqrt{\frac{s}{a}}\right)e^{-x\sqrt{\frac{s}{a}}}\right]}{e^{\delta\sqrt{\frac{s}{a}}}\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha_0}\sqrt{\frac{s}{a}}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{s}{a}}\right) - e^{-\delta\sqrt{\frac{s}{a}}}\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha_0}\sqrt{\frac{s}{a}}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{s}{a}}\right)} +$$

$$+ \frac{\left(\theta_0(s) - \frac{q(s)}{s\rho c}\right)\left[\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha_0}\sqrt{\frac{s}{a}}\right)e^{(\delta-x)\sqrt{\frac{s}{a}}} + \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{s}{a}}\right)e^{-(\delta-x)\sqrt{\frac{s}{a}}}\right]}{e^{\delta\sqrt{\frac{s}{a}}}\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha_0}\sqrt{\frac{s}{a}}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{s}{a}}\right) - e^{-\delta\sqrt{\frac{s}{a}}}\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha_0}\sqrt{\frac{s}{a}}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{s}{a}}\right)}.$$

Передатну функцію (5.92) можна подати з використанням гіперболічних функцій:

$$W(s)=\frac{\theta(x,s)}{\theta_0(s)}=\frac{Sh\left[\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\overline{\overline{P}}\right]+b\beta sCh\left[\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\overline{\overline{P}}\right]}{\left(1+b^2\beta\overline{\overline{s}}^{=2}\right)Shs+b\overline{\overline{P}}(1+\beta)Ch\overline{\overline{P}}},$$

де

$$Sh\overline{\overline{P}}=\frac{e^{\overline{\overline{P}}}-e^{-\overline{\overline{p}}}}{2};\ Sh\overline{\overline{P}}=\frac{e^{\overline{\overline{P}}}+e^{-\overline{\overline{p}}}}{2};$$

$$Sh\left[\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\overline{\overline{P}}\right]=\frac{e^{\left(1+\frac{x}{\delta}\right)\overline{\overline{p}}}-e^{-\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\overline{\overline{P}}}}{2},$$

$$Sh\left[\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\overline{\overline{P}}\right]=\frac{e^{\left(1+\frac{x}{\delta}\right)\overline{\overline{p}}}+e^{-\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\overline{\overline{P}}}}{2}.$$

Годинні характеристики будуються на базі розв'язку їх рівнянь динаміки. У зв'язку з цим для побудови годинних характеристик об'єктів із розподіленими параметрами виникає необхідність розв'язання їх рівнянь динаміки. Однак, для диференціальних рівнянь у частинних похідних аналітичного розв'язку отримати не можна.

Числовий метод розв'язування рівнянь динаміки з отриманням годинних характеристик передбачає:

1. Числовий вираз коефіцієнтів такого рівняння, тобто прив'язка рівняння динаміки для конкретного об'єкта.
2. Подання аналогових (неперервних) функцій і самого рівняння у дискретному вигляді.
3. Числовий вираз граничних та початкових умов.
4. Числове розв'язання на ЕОМ дискретного рівняння з використанням граничних та початкових умов.

Для перетворення рівняння динаміки до дискретного вигляду необхідно виконати дискретизацію незалежних змінних, вхідних та вихідних функцій, їх похідних та самого рівняння.

Незалежними змінними є час t та одна або декілька просторових координат, наприклад, координата $\overline{\overline{X}}$.

Почнемо з дискретизації незалежних змінних t та X.

Вводимо крок дискретизації часу $\Delta t = \tau$ і просторової координати $\Delta x = h$. Поточне значення часу:

$$t = v\tau,$$

де v — номер кроку τ з часу.

Значення просторової координати $\overline{\overline{X}}$ можна записати

$$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{S}}h,$$

де $\overline{\overline{S}}$ — номер кроку h уздовж координати $\overline{\overline{X}}$.

Якщо в рівнянні динаміки є вхідна функція $\theta_1(t)$, вихідна функція $\theta(x,t)$, а також перша та друга частинні похідні вихідної функції $\dfrac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}$ та $\dfrac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}$, то необхідно розглянути дискретне наближення цих функцій та похідних.

$$\theta_1(t)\big|_{t=v\tau} \cong \theta_v^1;\ \ \theta(x,t)\big|_{\substack{x=sh\\ t=v\tau}} \cong \theta_{s,v}.$$

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} \cong \frac{\theta_{s,v+1}-\theta_{s,v}}{\tau} = \Delta_\tau^+. \qquad (5.93)$$

$$\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right) \cong \frac{\Delta_x^+ - \Delta_x^-}{h},$$

$$\Delta_x^+ = \frac{\theta_{s+1,v}-\theta_{s,v}}{h},\ \Delta_x^- = \frac{\theta_{s,v}-\theta_{s-1,v}}{h}.$$

Із врахуванням наведеного:

$$\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\theta_{s+1,v}-2\theta_{s,v}+\theta_{s-1,v}}{h^2}.$$

Приклад 5.18. Розглянемо перетворення до дискретної форми динамічної моделі

$$a\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}. \qquad (5.94)$$

Граничні умови

$$-\lambda\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\alpha\left[\theta^1(t)-\theta(x,t)\big|_{x=0}\right] \qquad (5.95)$$

та початкові умови:

$$\theta(x,t)\big|_{t=0}=\theta^0(x). \qquad (5.96)$$

Підставимо в рівняння динаміки (5.95) вирази (5.93) і (5.94):

$$a\frac{\theta_{s+1,v}-2\theta_{s,v}+\theta_{s-1,v}}{h^2}=\frac{\theta_{s,v+1}-\theta_{s,v}}{\tau}.$$

Визначимо із нього вихідну функцію $\theta_{s,v}$ на наступному кроці часу $\theta_{s,v+1}$:

$$\theta_{s,v+1}=\frac{a\tau}{h^2}\left(\theta_{s+1,v}+\theta_{s-1,v}\right)-\left(2\frac{a\tau}{h^2}-1\right)\theta_{s,v}. \qquad (5.97)$$

Для граничної умови (5.96) отримаємо:

$$-\lambda\frac{\theta_{s+1,v}-\theta_{s,v}}{h}\bigg|_{x=0}=\alpha\left(\theta_v^1-\theta_{s,v}\,|_{s=0}\right)$$

або

$$-\frac{\lambda}{\alpha h}\left(\theta_{1,v}-\theta_{0,v}\right)=\theta_v^1-\theta_{0,v}\ ,$$

звідки

$$\theta_{0,v}=\frac{\frac{\lambda}{\alpha h}\theta_{1,v}-\theta_v^1}{\frac{\lambda}{\alpha h}+1}. \qquad (5.98)$$

Початкову умову вихідної функції (5.97) можна в дискретній формі записати так:

$$\theta(x,t)\,|_{t=0}=\theta_{s,v}\big|_{v=0}=\theta_{s,0}\ . \qquad (5.99)$$

Отримані вирази (5.97), (5.98) та (5.99) становлять дискретну математичну модель або алгоритм реалізації на ЕОМ динамічної моделі об'єкта з розподіленими параметрами.

Величина кроку дискретизації неперервних змінних, як залежних, так і незалежних, суттєво впливає на точність дискретного моделювання неперервних функцій та рівнянь.

Існує максимально допустимий для відповідної функції крок. Якщо крок дискретизації буде більший від допустимого, то отримувана дискретна функція не відображатиме початкову аналогову. З іншого боку, моделювання на ЕОМ об'єктів із розподіленими параметрами забирає чимало часу у зв'язку з тим, що моделі таких об'єктів мають щонайменше дві незалежні змінні, наприклад t та x, і для визначення значень вихідної величини, наприклад $\theta(x,t)$, доводиться робити кроки уздовж просторової змінної x, а потім — t, тобто в розрахунках проводити покриття певної площини з координатами x, t. У зв'язку з цим малий крок із змінних x та t різко збільшує час обчислення.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. *Наведіть приклад об'єктів із розподіленими параметрами та визначте їх особливості.*
2. *Наведіть приклади математичних моделей об'єктів із розподіленими параметрами.*
3. *Як класифікуються математичні моделі об'єктів із розподіленими параметрами?*
4. *Що таке статичні моделі об'єктів із розподіленими параметрами? Наведіть приклади.*
5. *Що таке моделі об'єктів із розподіленими параметрами? Наведіть приклади.*
6. *Дайте визначення передатної функції об'єктів із розподіленими параметрами. Наведіть приклади її отримання.*
7. *Назвіть частотні характеристики об'єкта з розподіленими параметрами. Наведіть приклади.*
8. *Назвіть годинні характеристики об'єкта з розподіленими параметрами. Наведіть приклади.*
9. *Що таке дискретне подання рівнянь динаміки об'єктів із розподіленими параметрами? Наведіть приклади.*

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Методы* классической и современной теории автоматического управления. Т. 1 / под ред. Н. Д. Егупова. — М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. — 747 с.

2. *Остапенко Ю. О.* Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів керування / Ю. О. Остапенко. — К. : Радуга, 1999. — 424 с.

3. *Математичний* опис об'єктів з розподіленими параметрами 4.3 / Р. Я. Ладієв, Ю. А. Остапенко, А. І. Кубрак, М. З. Кваско. — К. : КПІ, 1974. — 149 с.

4. *Кубрак А. І.* Методи і програми для дослідження системи автоматизації / А. І. Кубрак, А. І. Жученко, Л. Д. Ярощук. — К. : УМК ВО. 1989. — 228 с.

5. *Островерхов М.Я.* Методи дослідження електротехнічних комплексів і систем/М.Я. Островерхов, А.М. Сільвестров, К.Х. Зеленський/К.: ТАЛКОМ, 2019. – 300 с.

Розділ 6

МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

6.1. Ідентифікація динамічних об'єктів

6.1.1. Активна ідентифікація динамічних об'єктів

Будь-яка реальна система завжди складніша, ніж її математична модель. Якщо розглядати задачу ідентифікації як задачу довільної апроксимації відображення множини вхідних сигналів $u(t)$ об'єкта в множину вихідних $Y(t)$, то тут має місце принцип множинності моделей (ситуація «чорної скриньки»). Існує безліч типів і структур у вибраному типі моделей, які (за відповідної оптимізації їх парметрів β) задовольнять вимогу близькості вихідних сигналів $Y(t)$ об'єкта і $Y_M(t)$ моделі. За такої постановки задачі структура і параметри моделі можуть не мати нічого спільного зі структурою і параметрами реального об'єкта. Наприклад, об'єкт, що становить собою оператор $e^{-p\tau}$ запізнення у часі і синусоїдальний сигнал $U_m \sin\omega t$ на виході, за умови що $\tau < \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega}$, може мати модель у вигляді передатної інерційної ланки першого порядку

$$W_M(s) = \frac{k}{\tau_1 s + 1},$$

яка точно відобразить вихідний сигнал об'єкта $Y_m \sin\left(\omega\left(t-\tau\right)\right)$, де $Y_m = U_m$, якщо $\frac{k}{\sqrt{\omega^2\tau_1^2+1}} = 1$ і $\varphi = -\text{arctg}\omega\tau_1 = -\omega\tau$.

При цьому структура об'єкта і моделі будуть зовсім різні. Виявити неадекватність моделі об'єкта можна, якщо на вхід їх подавати сигнал більш інформативний, ніж синусоїда, наприклад $U_m \text{sign}\sin(\omega t)$. Тоді за будь-яких k і τ_1 моделі неможливо забезпечити збіг виходів об'єкта і моделі. Збіг з точністю до малої величини ε може буди досягнено шляхом пошуку структури моделі, подібної до структури об'єкта. Але на об'єкт окрім

вхідного впливу $U(t)$ діє ще нескінченно велика кількість інших зовнішніх впливів. Тому для визначення моделі конкретної структури слід об'єкт увести в такий стан, за якого невраховані в моделі впливи будуть дуже малими.

За такої ситуації з точністю до ε можна вважати ідентичність об'єкта і моделі. При цьому модель і її коефіцієнти мають конкретний фізичний зміст.

Наприклад, літак, що летить горизонтально в спокійній атмосфері на короткому відрізку часу за невеликих відхиленнях змінних стану під дією вхідного впливу (руля висоти) відносно вихідної змінної з точністю до ε може бути поданий ланкою другого порядку

$$W_M(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{s^2 + a_1 s + a_0},$$

коефіцієнти $b_i, a_i\ (i = 1,0)$ якої матимуть конкретний фізичний зміст.

Наприклад a_0 помножене на конструктивні параметри літака — це запас аперіодичної стійкості (нормована відстань між центром мас і аеродинамічним фокусом) літака і т. ін.

Таким чином, для об'єктивного визначення фізичних параметрів реального об'єкта ідентифікації необхідно:

– увести об'єкт у стан, де суттєвими будуть лише ті змінні, які враховано в моделі;

– подати на вхід об'єкта і моделі такі керуючі впливи, які забезпечать однозначність оцінок коефіцієнтів моделі об'єкта.

У цих двох пунктах і полягає поняття активного експерименту.

Модель у вигляді передатної функції за даними активного експеримента може бути однокроковою, коли передатна функція визначається безпосередньо з експеримента або двокроковою, коли з експеримента визначається непараметрична оцінка перехідної чи імпульсивної перехідної функцій або амплітудно-частотна характеристика (І крок), а далі за ними (ІІ крок) визначається передатна функція.

6.1.2. Визначення імпульсної перехідної функції кореляційним методом

Вихідні змінні об'єкта визначаються не лише як наслідок дії детермінованого керуючого вхідного сигналу $u(t)$, але q перешкоди $e(t)$ (рис. 6.1).

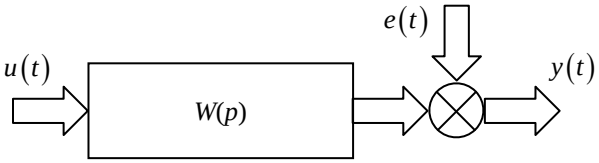


Рис. 6.1. Система «вхід–вихід–збурення»

Усі видимі перешкоди, що діють на різні частини об'єкта, приведено до виходу об'єкта та представлено у вигляді адитивного шуму. Значення вихідного сигналу

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\tau) u(t-\tau) d\tau + e(t), \qquad (6.1)$$

де $\omega(\tau)$ — імпульсивна перехідна функція.

Помноживши (6.1) на $x(t+\tau)$ та проінтегрувавши обидві частини по τ у межах $(\pm\infty)$, одержуємо:

$$R_{y,u}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) R_{u,u}(t-\tau) dt + R_{u,e}(\tau).$$

Якщо $R_{u,e}(\tau) = 0$ та $\omega(\tau) = 0,$ при $t < 0$ (умова фізичної реалізованості системи), то

$$R_{y,u}(\tau) = \int_{0}^{\infty} \omega(t) R_{u,u}(t-\tau) dt, \qquad (6.2)$$

яке називається рівнянням Віннера–Хопфа.

Це лінійне інтегральне рівняння першого роду. Його числовий розв'язок здійснюється методом апроксимуючих функцій, які обчислюються на основі методу найменших квадратів. Розв'язок рівняння дає вираження для функції ваги $\omega(t)$, тобто імпульсної перехідної функції об'єкта.

Розглянемо розв'язок рівняння (6.2), використовуючи його дискретний аналог

$$R_{y,u}(m)=\sum_{k=0}^{n}\omega(k)R_u(k-m)\Delta\tau, \tag{6.3}$$

де $\Delta\tau$ — інтервал дискретизації кореляційних функцій.

Позначимо:

$$R_{u,u}=\begin{pmatrix} R_{u,u}(0) & R_{u,u}(1) & \cdots & R_{u,u}(n-1) \\ R_{uu}(1) & R_{u,u}(0) & \dots & R_{u,u}(n-2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ R_{u,u}(n-1) & R_{u,u}(n-2) & \cdots & R_{u,u}(0) \end{pmatrix};$$

$$W=\begin{pmatrix} \omega(1) \\ \omega(2) \\ \vdots \\ \omega(n) \end{pmatrix}; R_{y,u}=\begin{pmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \vdots \\ r(n) \end{pmatrix},$$

де $r(i)=\dfrac{R_{y,u}(i)}{\Delta\tau}$.

Тоді рівняння (6.3) можна записати в матричному вигляді

$$R_{y,u}=R_{u,u}w,$$

звідки шукані значення $\varpi(1),...,\varpi(n)$ функції ваги дорівнюватимуть

$$w=R_{u,u}^{-1}R_{y,u}. \tag{6.4}$$

Через слабку обумовленість матриці $R_{u,u}$ розв'язок рівняння (6.4) нестійкий, що призводить до великих похибок розв'язку за малих змін коефіцієнтів матриць $R_{y,u}$ та $R_{u,u}$.

Більш точний розв'язок може бути отриманий методом апроксимуючих функцій із використанням методу колокації. Відповідно до цього методу апроксимують функцію ваги лінійною комбінацією з m ортогональних функцій $\gamma_k(t)$:

$$\omega(t)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varphi_k(t),$$

та обчислюють m функцій $f_k(t)$

$$f_k(t) = \int_0^t \varphi_k(\tau) R_{uu}(t-\tau) d\tau.$$

Метод колокації дає систему з m лінійних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів α_k апроксимуючої функції:

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k f_k(i) = R_{yu}(i) i = 1,2,\ldots m.$$

Оскільки в експерименті отримуються оцінки кореляційної функції, значення шуканої функції ваги є наближеним. Структура рівняння Віннера–Хопфа така, що незначні помилки у визначенні кореляційних функцій призводять до значних помилок у визначенні імпульсної перехідної характеристики $\omega(t)$. Для покращення результату бажано оцінку кореляційних функцій R_{uy}, R_{uu} апроксимувати аналітичними залежностями вигляду

$$R_{uu}(\tau) = \sigma_u^2 e^{-a|\tau|},\ R_{uu}(\tau) = \sigma_u^2 e^{-a\tau^2},\ R_{uu}(\tau) = \sigma_u^2 e^{-a|\tau|} \cos\frac{2\pi}{T}\tau.$$

Ефективним є використання кореляційного методу для визначення запізнення в об'єкті керування. Величина запізнення дорівнюватиме значенню аргументу взаємної кореляційної функції, за якого вона досягає максимуму.

Приклад 6.1. Проведемо активну ідентифікацію кореляційним методом об'єкта з передатною функцією:

$$W(p) = \frac{2,5}{(p+0,1)(p2+6p+25)}.$$

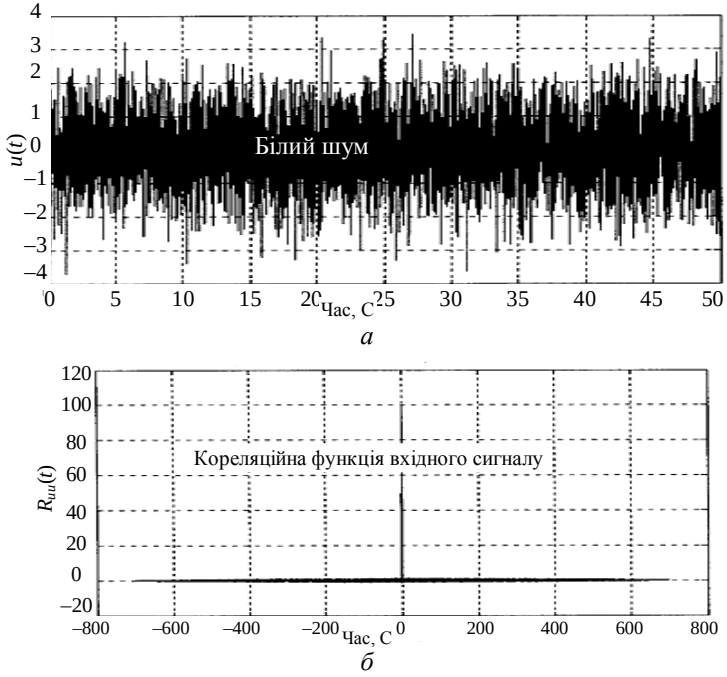
Програма ідентифікації:

```
k=2.5; p1=-1; p2=-3+4*I; p3=-3-4*I;
p=[p1 p2 p3];
wo=zpk([],p,k);
[nun,den]=tfdata(wo,'v');
wo=tf(nun,den,'td',10);%
tm=700;dt=.01;
t=0:dt:tm;
```

```
n=length(t);
u=randn(n,1);%
y=lsim(wo,u,t);%
tau=-tm:dt:tm;
ruu=xcorr(u,u,'biased');%
ryu=xcorr(y,u,'biased');%
w=impulse(wo,t);
m=1:5000;
plot(t(m),w(m),t(m),ryu(n:n+4999)/dt),grid
```

Активний експеримент

Взаємокореляційна функція $R_{u,y}$ дорівнюватиме функції ваги об'єкта, якщо кореляційна функція вхідного сигналу буде δ-функцією. Таку кореляційну функцію має сигнал типу білий шум. Якщо подати на вхід об'єкта білий шум (рис. 6.2, *а*), який має кореляційну функцію у вигляді δ-імпульса (рис. 6.2, *б*), то взаємокореляційна функція буде функція ваги ω(*t*) (рис. 6.3).



а

б

Рис. 6.2. Тест-сигнал:
а — білий шум; *б* — кореляційна функція

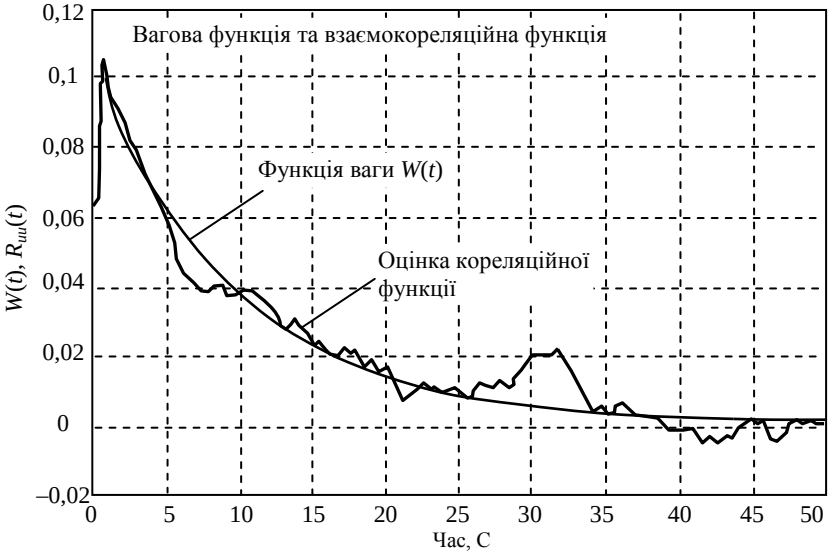


Рис. 6.3. Вагова функція та взаємокореляційна функція

Розходження кривих на рис. 6.3 обумовлено неможливістю сформувати на вході об'єкта ідеальний білий шум і похибками обчислення кореляційних функцій. Щоб переконатися в ефективності кореляційного методу, обчислимо функцію ваги і взаємокореляційну функцію гіпотетичного об'єкта:

$$W(p) = \frac{2,5}{(p+0,1)(p^2+6p+25)}.$$

Підвищити точність моделювання випадкового процесу типу білого шуму при скороченні довжини вибірки (що дуже важливо для ідентифікації реальних об'єктів) можна, якщо як модель білого шуму застосувати псевдовипадкові сигнали, характеристики яких близькі до білого шуму при обмеженій амплітуді і часу дії сигналу.

6.1.3. Псевдовипадкові двійкові послідовності максимальної довжини

Генерація псевдовипадкових двійкових послідовностей (ПВДП). Псевдовипадкову двійкову послідовність можна отримати на *N*-розрядному регістрі зсуву з від'ємним зворотним зв'язком (рис. 6.4)

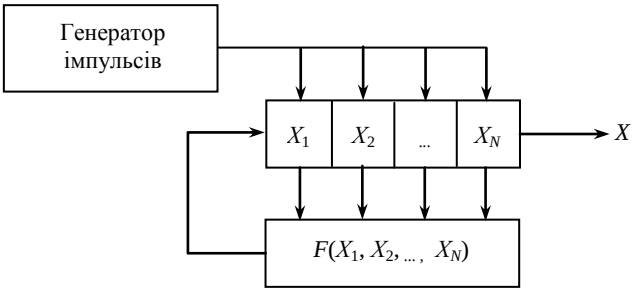


Рис. 6.4. *N*-розрядний регістр зсуву з від'ємним зворотним зв'язком

Сигнали з одиничних тригерів підсумовуються за модулем 2, а сигнал, що відповідає результату підсумовування, подається на вхід тригера першого розряду. Період T дискретності цієї послідовності задається генератором імпульсів. Максимальна довжина періоду повтору послідовності

$$L = 2^N - 1,$$

або LT секунд кожної із комбінацій входу $x_i = 0$, $i = \overline{1, N}$.

Це один із тих станів регістра зсуву, коли у всіх його розрядах зафіксовано лише нулі. У цьому разі генерація ПВДП припиняється. Максимальний для розряду N період $L = 2^n - 1$ досягається лише належним вибором номерів тригерів, з яких подається сигнал на суматор зв модулем 2.

Так, наприклад, п'ятирозрядний регістр зсуву, який складається з п'яти елементів за початкових умов 111 11, видає послідовність X, довжина періоду повтору якої

$$L = 2^{\mathrm{N}} - 1 = 2^5 - 1 = 31.$$

Для дослідження ПВДП максимальної довжини використовують характеристичний поліном, який визначає тип генератора (табл. 6.1).

З практичного погляду дуже зручно відтворювати ПВДП максимальної довжини, використовуючи рівні станів елементів регістра зсуву зі знаками +1 і –1 замість 0 і 1.

У цьому випадку логічне додавання за модулем 2 еквівалентне функції множення зі зміною знака (рис. 6.5).

Таблиця 6.1

Характеристичні поліноми псевдовипадкових двійкових послідовностей максимальної довжини

Характеристичний поліном	Довжина D (період)
$D^2 \oplus D^1 \oplus D^0$	3
$D^3 \oplus D^2 \oplus D^0$	7
$D^4 \oplus D^3 \oplus D^0$	15
$D^5 \oplus D^3 \oplus D^0$	31
$D^6 \oplus D^6 \oplus D^0$	63
$D^7 \oplus D^6 \oplus D^0 \rightarrow D^7 \oplus D^4 \oplus D^0$	127
$D^8 \oplus D^4 \oplus D^3 \oplus D^2 \oplus D^0$	255

a′b		A $\oplus$ b
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

а

a′b		A * b
–1	–1	–1
1	–1	1
–1	1	1
1	1	–1

б

Рис. 6.5. Логічні операції:
а — додавання за модулем 2; *б* — множення зі зміною знака добутку

Властивості псевдовипадкових двійкових послідовностей. У ПВДП є 2^{N-1}значень 1 і 2^{N-1}значень 0. Тому можлива комбінація 1 та 0. За винятком комбінації 000... Додавання за модулем 2 (або множення зі зміною знака добутку) будь-якої послідовності x_1 з послідовністю x_2, отриманою під час створення послідовності x_1 і зсунутою на один такт, дає послідовність x_3, яка дорівнює послідовності x_1, зсунутій на один такт (рис. 6.6).

Із рис. 6.6 видно, якщо $N = 3$, то період повтору ПВДП $L = 2^3 - 1 = 7$. Тоді за початкових умов 111

$x_1 = 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1, \ldots$

$x_2 = -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1, \ldots$

$x_3 = 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1, \ldots$

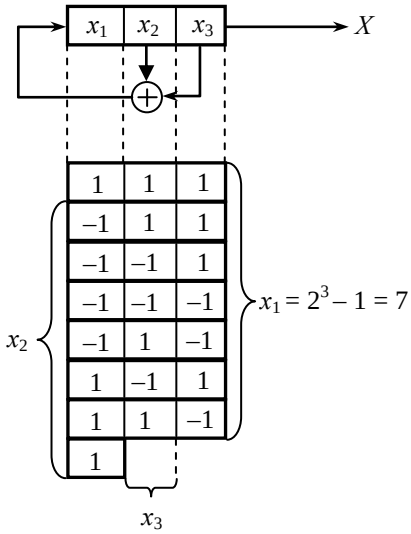


Рис. 6.6. Трирозрядний регістр зсуву для генерації ПВДП максимальної довжини x_1, x_2, x_3

Середнє значення ПВДП з рівнями 0 і 1 за період повтору L.

$$E[x] = \frac{1}{2^{N-1}} - \left\{\frac{2^N}{2}\right\} = \frac{1}{2}\frac{2^N}{2^{N-1}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{L}\right).$$

Значення величин L досить велике, тому $1/L \approx 0$. Отже,

$$E[x] = \frac{1}{2}.$$

Середнє значення ПВДП із рівнями сигналу +1 і –1 і періодом повтору L.

$$E[x] = 1/L\left\{2^{(N-1)}x(1) + \left(2^{(N-1)} - 1\right)x(-1)\right\}.$$

$$1/L2^{(N-1)} - 2^{(N-1)} + 1 = 1/L.$$

Якщо ПВДП має рівні сигналу $+a$ і $-a$, то середнє значення такої послідовності за період повтору L відповідно буде таким:

$$E[x] = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} X(i) = \frac{1}{L}a.$$

Оскільки величина періоду повтору L досить велика, вважаймо, що ця послідовність центрована.

Автокореляційна функція (АКФ) дискретної ПВДП із рівнями +1 і –1 та періодом повтору L:

$$R_{xx}(k) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} X(i)X(i-k).$$

Як показано, додавання за модулем 2 послідовності X_j дорівнює X_k і рівнозначне перемноженню зі зміною знака отриманого добутку, тобто

$$X_i X_j = -X_k.$$

Якщо $k = 0$, то АКФ дискретної ПВДП із рівнями +1 і –1 дорівнює одиниці:

$$R_{xx}(0) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} X^2(i) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} i = 1,$$

якщо $k \neq 0$, то

$$R_{xx}(K) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} X_i X_{j-k} = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}(-X_i) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} X_j.$$

Оскільки $\sum_{j=1}^{L}(-X_j) = 1$, то, якщо $k \neq 0$, тоді АКФ дискретної ПДВП із рівнями +1 і –1 і періодом повтору L обчислюють так: $R_{xx}(k) = 1$, якщо $k = nL$, n — ціле число; або $R_{xx}(k) = -\frac{1}{L}$, якщо $K \neq nL$.

Графік дискретної автокореляційної функції зображено на рис. 6.7.

У цьому випадку ПВДП з рівнями $+a$ і $-a$ і періодом повтору L, сигнал, що подається на систему ідентифікації, матиме вигляд показаний на рис. 6.8.

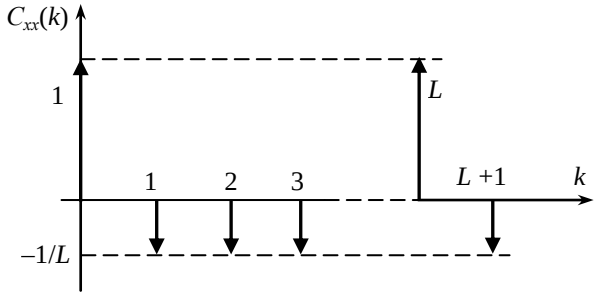


Рис. 6.7. Автокореляційна функція дискретної ПВДП із рівнями +1 і –1 і періодом повтору L

Рис. 6.8. Неперервна ПВДП з рівнями $-a$ і $+a$ і періодом повтору $L = 15$

Середнє значення неперервної ПВДП із рівнями $+a$ і $-a$ і періодом повтору L.

$$E[x] = -\frac{a}{L}.$$

Автокореляційна функція неперервної ПВДП з рівнями $+a$ і $-a$ і періодом повтору L.

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{LT}\int_0^{LT} x(t)x(t-\tau)dt,$$

якщо $|\tau| \geq T$, то випадкові величини $x(T)$ і $x(T-\tau)$ відповідають двом різним моментам дискретності і тому АКФ неперервної ПВДП

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{LT}\int_0^{LT} \left[-\grave{a}x(T)\right]dt = -\frac{a^2}{L}.$$

Якщо $|\tau| < T$, то $C_{xx}(\hbar) = a^2\left(1-(1-\frac{L+1}{L}\frac{\tau}{T}\right)$.

Графік АКФ неперервної ПВДП з рівнями $+a$ і $-a$ та періодом повтору L зображено на рис. 6.9.

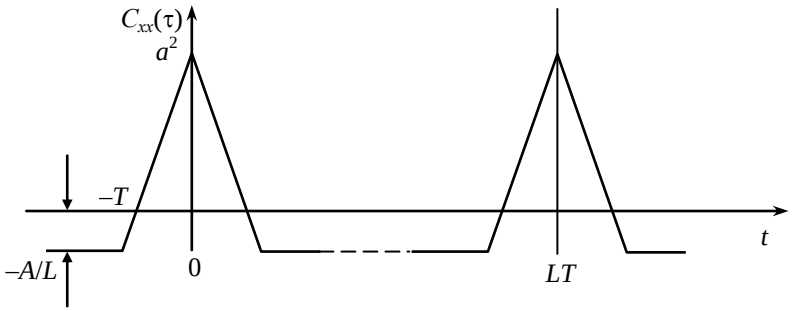


Рис. 6.9. Автокореляційна функція неперервної ПВДП із рівнями $+a$ і $-a$ та періодом повтору L

Спектральна щільність ПВДП з рівнями $+a$ і $-a$ та періодом повтору L. Її можна одержати як перетворення Фур'є (рис. 6.10), яке має висоту

$$H = \frac{a^2(L+1)}{L},$$

з основою $B = 2T$.

У цьому випадку спектральна щільність такої послідовності $S_{xx}(f) = a^2\frac{L+1}{L}T\left(\frac{\sin\pi VT}{\pi VT}\right)^2$, де $f = 1/T$ — частота генератора; T — період тактової частоти роботи генератора (інтервал часу між сусідніми зсувами).

Враховуючи періодичність і неперервність величини $\frac{a^2}{L}$ між піками АКФ неперервної ПВДП, одержимо вираз для обчислення її спектральної щільності (рис. 6.10)

$$S_{xx}(V) = a^2\frac{L+1}{L}T\left(\frac{\sin\pi fT}{\pi fT}\right)^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(f-\frac{n}{LT}\right)-\frac{a^2}{L}(f).$$

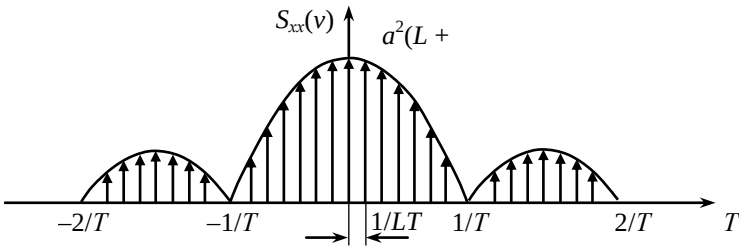


Рис. 6.10. Спектральна щільність неперервної ПВДП із рівнями $+a$ і $-a$ та періодом повтору L

Розширення частотного спектра ПВДП забезпечується збільшенням тактової частоти генератора ПВДП. Простота зміни тактової частоти, а отже й ширина спектра сигналу дозволила широко використовувати ПВДП як модель білого шуму.

Приклад 6.2. Необхідно визначити імпульсну перехідну функцію збирача рідини (рис. 6.11). У системі (рис. 6.11, *а*) рідина трубопроводом через регулюючий орган (РО) подається у збирач рідини, а з нього через технологічний вентиль (ТВ) — на виробництво. За допомогою РО та ТВ у збирачі встановлюються відповідний рівень рідини h, він реагує як на зміну положення РО, так і положення ТВ. Надалі вважатимемо зміну положення РО керувальним діянням, а зміну положення ТВ — збурювальним. У системі (рис. 6.11, *б*) рідина після проходження РО надходить спочатку до довгого трубопроводу, а вже з нього — до збирача рідини.

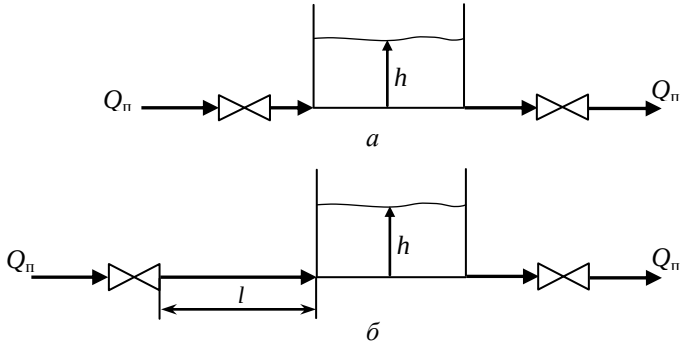


Рис. 6.11. Принципові схеми збирача рідини трубопроводом подачі рідини в збирач:
а — з коротким; *б* — з довгим

Передатна функція каналу керування «витрата рідини $Q_п$ — рівень рідини h»

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k_0}{1 + T_0 s}.$$

Передатна функція каналу системи (рис. 6.11, *б*)

$$W(s) = \frac{y(s)}{U(s)} = \frac{k_0 \exp(-pr)}{1 + T_0 s}. \qquad (6.5)$$

Обчислення значень експериментальної імпульсної перехідної функції системи з коротким трубопроводом. На вхід цієї системи подано ПВДП із рівняннями +1 і –1 та періодом повтору L = 31 (рис. 6.12, *а*) вхідну змінну системи $y(i)$ показано на рис. 6.12, *б*. Експериментальна ІПФ $W_{el}(i)$ системи пов'язана з її взаємнокореляційною функцією $R_{yu}(i)$:

$$\omega_{el}(i) = \frac{L}{a^2(L+1)} R_{yu}(i),$$

де a — амплітуда вхідного сигналу; L — період повтору ПВДП.

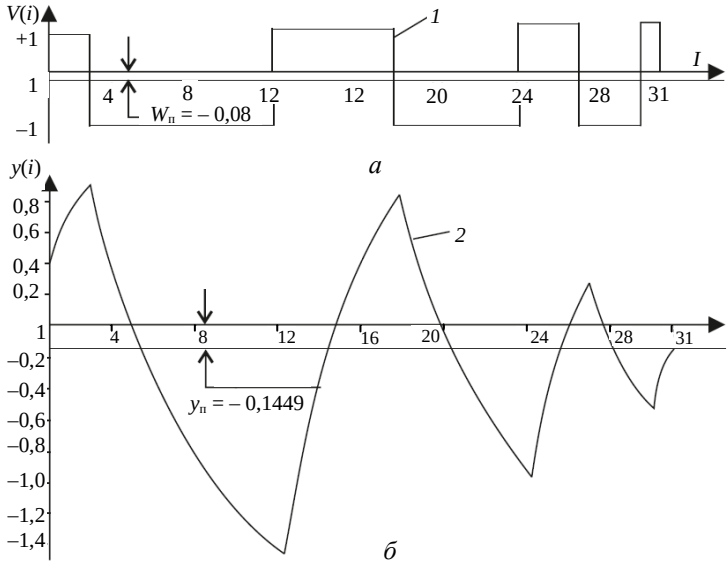


Рис. 6.12. Реалізація змінних системи (рис. 6.11, *а*):
а — вхідна змінна; *б* — вихідна змінна

Оскільки період повтору $L = 31$ біт, $a = 1$, а тривалість $T = 3$ с, то повторення $L = LT = 31 \cdot 3 = 93$ с. Підставимо L_y рівняння (6.5). Тоді:

$$W_{el}(i) = \frac{93}{1+93} R_{y,u}(i) \cong 0,989 R_{y,u}(i);$$

$$W_{el}(i) \cong R_{yu}(i).$$

Тобто експериментальна ІПФ системи за заданої ПВДП (/*a*/ = 1, $L = 31$) майже збігається з ВКФ цієї системи:

$$R_{y,u}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{k=0}^{n-k} y(i) u(i-k). \qquad (6.6)$$

Згідно з формулою (6.6) було обчислено 18 значень неперервної ВКФ системи.

Експериментальну ІПФ системи можна отримати на підставі АКФ, поділивши її значення на $T = 3$ с:

$$R_{el}(i) \cong W(i) = \frac{1}{T} R_{y,u}(i) = \frac{1}{3} R_{y,u}(k).$$

На рис. 6.13 побудовано ІПФ та дві експериментальні для різних перешкод у вимірах y. Збільшити точність указаних функцій можна, збільшивши період повторення ПВДП.

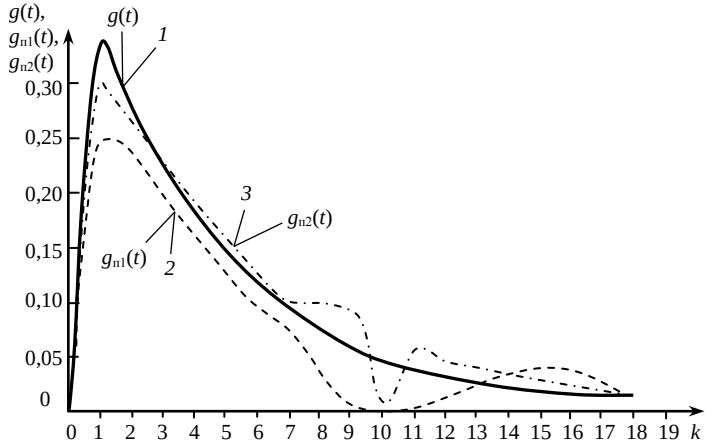


Рис. 6.13. Імпульсні перехідні функції збирача рідини (рис. 6.11, *а*):
1 — істинна ІПФ; *2* і *3* — експериментальні

Для об'єкта із запізненням τ внаслідок довгого трубопроводу подачі рідини (рис. 6.11, *б*) результат буде аналогічним, лише ІПФ і її оцінка будуть зсунуті у часі на τ.

6.1.4. Отримання непараметричних оцінок перехідної функції (ПФ) і амплітудно-фазочастотної характеристики (АФЧХ) в режимі активної ідентифікації

При плануванні експерименту вибирають метод дослідження динаміки об'єкта, а також вид досліджуваного детермінованого (із заздалегідь відомим характером зміни) впливу. Для прискорення визначення динамічних характеристик зазвичай використовують метод перехідних характеристик. Цей метод простий і дозволяє отримати динамічні характеристики об'єкта за короткий проміжок часу.

Визначення ПФ об'єкта. Визначення ПФ об'єкта необхідно робити в робочих режимах при сталих значеннях вхідних $X_{вх}(0)$ і вихідних $Y_{вих}(0)$ змінних. При плануванні експерименту оцінюють час проведення одного досліду і визначають необхідну кількість

дослідів. Якщо динаміка об'єкта досліджується за відсутності перешкод, то на кожному робочому режимі слід знімати не менше чотирьох перехідних характеристик; за наявності перешкод рекомендується записувати, залежно від їх рівня, до десяти перехідних характеристик.

Якщо на останні діють випадкові збурення, то під час експерименту реєструють деяку функцію $z(t)$, що складається з випадкового центрованого шуму $f(t)$ і корисного сигналу $h(t)$:

$$z(t) = h(t) + N(t).$$

Для виділення істинної перехідної характеристики використовують методи згладжування. Найбільш простим є згладжування ковзним середнім. Метод ковзного середнього полягає в тому, що на деякому інтервалі часу $l\Delta t$ (l — будь-яке ціле число, краще парне) здійснюють послідовне усереднення ординат z_i(i = 0, 1, 2…..n) за формулою:

$$\hat{h}\left(i + \frac{l}{2}\right) = \frac{1}{l+1}\sum_{\beta=0}^{l} Z(i+\beta),$$

де i = 0, 1, 2,..., n – l; $\hat{h}$ — оцінки ординат перехідної характеристики $h(t)$.

Інтервал $l\Delta t$ називають *пам'яттю лінійного фільтра*. Фільтр суттєво послаблює гармоніки функції $z(t)$ з частотою вище $2\pi / l\Delta t$.

За правильного вибору l виділення перехідної характеристики $h(t)$ може бути виконано достатньо точно. Зменшення пам'яті проти оптимального значення призводить до недостатнього вирівнювання експериментальних даних, а збільшення — до спотворення $h(t)$ і втрати частини ординат h_j* з індексами $i \le \frac{l}{2-1}$ і $i \ge n - l/2 + 1$.

Початкова ділянка $h(t)$ визначає структуру ПФ об'єкта, а кінцева — коефіцієнт посилення об'єкта. Для згладжування ковзним середнім необхідно починати реєстрацію $z(t)$ трохи раніше від моменту нанесення збурення і припиняти для $t > T_{зтх}$. За цих же міркувань для згладжування $z(t)$ спочатку беруть l = 2...4, потім візуально оцінюють $h^*(t)$ і, якщо необхідно, збільшують l. Потім виконують нормування згладжених характеристик $h_j(t) = h_j(t)/A_j$, де $h_j(t)$ — перехідна згладжена характеристика, експериментально

отримана в j-му досліді; A_j — амплітуда сходинки сигналу в j-му досліді. У результаті досліду маємо q перехідних характеристик $h_j(t)$, зазвичай відмінних одна від одної. Їх необхідно усереднити:

$$h(t) = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q} h_j(t).$$

Визначення частотних характеристик

Проведення експериментів з визначення АФЧХ за допомогою періодичних впливів пов'язано з технічними складностями, так як тривалість досліду на одній частоті ω в середньому в 5–10 разів більше від часу встановлення ПФ $h(t)$. У зв'язку з цим необхідно ретельно стабілізувати джерела збурень, контролювати зміщення середньої лінії вихідних коливань.

Експеримент полягає в тому, що досліджуваний періодичний із заданим періодом $T_{\text{пер}}$ вплив подають на вхід об'єкта доти, доки на його виході не встановляться коливання вихідної величини $y(t)$ з частотою $\omega = 2\pi / T_{\text{пер}}$. Ознакою сталих коливань вихідної величини $y(t)$ є ідентичність коливань за амплітудою на трьох–п'яти періодах; загальна тривалість досліду дорівнює (6–15) $T_{\text{пер}}$.

Експеримент слід починати з визначення перехідної характеристики об'єкта для отримання АФЧХ на нульовій частоті ($\omega = 0$). Потім на вхід об'єкта подають коливання з частотою $\omega_{\text{п}}$, за якої зсув фаз між вхідними і вихідними коливаннями становить 180°. Для знаходження $\omega_{\text{п}}$ досить об'єкт ввести в режим двопозиційного регулювання із зоною нечутливості, близькою до нуля.

При проведенні експерименту доцільно записувати коливання вхідних і вихідних величин на одному носії.

Важливим фактором при плануванні експерименту є вибір досліджуваного періодичного впливу $x(t)$. Бажаним видом вхідних впливів є синусоїдальні коливання. У лінійній системі коливання на виході об'єкта можуть відрізнятися від коливань на вході лише за амплітудою і фазою. Щоб отримати АФЧХ об'єкта для синусоїдальних коливань, досить обробити вихідні і вхідні коливання для ряду різних частот ω. У загальному випадку застосування синусоїдальних впливів $x(t) = A\sin\omega t$ спрощує наступну обробку результатів експерименту, проте для створення таких сигналів необхідний спеціальний генератор коливань.

Метод прямокутної хвилі не вимагає застосування генератора коливань. Періодичні коливання у вигляді прямокутної хвилі можуть створюватися вручну. Однак при використанні цього методу при обробці результатів дослідів доводиться розкладати в ряд Фур'є коливання вхідних і вихідних величин.

6.1.5. Визначення коефіцієнтів рядів, у які розкладаються передатні функції

Степеневі ряди (ряд Маклорена, ряд за від'ємними степенями) використовують як проміжні етапи ідентифікації динамічних характеристик.

Зв'язок коефіцієнтів розкладання в ряд Маклорена передатної функції з коефіцієнтами передатної функції

Для нормованої (поділеної на коефіцієнт підсилення в статиці) передатної функції маємо:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \sum_{i=0}^{N_e} E_i s^i$$

або

$$\frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_m s^m}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n} = 1 + e_1 s + e_2 s^2 + \ldots + e_{Ne} s^{Ne}. \qquad (6.7)$$

Помножимо ліву і праву частини рівняння (6.7) на знаменник передатної функції:

$$\left(1 + e_1 s + e_2 s^2 + \ldots + e_{Ne} s^{Ne}\right)(1 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n) =$$
$$= 1 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_m s^m.$$

Розкриваємо дужки та прирівнюємо коефіцієнти за однакових степенів s:

$$s^1,\ e_1 a_1 + e_0 a_1 = b_1;$$

$$s^2,\ e_2 a_0 + e_1 a_1 + e_0 a_2 = b_2;$$

$$s^3,\ e_3 a_0 + e_2 a_1 + e_1 a_2 + e_0 a_3 = b_3; \qquad (6.8)$$

$$s^{Ne},\ e_{Ne}a_0 + e_{Ne-1}a_1 + e_{Ne-2}a_2 + ... + e_0 a_{Ne} = b_{Ne}.$$

Тут $a_0 = b_0 = e_0 = 1$.

Вважатимемо, що коефіцієнти a_i та b_i з індексами i, що перевищують відповідно n та m, дорівнюють нулю. Тоді послідовно розв'язуючи систему (6.8) маємо:

$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{b_1 - e_0 a_1}{a_0}, \\ e_2 = \dfrac{b_2 - (e_0 a_2 + e_1 a_1)}{a_0}, \\ e_3 = \dfrac{b_3 - (e_0 a_3 + e_1 a_2 + e_2 a_1)}{a_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_{Ne} = \dfrac{b_{Ne} - (e_0 a_{Ne} + ... + e_{Ne-2}a_2 + e_{Ne-1}a_1)}{a_0}. \end{cases} \tag{6.9}$$

Враховуючи, що $a_0 = 1$, можна записати систему (6.9) в загальному випадку:

$$\begin{cases} e_1 = b_1 - e_0 a_1, \\ e_Z = b_Z - \sum\limits_{Z=0}^{Z-1} e_i a_{Z-i}, \end{cases} \quad 2 \le Z \le Ne. \tag{6.10}$$

Таким чином, визначивши коефіцієнти e_n, за алгоритмом (6.10) можна розрахувати за ними коефіцієнти нормованої передатної функції (6.7)

Зв'язок коефіцієнтів ряду Маклорена передатної функції з перехідною функцією

Визначатимемо ряд Маклорена для нормованої передатної функції. Тоді перехідну характеристику нормуємо, тобто зводимо до одиничного коефіцієнта передачі. Як правило, досліджуваний об'єкт має самовирівнювання, графік $h(t)$ подано на рис. 6.14.

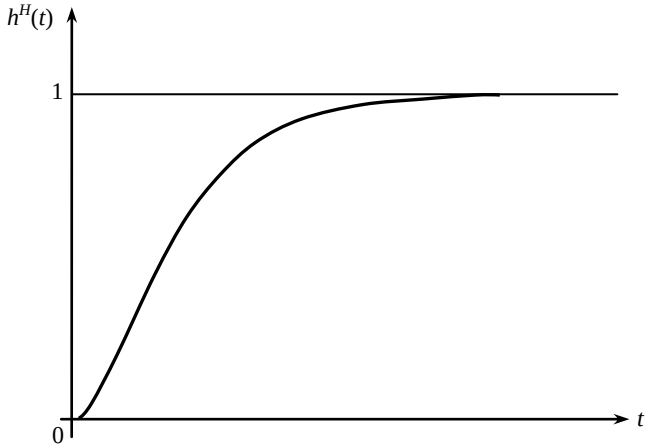


Рис. 6.14. Нормована перехідна характеристика

Ряд Маклорена для $W_{H(s)}$ можна записати так

$$W_H(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{d^s W_H(s)}{ds^i} \Big| s^i, \tag{6.11}$$

так

$$W_H(s) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i C_i s^i,$$

або так

$$W_H(s) = \sum_{i=0}^{\infty} E_i s^i.$$

Тоді

$$E_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i W_H(s)}{ds^i}. \tag{6.12}$$

$$C_i = (-1)^i E_i. \tag{6.13}$$

Позначимо

$$\begin{aligned} &C_0(t) = h_H(t); \\ &C_0 = \lim_{t \to \infty} C_0(t) = 1. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Зображення $L[\bullet]$ за Лапласом, буде таким:

$$L\left[C_0 - C_0(t)\right] = \int_0^\infty \left[C_0 - C_0(t)\right] e^{-st} dt,$$

або, з урахуванням виразу (6.14),

$$\frac{C_0}{s} - \frac{W_H(s)}{s} = \int_0^\infty \left[C_0 - C_0(t)\right] e^{-st} dt.$$

Візьмемо, за правилом Лопіталя, межу, якщо $s \to 0$

$$\lim_{s\to\infty}\left[-\frac{dW_H(s)}{ds}\right] = \int_0^\infty \left[C_0 - C_0(t)\right] dt.$$

Із рівнянь (6.12), (6.13) для $i = 1$, маємо:

$$C_1 = \int_0^\infty [C_0 - C_0(t)]\, dt\,.$$

Отже, C_1 є площею між ($1 = C_0$) та кривою $C_0(t) = h_m(t)$ (рис. 6.15). Позначимо:

$$C_1(t) = \int_0^\infty [C_0 - C_0(t)]\, dt,$$

$$C_1 = \lim_{t\to\infty} C_1(t)\,.$$

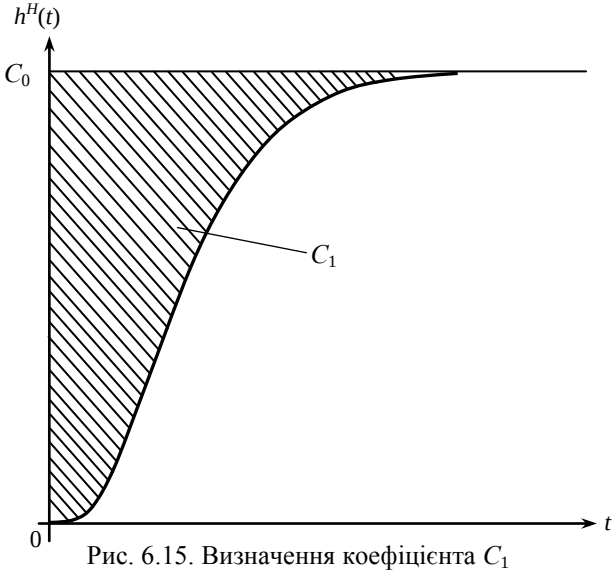


Рис. 6.15. Визначення коефіцієнта C_1

Тоді

$$L[C_1 - C_1(t)] = \int_0^\infty [C_1 - C_1(t)]\, e^{-st} dt$$

або

$$\frac{C_1}{s} - \frac{\frac{1}{s} - \frac{W_H(s)}{s}}{s} = \int_0^\infty [C_1 - C_1(t)]\, e^{-st} dt. \qquad (6.15)$$

Зводимо ліву частину рівняння (6.15) до спільного знаменника та беремо межу при $s \to 0$:

$$\lim_{s\to 0} \frac{C_1 s - 1 + W_H(s)}{s^2} = \int_0^\infty [C_1 - C_1(t)]\, dt.$$

Розкриваємо невизначеність у лівій частині, послідовно застосовуючи двічі правило Лопіталя:

$$\frac{d^2 W_n(s)}{2ds^2}\Big|_{p=0} = \int_0^\infty [C_1 - C_1(t)] dt.$$

Із урахуванням формул (6.12), (6.13), якщо $i = 2$,

$$C_2 = \int_0^{\infty} [C_1 - C_1(t)]dt.$$

Графічно це показано на рис. 6.16.

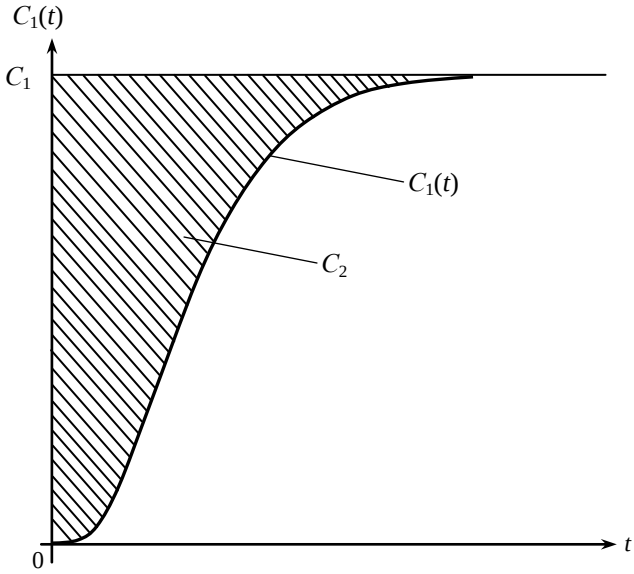


Рис. 6.16. Визначення коефіцієнта C_2

Введемо функцію:

$$C_2(t) = \int_0^{t} [C_1 - C_1(t)]dt,\ C_2 = \lim_{t\to\infty} C_2(t),$$

то аналогічно тому, як для C_2,

$$C_3 = \int_0^{\infty} [C_2 - C_2(t)]dt.$$

У загальному випадку

$$C_i = \int_0^{\infty} [C_{i-1} - C_{i-1}(t)]dt.$$

А коефіцієнти ряду Маклорена E_i відповідно дорівнюють:

$$E_i = (-1)^i C_i.$$

Зв'язок коефіцієнтів ряду Маклорена розкладання передатної функції з імпульсною перехідного функцією

Передатна функція $W(s)$ є, як відомо, зображенням за Лапласом імпульсної функції:

$$W(p) = \int_0^\infty w(t) e^{-pt} dt.$$

Розкладемо e^{-st} у ряд Маклорена

$$e^{-st} = 1 - ts + \frac{t^2}{2!} s^2 - \frac{t^3}{3!} s^3 + \ldots$$

Тоді

$$W(s) = \int_0^\infty w(t) dt - s \int_0^\infty w(t) dt + \frac{s^2}{2!} \int_0^\infty w(t) t^2 dt - \frac{s^3}{3!} \int_0^\infty w(t) t^3 dt + \ldots .$$

Інтеграл типу $\int_0^\infty w(t) t^i dt$ називають моментом s-го порядку від імпульсної характеристики:

$$M_i = \int_0^\infty w(t) t^i dt.$$

Тоді

$$W(s) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^i \frac{M_s}{i!} s^i,$$

або

$$W(s) = \sum_0^\infty E_i s^i,$$

де

$$E_i = \frac{(-1)^i}{i!} M_i = \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^\infty t^i g(t) dt.$$

Зв'язок коефіцієнтів ряду Маклорена передатної функції з амплітудно-фазовою частотою

Нехай, з експерименту маємо для частот ω_i ряд точок амплітудно-фазочастотної характеристики

$$\omega(jw_i) = R_i + jI_i,\ 0 \le i \le m.$$

Значення частот ω_i, дійсночастотних R_i та уявночастотних характеристик I_i зосереджено в однойменних масивах *W*, *R*, *I*. Передатну функцію шукатимемо у вигляді ряду:

$$\omega(s) = \sum_{i=o}^{n} e_i s^i. \qquad (6.16)$$

Відповідно до неї амплітудно-фазова характеристика дорівнює:

$$\omega(jw) = (e_0 - e_2 w^2 + e_4 w4 - e_6 w6^6) + j(e_1 w_s - e_3 w^3 + e_5 w^5 - e_7 w^7 + ...).$$

Візьмемо, для прикладу, $n = 7$. Критерієм якості *J* апроксимації буде сума квадратів відстаней між відповідними базовими та апроксимуючими точками амплітудно-фазових характеристик:

$$J = \sum_{i=0}^{m} \begin{Bmatrix} (e_0 - e_2 w_i^2 - e_4 w_i^4 - e_6 w_i^6 - R_i)^2 + \\ +(e_1 w_i - e_3 w_i^3 - e_5 w_i^5 - e_7 w_i^7 - I_i)^2 \end{Bmatrix} \to \min.$$

Умова мінімуму *J* дає систему рівнянь:

$$\frac{dJ}{de_0} = 2\sum_{i=0}^{m}\left(e_0 - e_2 w_i^2 + e_4 w_i^4 - e_6 w_i^6 - R_i\right)w_i^0 = 0,$$

$$\frac{dJ}{de_1} = 2\sum_{i=0}^{m}\left(e_1 - e_3 w_i^3 + e_5 w_i^5 - e_7 w_i^7 - I_i\right)w_i^1 = 0,$$

$$\frac{dJ}{de_2} = 2\sum_{i=0}^{m}\left(e_0 - e_2 w_i^2 + e_4 w_i^4 - e_6 w_i^6 - R_i\right)\left(-w_i^2\right) = 0,$$

$$\frac{dJ}{de_3} = 2\sum_{i=0}^{m}\left(e_1 - e_3 w_i^3 + e_5 w_i^5 - e_7 w_i^7 - I_i\right)\left(-w_i^3\right) = 0,$$

$$\frac{dJ}{de_4} = 2\sum_{i=0}^{m}\left(e_0 - e_2 w_i^2 + e_4 w_i^4 - e_6 w_i^6 - R_i\right)w_i^4 = 0,$$

$$\frac{dJ}{de_5} = 2\sum_{i=0}^{m}\left(e_1 - e_3 w_i^3 + e_5 w_i^5 - e_7 w_i^7 - I_i\right) w_i^5 = 0,$$

$$\frac{dJ}{de_6} = 2\sum_{i=0}^{m}\left(e_0 - e_2 w_i^2 + e_4 w_i^4 - e_6 w_i^6 - R_i\right)\left(-w_i^6\right) = 0,$$

$$\frac{dJ}{de_7} = 2\sum_{i=0}^{m}\left(e_1 - e_3 w_i^3 + e_5 w_i^5 - e_7 w_i^7 - I_i\right)\left(-w_i^7\right) = 0.$$

Під матрицею показано невідомі коефіцієнти при яких є елементи відповідного стовпчика матриці. Табл. 6.2 розпадається на дві незалежні системи для дійсної і уявної складових, з яких по МНК знаходяться парні і, відповідно, непарні коефіцієнти e_i ряду (6.16).

Таблиця 6.2

Табличне подання системи нормальних рівнів

$\sum w_i^0$	0	$-\sum w_i^2$	0	$\sum w_i^4$	0	$-\sum w_i^6$	0	$\sum R_i w_i^0$
0	$\sum w_i^2$	0	$-\sum w_i^4$	0	$\sum w_i^6$	0	$-\sum w_i^8$	$\sum R_i w_i^1$
$-\sum w_i^2$	0	$\sum w_i^4$	0	$-\sum w_i^6$	0	$\sum w_i^8$	0	$\sum R_i w_i^2$
0	$-\sum w_i^4$	0	$\sum w_i^6$	0	$-\sum w_i^8$	0	$\sum w_i^{10}$	$\sum R_i w_i^3$
$\sum w_i^4$	0	$-\sum w_i^6$	0	$\sum w_i^8$	0	$-\sum w_i^{10}$	0	$\sum R_i w_i^4$
0	$\sum w_i^6$	0	$-\sum w_i^8$	0	$\sum w_i^{10}$	0	$-\sum w_i^{12}$	$\sum R_i w_i^5$
$-\sum w_i^6$	0	$\sum w_i^8$	0	$-\sum w_i^{10}$	0	$\sum w_i^{12}$	0	$\sum R_i w_i^6$
0	$-\sum w_i^8$	0	$\sum w_i^{10}$	0	$-\sum w_i^{12}$	0	$\sum w_i^{14}$	$\sum R_i w_i^7$
e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	Праві частини

Визначення передатної функції об'єкта безпосередньо за амплітудно-фазовою частотною характеристикою методом найменших квадратів

Метод найменших квадратів із його здатністю згладжувати можливі похибки у вихідних даних, використовуваних для ідентифікації динамічного об'єкта, а також з його «терпимістю» до неповної відповідності апроксимуючої структури глибинним властивостям досліджуваного об'єкта можна застосовувати для ідентифікації за рядом точок амплітудно-фазової характеристики.

Нехай є ряд точок $R_i + jI_i$, $0 \le i \le m$. Тут $R_i = R(\omega_i)$, $I_i = I(\omega_i)$ — значення дійсно- та уявночастотних характеристик; ω_i — частоти.

Будемо вважати, що коефіцієнт передачі k_{ob} відомий. Значення R_i, I_i, задані в однойменних масивах, вважатимемо нормованими до одиничного коефіцієнта передачі (поділеним на k_{ob}). Тоді апроксимуюча передаточна функція має вигляд:

$$W(s) = \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_{Na} s^{Na}}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_{Na} s^{Na}}. \qquad (6.17)$$

Нехай, наприклад, $N_a = 7$.

Замінимо в рівнянні (6.17) s на $j\omega$. Тоді для точки з номером i можна записати:

$$\frac{(1 - b_2 w_i^2 + b_4 w_i^4 - b_6 w_i^6) + j w_i (b - b_2 w_i^2 + b_4 w_i^4 - b_6 w_i^6)}{(1 - a_2 w_i^2 + a_4 w_i^4 - a_6 w_i^6) + j w_i (a - a_3 w_i^2 + a_5 w_i^4 - a_7 w_i^6)} = R_i + jI_i,$$

$0 \le i \le m$,

або

$$\left[\left(1 - a_2 w_i^2 + a_4 w_i^4 - a_6 w_i^6\right) R_i - w_i \left(a_1 - a_3 w_i^2 + a_5 w_i^4 - a_7 w_i^6\right) I_i - \right.$$
$$\left. - \left(1 - b_2 w_i^2 + b_4 w_i^4 - b_6 w_i^6\right)\right] + j\left[\left(1 - a_2 w_i^2 + a_4 w_i^4 - a_6 w_i^6\right) I_i + \right. \qquad (6.18)$$
$$\left. + w_i \left(a_1 - a_3 w_i^2 + a_5 w_i^4 - a_7 w_i^6\right) R_i - w_i \left(b_1 - b_3 w_i^2 + b_5 w_i^4 - b_7 w_i^6\right)\right] = 0,$$

$0 \le i \le m$.

Ліву частину виразу (6.18) можна розглядати як вектор, що з'єднує i-ту точку амплітудно-фазової характеристики з відповідною їй апроксимуючою. Очевидно, що коротшими будуть такі

вектори для усієї заданої сукупності точок амплітудно-фазової характеристики, то краще буде апроксимація. Отже, за критерій якості апроксимації візьмемо середньоквадратичну норму:

$$\left\{\left[\left(1-a_2w_j^2+a_4w_j^4-a_6w_j^6\right)R_j-w_j\left(a_1-a_3w_j^2+a_5w_j^4-a_7w_j^6\right)I_j-\right.\right.$$

$$-I=\sum_{i=0}^{m}-(1-b_2w_j^2+b_4w_j^4-b_6w_j^6)\Big]+\Big[(1-w_j^2+a_4w_j^4-a_6w_j^6)I_j+ \quad (6.19)$$

$$\left.\left.+w_j\left(a_1-a_3w_j^2+a_5w_j^4-a_7w_j^6\right)R_j-w_j\left(b_1-b_3w_j^2+b_5w_j^4-b_7w_j^6\right)\right]^2\right\}$$

Це сума квадратів довжин векторів — відхилень між вихідними та апроксимуючими точками. З умови мінімуму (6.19) отримаємо дві незалежні системи нормальних рівнянь МНК, розв'язавши які отримаємо шукані коефіцієнти передатної функції (6.17).

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. В чому різниця між режимами активної і пасивної ідентифікації?
2. За якого сигналу на вході об'єкта імпульсна перехідна функція буде співпадати з взаємокореляційною?
3. Як будуються і які характеристики мають псевдовипадкові послідовності максимальної довжини?
4. Як побудувати непараметричну оцінку перехідної функції?
5. Яким чином з експеримента визначити частотні характеристики системи?
6. Як маючи коефіцієнти ряда Маклорена визначити коефіцієнти передаточної функції?
7. Поясніть метод Сімою:
- як від перехідної функції $h(t)$ перейти до нормованої $h_н(t)$?
- чому площі між усталеним і поточним значеннями C_i визначають коефіцієнти ряда Маклорена?
8. Як по амплітудо-фазо-частотній характеристиці (АФЧХ) визначити коефіцієнти ряда Маклорена?
10. Як безпосередньо за методом найменших квадратів перейти від АФЧХ до передаточної?

6.2. Методи он-лайн-ідентифікації передатних функцій об'єктів

6.2.1. Ортогональні моделі

Йтиметься про ідентифікацію об'єктів у реальному часі (он-лайн), яка має місце в адаптивних системах керування. Для більшої наочності розглянемо неперервні процеси, які однак, як показано в розд. 4, за необхідності легко переводяться в дискретні.

Вважатимемо, що параметри об'єкта змінюються у часі набагато повільніше від процесу налагодження коефіцієнтів моделі, а процес налагодження набагато повільніший від зміни змінних стану об'єкта. Такий режим називається *квазістаціонарним*.

Для більшої наочності також змінну Лапласа за нульових початкових умов s прирівняємо до оператора $s = p = \frac{d}{dt}$. Тоді графічно передатні функції $W(s)$ та інтегрально-диференціальні оператори $W(p)$ перетворення входу в вихід у часі будуть тотожними, що суттєво спрощує зображення структурних схем системи.

Найбільш зручними (в сенсі адаптації складності структури моделей вхід-вихід) є ортогональні моделі:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i W_i(p) U(t), \quad p = d/dt. \tag{6.20}$$

Тут невідомі параметри β_i входять лінійно, а оператори $W_i(p)$ перетворюють вхідний сигнал $U(t)$ на систему ортогональних на інтервалі T з вагою $w(t)$ функцій $\{\varphi_i(t)\}$:

$$\varphi_з(t) = W_i(p) U(t),$$

$$\int_0^T w(t)\varphi_i(t)\varphi_j(t)\,dt = \begin{cases} 0, i \neq j \\ c \neq 0, i = j. \end{cases}$$

Клас вхідних сигналів $U(t)$ визначають оператори $W_i(p)$. Досить просто реалізуються оператори на базі поліномів $L_n^{(0)}$ Лагерра:

$$L_n^0(\gamma\tau)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i+1)}\frac{(-\gamma\tau)^i}{i!(n-i)!}\ ;$$

$$W_n(p)=L\left\{L_n^0(\gamma\tau)\right\}=\frac{(p-\gamma)^n}{p^{n+1}}\ .$$

Це частковий випадок узагальнених поліномів Лагерра $L_n^{\alpha}(x)$ при $\alpha = 0$, $x = \gamma\tau$ або функції Лагерра:

$$\varphi_n(\gamma\tau)=e^{\frac{\gamma\tau}{2}}L_n^{(0)}(\gamma\tau)\ ,$$

яким відповідає оператор

$$W_i(p)=L\left\{\varphi_n(\gamma\tau)\right\}=\frac{(p-\gamma)^n}{(p+\gamma)^{n+1}}\ , \qquad (6.21)$$

де L — оператор перетворення Лапласа.

Система поліномів Лагерра $L_n^{(0)}(\gamma\tau)$ ортогональна на напівскінченній осі [0; ∞) з експонціальною вагою $\varphi(\tau)=e^{-(\tau)}$, за умови, що вхідний сигнал $U(t)$ має зображення за Лапласом, яке не залежить від p, або постійний фурьє-спектр. Таку умову задовольняє дельта-функція або білий шум. Практично достатньо забезпечити неперервність $S_N(\omega)$ у полосі пропускання об'єкта або застосувати формулюючі фільтри $W_{\phi}(p)$, які перетворюють у полосі частот об'єкта сигнал $U(t)$ на білий шум. Тоді (6.20) набуває вигляду

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i W_i(p)W_{\phi}(\dot{p})u(t)\ ,$$

де функції $\varphi_i(t)=W_i(p)W_{\phi}U(t),(i=1,n)$ взаємно ортогональні.

При переході до дискретного часу операторам $W_i(p)$ еквівалентні дискретні передатні функції:

$$W_i(z) = \sum_{j=1}^{i} \frac{b_{ji} z^{-j}}{1} \Big/ \left(\sum_{j=1}^{i} c_{ji} z^{i} \right),$$

де b_{ji} і c_{ji} — коефіцієнти, які обчислюють через параметр γ в рівняння (6.21) і крок Δt; z^{-j} — оператор зсуву часу на $j\Delta t$.

Для ускладнення (спрощення) ортогональної моделі достатньо додати (відкинути) один оператор $W_n(p)$, не змінюючи інші β_i.

Оптимальне значення β_i (за критерієм J_{qk}) не залежить від інших коефіцієнтів $\beta_r \left(r \neq i \right)$. У цьому перевага ортогональних моделей.

До недоліків слід віднести важкість вибору γ, відсутність зв'язку між структурою моделі та структурою процесів, які відбуваються в об'єкті, вплив невідомих ненульових початкових умов, обмеження застосувань класом одних лише аперіодичних об'єктів.

Якщо $U(t)$ неперервне, то для визначення передатної функції моделі

$$W(p) = \frac{b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0} \qquad (6.22)$$

(структура цієї моделі може допускати фізичну інтерпретацію) апроксимуємо сигнали $U(t)$ і $y(t)$, де $t \in [0; T]$, за допомогою системи ортогональних функцій $\{\varphi_r(t)\}$:

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(t), \quad y(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j \varphi_j(t).$$

Зображення за Лапласом відношення $y(s)$ до $\varphi(s)$, тобто передатну функцію

$$W(p) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \varphi_k(s) / \sum_{k=0}^{n} \beta_k \varphi_k(p)$$

приведемо до стандартного вигляду.

Так, для поліномів оператора (6.22):

$$b_{m-j} = (-1)^j \sum_{k=j}^{m} \eta_k^j \alpha_k; \;\; a_{n-i} = (-1)^i \sum_{k=j}^{n} \eta_k^j \beta_k, \qquad (6.23)$$

де $\eta_k^j = \dfrac{k(k-1)\ldots(k-j-i)}{j}$.

Точність визначення векторів b і a в (6.22) за допомогою формул (6.23) залежить від точності апроксимації сигналів, чисел n і m та довжини реалізації. Для зміни структури моделі (6.22) достатньо змінити числа n і m у виразі (6.23).

6.2.2. Градієнтний метод із паралельною моделлю

Позначимо вихідні сигнали об'єкта $y_0(t)$, моделі — $y_M(t)$, а спільний для них вхідний сигнал через $U(t)$. Сигнал різниці виходів об'єкта і моделі:

$$\varepsilon(t) = Y_0(p) - Y_M(p).$$

Вважаємо, що оператор моделі $W_M(p)$ збігається з оператором об'єкта $W_0(p)$ з точністю до параметрів. Градієнтний алгоритм оптимізації вектора β_M параметрів β_{Mi} моделі:

$$\frac{d\hat{\beta}_{M_i}(t)}{dt} = -\lambda_i \operatorname{grad}_i \frac{\overline{\varepsilon}^2}{2}(\beta_0, \beta_M) = -\lambda_i e \frac{\overline{\partial \varepsilon}}{\partial \beta_{M_i}}, \; i = \overline{1,n},$$

де рискою позначено операцію поточного усереднення.

Для побудови градієнтного алгоритму необхідно визначити $\partial\varepsilon / \partial\beta_{M_i}$ та виконати операцію усереднення. Похідна від помилки:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \beta_{Mi}} = \frac{\partial W_M(p)}{\partial \beta_{Mi}} U(t) \qquad (6.24)$$

називається функцією чутливості, а $\partial W_M / \partial \beta_{M_i}$ — допоміжним оператором. Враховуючи вираз для функції чутливості, градієнтний алгоритм самоналагодження моделі набуває вигляду:

$$\frac{d\beta_{Mi}}{dt} = -\lambda_i \varepsilon(t) \int_0^t \frac{\partial w(\tau)}{\partial \beta_{Mi}} u(t-\tau) d\tau \ ,$$

де $w(\tau)$ — імпульсна вагова функція моделі.

Необхідно додатково будувати допоміжні оператори $\partial W(p)/\partial \beta_{M_i}$, на основі яких вираховують функцію чутливості $\partial \varepsilon / \partial \beta_{M_i}$.

Розглянемо градієнтний алгоритм самоналагодження з паралельною ортогональною моделлю у вигляді фільтра Лагерра (рис. 6.17), де О — об'єкт, що підлягає ідентифікації; a_i — параметри, що налагоджуються; y_i — вихідні сигнали фільтрів Лагерра.

$$L\{l_0(t)\} = \frac{1}{p+1/2},$$

$$L\{l_1(t)\} = \frac{p-1/2}{(p+1/2)^2} = L\{l_0(t)\} \frac{p-1/2}{p+1/2} \ ,$$

$$L\{l_2(t)\} = \frac{(p-1/2)^2}{(p+1/2)^3} = L\{l_1(t)\} \frac{p-1/2}{p+1/2} \ .$$

На рис. 6.17. наведена структурна схема неперервного градієнтного алгоритму налагодження параметрів реалізує алгоритм:

$$\frac{da_i}{dt} = -\lambda_i \operatorname{grad}_i \overline{\varepsilon^2} = -\lambda_i \overline{\varepsilon(t) y_i(t)}, \quad i = 1,2,3.$$

Застосування паралельної моделі для оцінювання призводить до необхідності побудови додаткових допоміжних операторів або фільтрів, які формують білий шум, що ускладнює на практиці структурну реалізацію методу. Метод із послідовно-паралельною моделлю частково позбавлений згаданих вище недоліків.

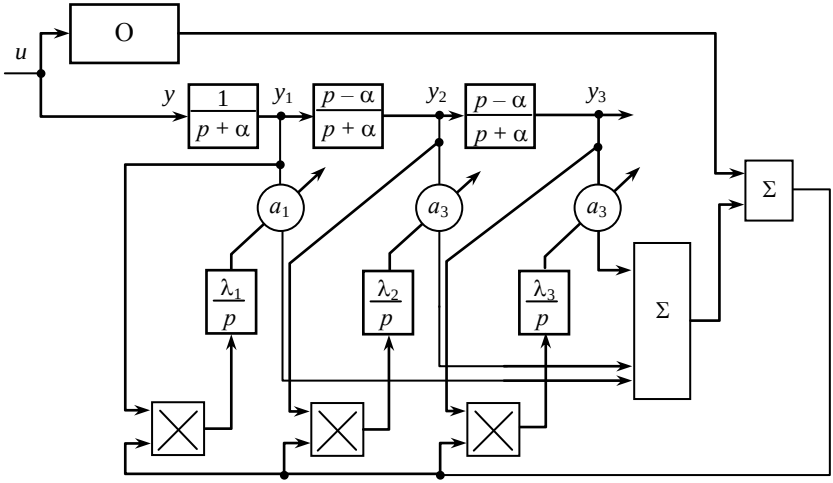


Рис. 6.17. Градієнтний метод оцінювання параметрів
з ортогональною паралельною моделлю

6.2.3. Градієнтний метод із послідовно-паралельною моделлю

Розглянемо алгоритм налагодження послідовно-паралельної моделі. Оператори моделей M_1 і M_2 будуються разом із низькочастотним фільтром F, що дозволяє здійснити перешкодостійку реалізацію похідних (рис. 6.18).

Особливістю побудови такої моделі є те, що функції чутливості беруться безпосередньо із відповідних точок моделі. Тому для реалізації алгоритму ідентифікації об'єкта моделлю (6.22) із застосуванням послідовно-паралельної моделі відпадає необхідність у побудові спеціальних допоміжних операторів (6.24). Але на відміну від ортогональних навіть при білому шумі на вході взаємозв'язок параметрів залишається.

Покажемо, як отримувати функції чутливості та як проявляється взаємозв'язок параметрів. Визначимо різницю $\varepsilon(\mathbf{t})$ між виходом першої M_1 і другої M_2 моделі:

$$\varepsilon(t) = Y_{M_2}(t) - Y_{M_1}(t) = \left(W_0 W_{M_1} - W_{M_2}\right) U(t),$$

де оператори моделей $W_{\text{M}_1}(p)=\dfrac{\sum_{i=0}^{n} b_i p^i}{F(p)}$, $W_{\text{M}_2}(p)=\dfrac{\sum_{j=0}^{m} a_i p^i}{F(p)}$.

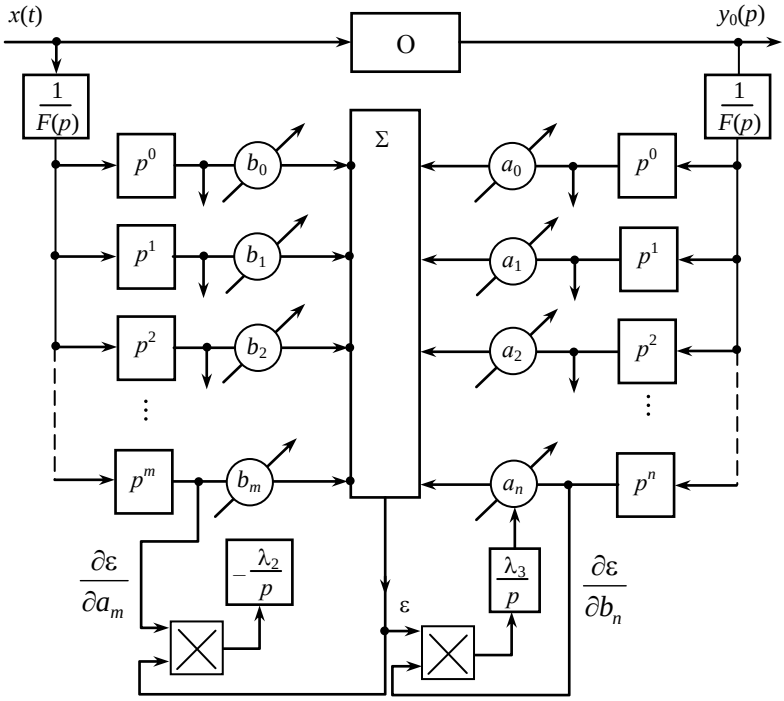


Рис. 6.18. Схема практичної реалізації градієнтного методу налагодження параметрів із послідовно-паралельною моделлю

Із урахуванням лінійності за параметрами b_i, a_i моделей M_1 і M_2 функції чутливості запишемо такими виразами:

$$\frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial a_k}=\frac{W_0 p^k}{F(p)}U(t),\ \ k=0,1,2,\ldots,n;$$

$$\frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial b_k}=\frac{p^k}{F(p)}U(t),\ \ r=0,1,2,\ldots,m.$$

Підставляючи $\partial\varepsilon(t)/\partial a_k$ і $\partial\varepsilon(t)/\partial b_r$ у вираз для помилки $\varepsilon(t)$, отримаємо:

$$\varepsilon(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{\partial\varepsilon(t)}{\partial a_k}-\sum_{r=0}^{m}b_r\frac{\partial\varepsilon(t)}{\partial b_r}.$$

Із виразів видно, що сигнал $\varepsilon(t)$ різниці пропорційний функціям чутливості. На рис. 6.18 подано формувач помилки і для прикладу показано два контури самоналагоджування.

Градієнтний алгоритм налагодження параметрів:

$$\frac{d\beta_i}{dt}=-\lambda_i\sum_j C_j z_j(t)z_i(t),\ C_i(t_0)=C_i(0),\quad i=1,2,\ldots,n,\ n+1,\ldots,n+m+1, \tag{6.25}$$

де $C=\{b_0,b_1,...,b_m,a_1,...,a_n\}$ — вектор налагоджуваних параметрів; $C_i(0)$ — початкові значення параметрів моделі; z — вектор функцій чутливості; λ_i(i = 0, 1, 2, …, m + n + 1) — коефіцієнти посилення i-го контуру самоналагодження моделі (КСН). Позначимо

$$\dot{a}_{ij}=-\lambda_i z_i(t)z_j(t), \tag{6.26}$$

тоді градієнтний алгоритм самоналагодження може бути представлено у матричному вигляді системою диференціальних рівнянь:

$$\dot{C}=AC, C(0)=C_0\ . \tag{6.27}$$

Оскільки це диференціальне рівняння лінійної автономної системи, то умова стійкості визначається коренями характеристичного рівняння.

$$\det(pE-A)=|pE-A|=\begin{vmatrix} p-a_{11} & \ldots & -a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{1n} & \ldots & p-a_{nn} \end{vmatrix},$$

де E — одинична матриця.

Розкриваючи визначник, отримуємо рівняння n-го порядку, з коефіцієнтами $a_i\left(i=\overline{1,n}\right)$, які згідно з виразом (6.26) залежать від часу, являючи добуток λ_i на $z_i(t)$ і $z_j(t)$. Ефект усереднення

досягається інерційністю процесу (6.25): що менше λ, то інерційніше процес.

$$p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0 .$$

Для стійкості процесу (6.27) самоналагодження необхідно, щоб усі корені характеристичного рівняння мали від'ємні дійсні частини.

Недоліком градієнтних алгоритмів є залежність часу самоналагодження від коефіцієнтів посилення λ_i, (рис. 6.19). Для малого λ рух у точку екстремуму надто повільний. Збільшення λ призводить до зростання коливань контуру самоналагодження і час настройки також зростає. Тому існує оптимальне λ^*. Окрім того зі збільшенням кількості налагоджених параметрів збіжність процесу погіршується.

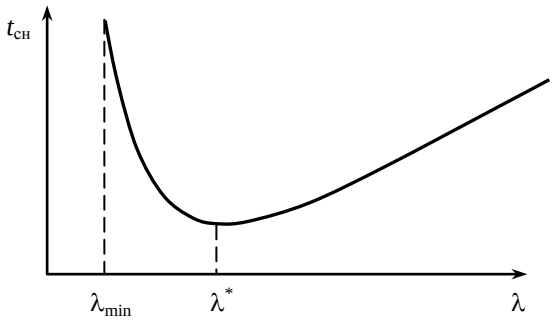


Рис. 6.19. Залежність часу самоналагодження від коефіцієнта посилення КСН

Наступний метод практично позбавлений згаданих недоліків.

6.2.4. Метод трьох моделей

Припускається, що для досліджуваного об'єкта відображення $f^*(x^*, \beta^*, t)$, де вхід $x(t)$, вихід $y(t)$, може бути з малою похибкою δ представлено паралельною $f\left(x, \hat{\beta}, t\right)$, послідовно-паралельною або композицією з паралельної і лінійної (за вектором параметрів β''') додаткових моделей:

$$y(t)=\left(\beta^{'''}\right)^T \varphi^T(x,\beta,t)\,, \tag{6.28}$$

де

$$\left(\beta'''\right)^T=[\beta_1''',\ldots,\ \beta_r'''],$$
$$\varphi^T(\cdot)=\left[\varphi_1(x,\beta,t),\ldots,\varphi_r(x,\beta,t)\right].$$

Вважається, що сигнал $x(t)$ вимірюється досить точно. Сигнал на виході складається з точного значення $y^*(t)$ випадкової складової $\tilde{\varepsilon}(t)$ і складової $\varepsilon^*(t)$ загальної помилки, пов'язаної з неточністю структури моделі

$$y(t)=y^*(t)+\hat{\varepsilon}(t)+\varepsilon^*(t)\,.$$

Апріорна інформація про $\hat{\beta}^*$ відсутня, тому функціонал $J(\varepsilon)$ у загальному випадку є функцією від $\Delta\beta$, яка має декілька екстремумів. Необхідно отримати незміщену оцінку $\hat{\beta}$ коефіцієнтів β^* моделі:

$$\hat{y}(t)=f\left(x^*(t),\hat{\beta},t\right), \tag{6.29}$$

для якої

$$\hat{\beta}\in G_{\hat{\beta}},\ \left\|y^*(t)-\hat{y}(t)\right\|^2\le\ \delta J(\delta\beta)\,,$$

де $\delta J(\delta\beta)$ — припустима похибка δJ, що відповідає області невизначеності $\delta\beta$ оцінки $\hat{\beta}$.

Виміри проводять у дискретні моменти часу $tk=k\Delta t$ (або просто k), значення $x^*(k)$ точне, $y(k)=y^*(k)+\tilde{\varepsilon}(k)+\varepsilon^*(k)$, початкові умови нульові. Алгоритм оцінювання $\hat{\beta}$ для моделі (6.29) такий.

Крок 1. Задамо f виразу (6.29) таким чином:

$$f(x,\beta,t)=x,$$

що відповідає одиничній паралельній моделі.

Апроксимуємо вихідний сигнал об'єкта $y(k)$, $k=\overline{1,M}$ вихідним сигналом моделі (6.28), додаткової до одиничної моделі (6.29).

Як міру близькості $y(k)$ і $\hat{y}_1(k)$ приймемо, наприклад, середній за M дискретами квадрат похибки

$$\varepsilon(k)=y(k)-\hat{y}_1(k)\ , \tag{6.30}$$

де на цьому кроці

$$\hat{y}_1(k)=(\beta''')^{\mathrm{T}}\varphi(x)\,. \tag{6.31}$$

З умови мінімуму $\sum_{k=1}^{M}\varepsilon^2(k)$ отримаємо систему нормальних рівнянь:

$$A_1\beta'''=B_1\ , \tag{6.32}$$

де

$$A_1=\varphi^{\mathrm{T}}\varphi.\quad \varphi^{T}\begin{bmatrix}\varphi_1(1)\ \varphi_1(2)\ldots\varphi_1(M)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_r(1)\varphi_r(2)\ldots\varphi_r(M)\end{bmatrix},$$

$$(\beta''')T=[\beta'''_1,...,\beta'''_r];$$

$$B_1=\varphi^{\mathrm{T}}y,\ y^{\mathrm{T}}=\big(y(1),...,y(M)\big).$$

де $\varphi_i(k)$ — скорочене позначення для $\varphi_i\big(x(k)\big)$.

Із системи (6.32) знайдемо оцінку вектора β''':

$$\beta'''=A_1^{-1}B_1\,. \tag{6.33}$$

Підставивши (6.33) в (6.31), отримаємо оцінку $\hat{y}_1(k)$ першого наближення.

Крок 2. Розглядаючи оцінку $\hat{y}_1(k)$ як згладжений сигнал $y(k)$ об'єкта, поставимо відображенню (6.31) у відповідність паралельну модель із вектором β, параметри якого одержимо через вектори β', β'' послідовно-паралельної моделі. Для цього з умови мінімуму середнього квадрата $\sum_{k=1}^{M}\varepsilon_0^2(k)$ узагальненої помилки ε_0 послідовно-паралельної моделі

$$\varepsilon_0 = f_1^{\mathrm{T}}(x, \hat{y}, \beta' - f^{\mathrm{T}}{}_2(x, \hat{y}_1, t)\beta'',$$

отримаємо систему нормальних рівнянь

$$A_2\hat{\beta}^{\mathrm{T}} = B_2, \tag{6.34}$$

де $\hat{\beta}^{\mathrm{T}} = \left(\beta'^{\mathrm{T}}, \beta''^{\mathrm{T}}\right)$;

$$A_2 = F^{\mathrm{T}}F; F^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} F_1(1)\ F_1(2)\ldots F_1(M) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_p(1)\ F_p(2)\ldots F_p(M) \end{bmatrix}, p = n + m;$$

$$F_i(k) = \begin{cases} f_{1i}, i = \overline{1-m}, \\ f_{2,i-m}, \overline{i = m+1, n+m} \end{cases}.$$

Із виразу (6.34) визначимо оцінку $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = A_2^{-1}B_2$$

і підставимо її в модель (6.29).

У результаті отримаємо оцінку $\hat{y}_2$ сигналу *y* в другому наближенні і оцінку $\hat{\beta}$ параметрів паралельної моделі в першому наближенні.

Крок 3. Повтор кроку 1, де як вхід для моделі (6.31) береться вихід $\hat{y}_2(k)$ паралельної моделі, отриманої на кроці 2. На виході моделі отримаємо більш точну оцінку $\hat{y}_3$ сигналу *y*.

Крок 4. Повтор кроку 2, але вже для більш точної апроксимації $\hat{y}_3$. Далі кроки повторюються до виконання умови зупинки, якою може бути величина δ відносно зміни модуля норми вектора $\hat{\beta}$ на (*l* + 1)-му і (*l*)-му кроках:

$$\delta = \left| \frac{\left\| \hat{\beta}(l+1) \right\|}{\left\| \hat{\beta}(l) \right\|} - 1 \right|.$$

Оскільки для оцінювання β''' і $\hat{\beta}$ використовувались лише квадратичні функціонали (тому, що β''' і $\hat{\beta}^{\mathrm{T}} = \left[\hat{\beta}'^{\mathrm{T}}, \hat{\beta}''^{\mathrm{T}}\right]$ входять лінійно в ε і ε_0 відповідно), то величина δ зменшується в міру зростання l. Якщо структура моделі достатня для опису відображення в об'єкті x^* в y^* об'єкті, то зі зростанням l додаткова модель вироджується в одиничну, а паралельна — з одиничної в модель об'єкта. Швидкість збігання оцінок $\hat{\beta}$ до β^* залежить від того, наскільки точно додаткова модель апроксимує сигнал y (особливо на кроці 1, коли входом для неї служить сигнал x). Для покращення апроксимаційних властивостей додаткову модель можна будувати за нонусним принципом (6.11) з адаптацією структури операторів; зручні також ортогональні моделі.

На рис. 6.20 зображено схему ідентифікації за методом трьох моделей. Система має три типи моделей і два блоки $\beta'''(\varphi, \varepsilon)$ і $\beta\left(f, \varepsilon_0^1\right)$ оцінювання параметрів.

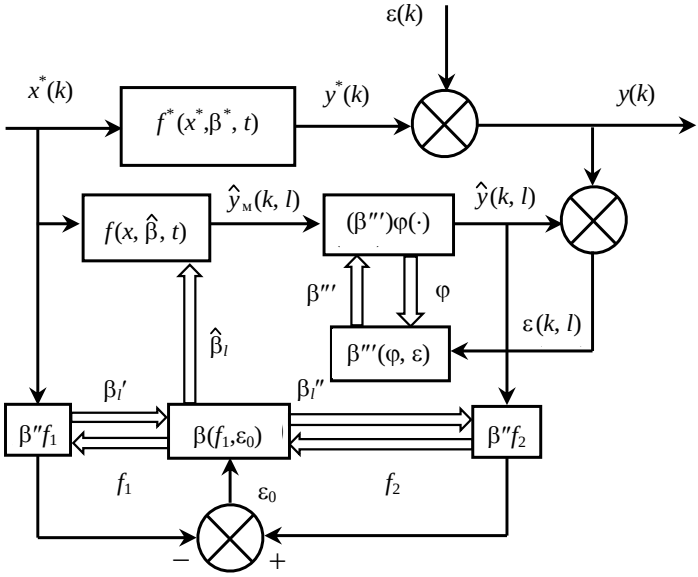


Рис. 6.20. Схема системи ідентифікації
за методом трьох моделей

Окрім циклічного алгоритму уточнення параметрів можливим є рекурентний. При рекурентному алгоритмі блоки $\beta'''(\varphi,\varepsilon)$ і $\hat{\beta}(f,\varepsilon_0)$ реалізують градієнтне налагодження параметрів, причому з умов стійкості алгоритм блока $\beta'''(\varphi,\varepsilon)$ повинен бути більш швидкодійним. У надзвичайно простому випадку оператором $\beta'''^{T}\varphi(\cdot)$ допоміжної моделі є скаляр β''', що налагоджується за градієнтим алгоритмом:

$$d\Delta\beta'''/dt = -\lambda \operatorname{grad}\varepsilon(t)\hat{y}_1(t) = -\lambda 2\varepsilon(t)\hat{y}_1(t),$$

$$\varepsilon(t) = \tilde{\varepsilon}(t) + \hat{y}_1(t)\Delta\beta''',$$

або

$$d\Delta\beta'''/dt = -2\lambda\left[\hat{\varepsilon}(t)y_1(t) + \Delta\beta'''\hat{y}_1^2(t)\right].$$

Така допоміжна модель являє собою стохастичну систему з параметрично-зворотнім зв'язком

$$d\Delta\beta'''/dt + 2\lambda\hat{y}_1^2(t)\Delta\beta''' = -2\lambda\tilde{\varepsilon}(t)\hat{y}_1(t),$$

для якої за відповідної нестаціонарності $\hat{\beta}(t)$ і перешкоди $\tilde{\varepsilon}(t)$ існує оптимальне значення λ, коли середній квадрат $\overline{\varepsilon}^2$ похибки (6.30) є мінімальним і близьким до $\tilde{\overline{\varepsilon}}^2$, тобто до квадрата перешкоди.

Додаткова модель безперервно доповнює вихід $\hat{y}(k)$ паралельної моделі до істинного виходу $y^*(k)$ об'єкта. Тоді на послідовно-паралельній моделі за сигналами $x(k)$ і $\hat{y}(k) = y^*(k)$ буде одержано значення вектора $\hat{\beta}$, близьке до істинного $\hat{\beta}^*$. Найпростіша допоміжна модель може застосовуватися лише для уточнення вектора $\hat{\beta}$ в паралельній моделі.

При ідентифікації стаціонарних систем для $\lambda\to\infty$ справедливою є рівність $\hat{y}(k) = y(k)$, тобто послідовно-паралельна модель виходить ніби підключеною до об'єкта і оцінка $\hat{\beta}$ буде зміщеною.

Якщо в міру налагодження паралельної моделі значення λ зменшувати, то оцінка $\hat{\beta}$ прямує до $\hat{\beta}^*$.

Метод дозволяє одержати асимптотично не зміщенні оцінки $\hat{\beta}$ невідомого вектора $\hat{\beta}^*$, який нелінійно входить в оператор $f(x,\hat{\beta},t)$ паралельної моделі.

Приклад 6.2. Об'єкт із чистим запізненням подано моделлю

$$y^*(t)=\frac{1}{\left(1+\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_i p^i\right)}x(t),\ x(t)=x_0\sin\omega t\ \left(p=d/dt,\alpha_i=\tau^i/i!\right).$$

Необхідно за $y(t)=y^*(t)+\tilde{\varepsilon}(t)$, $\tilde{\varepsilon}(t)=\sum_{j=1}^{\infty}a\delta\left(t-t_j\right)$, де δ — функція Дірака; t_j — випадкові значення із середнім періодом $T_{\text{сер}}$ (тобто $M\left(t_j-t_{j-1}\right)=T_{\text{сер}}$) і $x(t)$ оцінити нелінійно вхідний у рівняння об'єкта параметр τ, користуючись не трьома, а двома моделями.

Оскільки об'єкт — це ланка з чистим запізненням τ, то для синусоїдного сигналу $x(t)$ область унімодальності середнього квадрата помилки $\varepsilon(t)=y(t)-\hat{y}_1(t)$, як функції $\Delta\tau$, буде обмежена величиною $\pm\max\Delta\tau=\pm\pi/\omega$, $\Delta\tau=\hat{\tau}-\tau$. Якщо скористатися методом двох моделей, тобто безпосередньо до об'єкта застосувати послідовно-паралельну модель із послідовним $f_1 = W_1(p)$ і паралельним $f_2 = W_2(p)$ операторами відповідно:

$$W_1(p)=\frac{1+\sum_{i=1}^{n}\hat{a}_1 p^i}{1+Tp};\ \ W_2(p)=\frac{1}{1+Tp},$$

то

$$\varepsilon_0(t)=W_2(p)\left[y^*(t)+\hat{\varepsilon}(t)\right]-$$

$$-W_1(p)x(t)\approx\Delta\tau\frac{p}{Tp+1}x(t+\Delta\tau)+\hat{\varepsilon}(t+\hat{\tau})/Tp+1.$$

Тоді математичне сподівання $M\{\cdot\}$ оцінки $\hat{\tau}$, що відповідає умові

$$M\frac{\delta\overline{\varepsilon}_0^2}{\partial\hat{\tau}}=M\left\{\varepsilon_0(t)\frac{\partial\varepsilon_0(t)}{\partial\hat{\tau}}\right\}=\Delta\tau\frac{\omega^2}{T^2\omega^2+1}\frac{x_0^2}{2}-\frac{a_{\text{ш}}^2}{2T^2T_{\text{сер}}}=0,$$

буде зміщено на величину для $\omega T > 1$, яка дорівнює відношенню перешкода–сигнал:

$$\Delta\tau=\frac{a_{\text{ш}}^2}{T_{\text{сер}}x_0^2}\frac{T\omega^2+1}{T^2\omega^2}\approx\frac{a_{\text{ш}}^2}{T_{\text{сер}}}/x_0^2,$$

де T — стала часу фільтра.

Якщо $|\Delta\tau|>\frac{\pi}{\omega}$, то оцінка $\hat{\tau}$ за паралельною моделлю з початковим значенням $\hat{\tau}(0)$, яке взяте з послідовно-паралельної, не зійдеться до τ, а призведе до одного з хибних значень $\tau\pm\frac{2\pi}{\omega}k$, $k = 1, 2,\ldots$, тобто, як бачимо застосування методу двох моделей не дало бажаного результату.

Приклад 6.3. За вхідним сигналом $u(t)$ об'єкта, який становить собою одиничний східець і вихідним сигналом $x(t)$ потрібно визначити три коефіцієнти $\hat{\beta}_i\left(i=\overline{1,3}\right)$ диференціального рівняння моделі об'єкта, наприклад моделі поздовжнього короткоперіодичного руху літака:

$$\ddot{x}^*(t)+\hat{\beta}_2\dot{x}^*(t)+\hat{\beta}_1x^*(t)=\hat{\beta}_3U(t),$$

де $x(t)$ — відхилення кутової швидкості; $U(t)$ — відхилення руля висоти.

Сигнали $U(t)$ і $x^*(t)$ виміряні в дискретні моменти часу k із кроком Δt = 0,05 с. Вимірювання $x(k)$ ($k = \overline{1,100}$ сигналу $x^*(k)$ зашумлено адаптивною перешкодою $N(k)$ типу гауссівського білого шуму з нульовим середнім значенням. Задачу розв'язуватимемо методом послідовно-паралельної моделі і методом трьох моделей. Фільтри послідовно-паралельної моделі задамо оператором $W_\Phi(p) = 1/(p^3 + 5p^2 + 6p+7)$, який значною мірою згладжує перешко-

ду $N(t)$. Однак за великих рівнів шуму оцінки $\hat{\beta}_1$ і $\hat{\beta}_2$ суттєво занижені, оцінка $\hat{\beta}_3$ для обох методів близька до істинної, оскільки сигнал $u(t)$ вимірюється точно. Деяке відхилення її від точного значення викликане лише неортогональністю матриці МНК. На рис. 6.21. і в табл. 6.3 наведено залежність значень оцінок $\hat{\beta}_i$ за методом послідовно-паралельної моделі (ППМ) (штрихові лінії) і за методом трьох моделей (МТМ) (суцільні лінії) від відношення середньоквадратичних значень шуму $N(k)$ і сигналу $x^*(k)$ (шум/сигнал). Як бачимо, в МТМ шум в $y(t)$ не призводить до зміщення оцінок, вони гарантовано сходяться за дві ітерації, тоді як у методі ППМ оцінки $\hat{\beta}_1$ і $\hat{\beta}_2$ зі зростанням відношення шум/сигнал суттєво зменшуються.

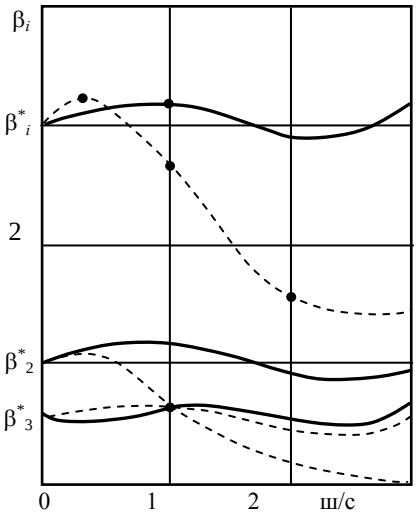


Рис. 6.21. Залежність значень оцінок для методів узагальненої послідовно-паралельної моделі:
_____ ППМ і трьох моделей _ _ _ _ _ (МТМ)
від відношення шум/сигнал

Таблиця 6.3

Залежність значень оцінок $\hat{\beta}_i$ від відношення шум/сигнал і для методу ППМ та МТМ

$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_1$		$\hat{\beta}_2$		$\hat{\beta}_3$	
Шум/сигнал	ППМ	МТМ	ППМ	МТМ	ППМ	МТМ
0	3	3	1	1	0,5	0,5
0,1	3,06	3,05	1,03	1,02	0,504	0,504
0,2	3,11	3,08	1,04	1,03	0,508	0,507
0,5	3,15	3,10	1,01	1,1	0,517	0,516
1	2,69	3,15	0,71	1,14	0,6	0,52
2	1,56	2,82	0,16	0,96	0,49	0,48
3	1,39	3,22	0,02	0,95	0,53	0,58

6.2.5. Ноніусні моделі

Ноніусні моделі займають проміжне місце між ортогональними моделями та моделями з жорстко заданою структурою. Ноніусною динамічною моделлю реальної системи називають динамічну систему, в якій сім'я функції, яка відображає вхід $u(t)$ і вихід $y(t)$, реалізується у вигляді композиції операторів $W_{ki}(k = 1, 2; i = 0, 1, 2,\ldots)$ з адаптацією закону композиції і чергування в часі процесів оцінювання параметрів цих операторів. Розрізняють паралельне ($k = 1$), послідовне (інверсне) ($k = 2$), послідовно-паралельне ($k = 1, 2$) підключення моделі до об'єкта з послідовним, паралельним та змішаним законами композиції операторів.

Приклад 6.4. Розглянемо ноніусну модель із послідовним включенням операторів W_{1i}, підключених паралельно до об'єкта Σ_∞, який має невідомі нестаціонарні внутрішні та зовнішні характеристики, наприклад, літальний апарат. Необхідно в процесі функціонування об'єкта (у реальному часі) ввести формування моделі відображення $W(\beta, p)$ сигналу $u(t)$ в $y(t)$ для цілей прогнозування $y(t)$ і відомого $u(t)$ (задача прогнозування) або корекції $u(t)$ за заданого $y^*(t)$ (задача керування). Якщо оператор $W(\beta, p)$ визначено, то для задачі прогнозування траєкторії ЛА

$$y(t) = W(\beta, p)\, u(t),\ p = d/dt,$$

для задачі керування

$$u(t) = \hat{W}^{-1}(\beta, p)y^*(t),$$

де $\hat{W}^{-1}(\beta, p)$ — фізично реалізований оператор, близький до ідеального $W^{-1}(\beta, p)$. Так, якщо

$$W(\beta, p) = \frac{\beta_1 p + \beta_0}{\beta^2 + \beta_2 p + \beta_3},$$

то

$$W^{-1}(\beta, p) = \frac{1}{\delta p + 1} W^{-1}(\beta, p),$$

де δ — малий параметр такий, що для будь-якої частоти ω в смузі пропускання об'єкта $\omega^2\delta^2 < 1$.

Тоді

$$U(t) = \frac{1}{\delta p + 1} W^{-1}(\beta, p)y^*(t),$$

а різниця

$$\varepsilon(t) = \hat{y}^*(t) - y^*(t) = \frac{1}{\delta p + 1} y^*(t) - y^*(t) = -\frac{\delta p}{\delta p + 1}(t)$$

між дійсним значенням $y^*(t)$, отриманим на вході моделі, і бажаним $\hat{y}^*(t)$, буде несуттєвою.

Для паралельної ноніусної моделі з послідовно ввімкненими операторами:

$$W(\beta, p) = \prod_{i=0}^{r} W_i(\beta_i, p). \qquad (6.35)$$

Якщо є інформація про інерційність, коливання або нейтральність, то оператор $W_0(\beta_0, p)$ задається відповідно в вигляді

$$W_0(\beta_0, p) = \frac{\beta_{01}}{p + \beta_{02}}; \quad W_0(p, \beta_0) = \frac{\beta_{01}}{p^2 + \beta_{02} p + \beta_{03}}; \quad W_0 = \frac{\beta_0}{p}. \qquad (6.36)$$

Наступні оператори по можливості беруть до уваги фізику процесу або задаються у вигляді:

$$W_i(p, \beta_i) = (\beta_{0i} + \beta_{1i} p)/(\beta_{2i} + p),$$

Кожен оператор містить два-три невідомі параметри. Зі зростанням i при ідентифікації стаціонарного об'єкта оператори $W_i(p,\ \beta_i)$ прямують до одиничного оператора $W\left(p,\beta_i\right)\equiv 1$. Налагоджують оператори послідовно в часі. Спочатку налагоджують вектор β_0 оператора $W_0(p,\ \beta_0)$, потім $W_1(p,\ \beta_1)$ і так до $W_r(p,\ \beta_r)$, якщо об'єкт за цей час залишався стаціонарним. Якщо характеристики об'єкта суттєво змінюються за час налагоджування r операторів, то (залежно від ступеня нестаціонарності) встигає налагоджуватися більша або менша кількість операторів W_i. Адаптивна система керування з ідентифікатором у вигляді паралельної ноніусної моделі (6.35) (рис. 6.22) має набір налагоджених за β операторів $W_i(p,\ \beta_i)$, інверсних їм фізично реалізованих операторів $\hat{W}^{-1}\left(p,\beta_i,\delta\right)$, комутатора $i(\xi)$, блока *Opt* формування оцінок β_i за критерієм J, логічного блока $\xi(J)$ і реальної системи Σ_∞.

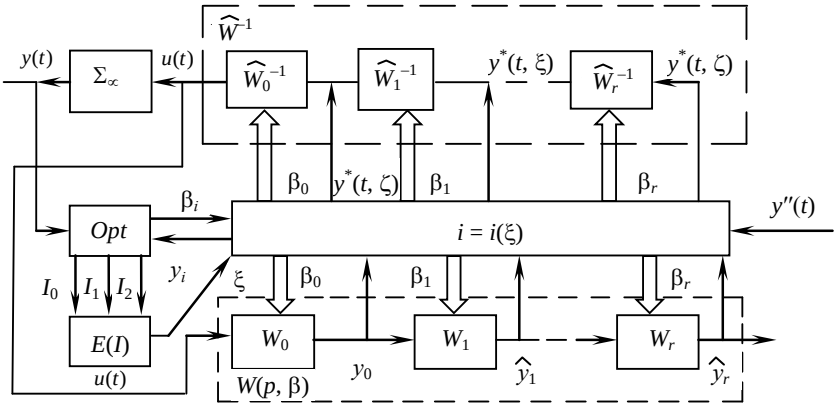


Рис. 6.22. Схема ноніусного ідентифікатора
в адаптивній системі керування

У момент початку роботи системи оператори W_i і $\hat{W}^{-1}$ дорівнюють одиниці, а W_0 дорівнює одному з операторів (6.36). За командою ξ з логічного блока $\xi(J)$ комутаторам $i(\xi)$ комутуються схеми формування помилки з індексом «0»

$$\varepsilon(t) = \hat{y}(t) - y(t),$$

і закону налагодження β_0 блоком *Opt*.

Блок $\xi(J)$ контролює значення критерію J_0 і його зміни в часі. Як $J_i(i, 0, r)$ можуть братися згладжені фільтром $W_\phi(p)$ квадрати $\varepsilon_1^2(t)$:

$$J_i = W_\phi(p)\varepsilon^2{}_i(t),$$

де $W_\phi(p) = 1/(Tp+1)$; $p = d/dt$; T — стала часу фільтра.

Сигналом закінчення налагодження i-го оператора і переходу до $(i + 1)$ може бути величина:

$$dJ_{i-}/dt = pJ_i(t)/(Tp+1),$$

яка становить собою згладжене фільтром $1/(Tp + 1)$ значення похідної за часом від критерію J_i:
якщо

$$\left|\frac{dJ_i}{dt}\right| < \Delta_1, \qquad (6.37)$$

(де Δ_1 — заданий поріг), то налагодження оператора W_0 припиняється і за командою ξ блока $\xi(J)$ комутатор $i(\xi)$ комутує коло налагодження оператора $W_1(p, \beta_1)$, і так далі. Блок $\xi(J)$ у процесі налагодження операторів контролює також зміну ΔJ_j показника $J_j, 0 \le j \le i$:

$$\Delta J_j = J_j(t) - J_j(t_j),$$

де $J_j(t_j)$ — значення J_j на момент t_j закінчення налагодження j-го оператора $(t_j < t)$.

Поява ΔJ_j пов'язана з нестаціонарністю характеристик об'єкта.

Якщо $\Delta J_j > \Delta_2$, то налагодження i-го оператора $W_i(\beta_i, p)$ припиняється і відновлюється підлагодження j-го оператора до виконання умови (6.37), потім $(j + 1)$-го і так далі (до i-го). У задачі прогнозування достатньо спостерігати $\hat{y}_i(t)$. Для задачі керування оптимальна траєкторія $u(t)$ отримується на виході інверсної, фізично реалізованої моделі W^{*-1}. Сигнал $y^*(t)$ при цьому подається за допомогою комутатора $i(\xi)$ на вхід i-го, а за умови (6.37) — на вхід j-го інверсного оператора.

Зіставлення ноніусних та ортогональних моделей показує, що врахування фізичної природи об'єкта дозволяє суттєво зменшити кількість ноніусних операторів порівняно з кількістю ортогональних операторів. Ноніусні моделі можуть бути ефективні для опису коливальних та нестаціонарних об'єктів, які знаходяться в нестаціонарних умовах.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. *В чому переваги ортогональних ММ?*
2. *В чому плюси і мінуси градієнтного методу із паралельної ММ?*
3. *В чому плюси і мінуси градієнтного методу із послідовно-паралельною моделлю?*
4. *Чому залежність часу ідентифікації екстремально залежить від коефіцієнта підсилення КСН (Рис. 6.19.)?*
5. *Зобразіть блок-схему алгоритма ідентифікації в методі трьох моделей.*
6. *Яким чином досягається збіжність процесу настройки ММ в методі трьох моделей?*
7. *Поясніть графіки (Рис. 6.21.) залежності оцінок параметрів ММ від рівня шуму у вимірах.*
8. *Дайте ознаку і переваги ноніус них моделей ідентифікації нестаціонарних об'єктів.*
9. *Поясніть роботу ноніусного ідентифікатора в адаптивній САК нестаціонарним об'єктом (Рис. 6.22.).*

6.3. Комплексування методів і моделей

Стійкість динамічних систем є однією з найбільш важливих характеристик, особливо якщо вони нестаціонарні, не повністю відомі і схильні до випадкових перешкод у вимірювальних каналах змінних стану. До таких систем належить літак, зокрема його стійкість у поздовжньому короткоперіодичному русі. Для малих відхилень змінних від режиму балансування (постійна висота, швидкість руху у вертикальній площині) цей рух описується щодо змінних (кута атаки, кутової швидкості і руля висоти) системою рівнянь першого порядку:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}u,\\ \dot{x}_2 &= \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}u\end{aligned}\right\}, \qquad (6.38)$$

де $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ — похідні за часом від x_1 і x_2; β_{ij}, $(i=1,2;\ j=1,2,3)$ — аеродинамічні коефіцієнти.

Системі (6.38) еквівалентні передатні функції, що відображають вхідний сигнал u у виходи x_{1M} або x_{2M}, наприклад u в x_{2M}:

$$W_u^{x_2}(p)=\frac{\beta_{23}p-(\beta_{23}\beta_{11}-\beta_{13}\beta_{22})}{p^2-(\beta_{11}+\beta_{22})p+(\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21})}. \quad (6.39)$$

Коефіцієнти $(\beta_{11}+\beta_{22})=-a_1$ і $(\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21})=a_0$ знаменника визначають відповідно коливальний і аперіодичний запас стійкості. Помноживши ці коефіцієнти на $J_{z_1}/qSb_a\beta_{11}$, (де J_{z_1} — момент інерції; q — швидкісний напір; S — площа крила, b_a — середня аеродинамічна хорда крила), отримаємо відповідний запас стійкості в частках від b_a.

Коефіцієнти β_{13},β_{23} визначають ефективність руля висоти; β_{12},β_{22} — демпфірувальні сили і моменти. Оцінювання коефіцієнтів β_{ij} ЛА, за якими визначається стійкість і керованість ЛА, є актуальним завданням льотних випробувань (ЛВ).

Обмежені вартістю натурного експерименту і нестаціонарністю часу експерименту, нелінійністю — діапазон зміни змінних, не дозволяють з досить високою точністю одержати оцінки $\hat{\beta}_{ij}\beta_{ij}$ із зашумленних перешкодами вимірювань $\hat{x}_i$, $\hat{u}$. Тому практика ЛВ обмежується досить наближеними оцінками стійкості і керованості ЛА [1]. Підвищити точність оцінювання аеродинамічних коефіцієнтів (АДК) без збільшення часу ЛВ можна, скориставшись методом статистичного моделювання перешкод. Для цього, з огляду на апріорну інформацію про рознесені спектри сигналів і перешкод (перешкоди більш високочастотні), достатньо для кожного сигналу виконати фільтрацію перешкод і, як різницю відфільтрованого і вихідного сигналу, отримати наближену реалізацію перешкоди. Далі слід визначити статистичні характеристики цих реалізацій і згенерувати m статистично подібних реалізацій перешкод для кожної змінної x_i, u. Склавши ці реалізації з відповідними відфільтрованими сигналами,

отримаємо m псевдовибірок даних ЛВ. Маючи в наявності m статистично ідентичних вибірок, p методів ідентифікації і q моделей ЛА, можна скористатися їх надмірністю для одержання більш точних оцінок АДК.

Щодо задачі з визначення АДК ЛА в поздовжньому коротко-періодичному русі, розглянемо три моделі: (6.38), (6.39) і модель (6.40), що випливає з двох перших:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_2 = (\beta_{11}+\beta_{22})\dot{x}_2 - (\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21})x_2 + \beta_{23}\dot{u} - \\ -(\beta_{23}\beta_{11}-\beta_{13}\beta_{22})u = -a_1\dot{x}_2 - a_0 x_2 + a_2\dot{u} + a_3 u.\end{aligned} \tag{6.40}$$

Кількість p методів визначення АДК визначається кількістю функціоналів близькості в просторі L_2 [2] змінних ЛА і його моделей (6.41), (6.42), (6.43). З умови мінімуму цих функціона-лів визначаються оптимальні оцінки $\hat{\beta}$ АДК:

$$\left\{\beta_{ij}^*\right\} = \arg\min_{\beta_{ij}} \left\| \hat{\dot{x}}_i - \sum_{j=1}^{2} \beta_{ij}\hat{x}_j - \beta_{i3}\hat{U} \right\|^2, \tag{6.41}$$

де $i=1,2$; $j=1,2$; $\hat{\dot{x}}_i$, $\hat{\dot{x}}_j$, $\hat{U}$ — згладжені фільтром змінні.

$$\left\{a_i^*\right\} = \arg\min_{a_i} \left\| x_2 - x_{2M} \right\|^2, \tag{6.42}$$

$$\left\{a_i^*\right\} = \arg\min_{a_i} \left\| \hat{\ddot{x}}_2 + a_1\hat{\dot{x}}_2 + a_0\hat{x}_2 - a_2\hat{\dot{U}} - a_3 U \right\|^2. \tag{6.43}$$

Згладжування всіх змінних здійснюється одним і тим самим фільтром, щоб не внести методичної помилки в лінійні рівняння ЛА.

Далі для кожного з алгоритмів (6.41)–(6.43) на множині із m реалізацій для кожної реалізації визначаються оптимальні значення $\left\{\beta_{ij}^*\right\}$, $\left\{a_i^*\right\}$, їх середні значення за m реалізаціями $\left\{\overline{\beta}_{ij}^*\right\}$, $\left\{\overline{a}_i^*\right\}$, оцінки власних $\hat{\sigma}^2_{\beta_{ij}^*(k)}$, $\hat{\sigma}^2_{a_i^*(k)}$, і взаємних $\hat{\sigma}^2_{\beta_{ij}^*(k)\beta_{ij}^*(l)}$, $\hat{\sigma}^2_{a_i^*(k)a_i^*(l)}$ дисперсій, де $k=1,2,3$; $p=3$; $l=1,2,3$; $k\neq l$. Для стислості запису елементи множин $\left\{\beta_{ij}\right\}$, $\left\{a_i\right\}$ позначимо через $\left\{\alpha_i\right\}$. Тоді

шукатимемо найкращу на множині з трьох методів-моделей оцінку α_i^* у вигляді:

$$\alpha_i^* = \sum_{k=1}^{3} C_k \alpha_i(k), \quad \sum_{k=1}^{3} C_k = 1. \tag{6.44}$$

Коефіцієнти C_k визначимо з умови:

$$C_1 = 1 - C_2 - C_3; \; \frac{\partial \hat{\sigma}^2_{\alpha_i^*}}{\partial C_k} = 0, \quad k = 2,3, \tag{6.45}$$

де

$$\hat{\sigma}^2_{\alpha_i^*} = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{3} C_k \left(\alpha_i(k,j) - \overline{\alpha}_i(k,j) \right) \right)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} C_k^2 \hat{\sigma}^2_{\alpha_i(k)} + \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{3} C_k C_l \hat{\sigma}^2_{\alpha_i(k)\alpha_i(l)} = C^T A C.$$

Для стислості позначимо $\hat{\sigma}^2_{\alpha_i(k)} = \hat{\sigma}^2_k$, $\hat{\sigma}^2_{\alpha_i(k)\alpha_i(l)} = \hat{\sigma}^2_{kl}$, тоді $C^T = \left[C_2, C_3 \right]$,

$$A = \begin{bmatrix} \left(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 - 2\hat{\sigma}_{12}^2 \right) & \left(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_{23}^2 - \hat{\sigma}_{13}^2 - \hat{\sigma}_{12}^2 \right) \\ \left(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_{23}^2 - \hat{\sigma}_{13}^2 - \hat{\sigma}_{12}^2 \right) & \left(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_3^2 - 2\hat{\sigma}_{13}^2 \right) \end{bmatrix}.$$

Тепер умова $AC = B$ (6.45) еквівалентна системі:

$$B = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_{12}^2 \\ \hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_{13}^2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}. \tag{6.46}$$

Розв'язок $C = A^{-1}B$ системи (6.46) існує, якщо матриця A позитивно визначена. Що менше корельовані похибки в оцінюванні α_i різними методами, то ближче матриця A до діагональної. Оскільки норми близькості (6.41)–(6.43) взяті в просторі змінних x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, то можна чекати слабку кореляцію в похибках оцінок α_i різними методами — моделями (6.41)–(6.43). Підставивши знайдені з системи (6.46) оптимальні значення C_2,

C_3, а також $C_1 = 1 - C_2 - C_3$ в рівняння (6.44), отримаємо оптимально зважену оцінку α_i^* коефіцієнта α_i (за умови гарної обумовленості матриці A і невеликої похибки оцінок $\hat{\sigma}_i^2$, $\hat{\sigma}_{ij}^2$, дисперсій σ_i^2, σ_{ij}^2).

В іншому випадку для гарантії непогіршення результату для зважування оцінок α_i слід скористатися мінімаксним підходом. Оцінки $\hat{\sigma}_i^2$, $\hat{\sigma}_{ij}^2$, обчислені за m згенерованими вибірками даних, мають похибки з χ^2-розподілом, якщо похибки оцінок $\alpha_i(k)$ розподілені за нормальним законом. Істинні значення σ_i^2, σ_{ij}^2. для заданого рівня достовірності знаходяться в інтервалі $(1 \pm \gamma)^{-1} \hat{\sigma}_i^2$, $(1 \pm \gamma)^{-1} \hat{\sigma}_{ij}^2$, або приблизно $(1 \pm \gamma)^{-1} \sigma_i^2$, $(1 \pm \gamma)^{-1} \sigma_{ij}^2$, де γ — квантиль $\chi^2(p, m)$ розподілу, $\gamma << 1$.

Нехай $\sigma_i^2 = \hat{\sigma}_i^2 (1+\gamma)$, для $i \in I = \overline{\{1, n_1\}}$, $\sigma_j^2 = \hat{\sigma}_j^2 (1-\gamma)$, для $j \in J = \overline{\{n_1 + 1, n\}}$. Тоді $\sigma_{ij}^2 = \hat{\sigma}_{ij}^2 (1+\gamma)$, для $i, j \in I$; $\sigma_{ij}^2 = \hat{\sigma}_{ij}^2 (1-\gamma)$, для $i, j \in J$; $\sigma_{ij}^2 = \hat{\sigma}_{ij}^2 \sqrt{(1-\gamma^2)}$, для $i \in I, j \in J$ або $i \in J, j \in I$. Оцінка дисперсії зваженої оцінки α_r^* r-го АДК:

$$\hat{\sigma}_{\alpha_r^*}^2 = \sum_{i \in I} C_i^2 \hat{\sigma}_i^2 (1+\gamma) + \sum_{j \in J} C_i^2 \hat{\sigma}_i^2 (1-\gamma) + \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j \in I}} C_i C_j \hat{\sigma}_{ij}^2 (1+\gamma) +$$
$$+ \sum_{\substack{i \neq j \\ i, j \in J}} C_i C_j \hat{\sigma}_{ij}^2 (1-\gamma) + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} C_i C_j \hat{\sigma}_{ij}^2 \sqrt{(1-\gamma^2)} + \sum_{\substack{i \in J \\ j \in I}} C_i C_j \hat{\sigma}_{ij}^2 \sqrt{(1-\gamma^2)}. \quad (6.47)$$

Вираз (6.47) береться L разів для всіх можливих комбінацій $\hat{\sigma}_{ij}^2 (1 \pm \gamma)$, $i = \overline{1,3}$. Для кожного j-го поєднання з умови (6.45) отримуємо систему, аналогічну (6.46), розв'язуючи яку, знаходимо оптимальний ξ-й вектор $C^*(\xi)$:

$$C^*(\xi) = \left[C_1^*(\xi), C_2^*(\xi), C_3^*(\xi) \right]^T, \ \xi = \overline{1, L} \quad (6.48)$$

і обчислюємо $\sigma^2_{\alpha^*_r}\left(S, C^*(\xi)\right)$, $\xi = \overline{1, L}$; $S = \overline{1, L}$.

Мінімаксна оцінка C^* визначається із умови

$$C^* = \arg\min_{\xi\in\{1,L\}, S\in\{1,L\}} \max \sigma^2_{\alpha^*_r}\left(S, C^*(\xi)\right).$$

Тобто кожен вектор (6.48) підставляють у кожний варіант дисперсії (6.47) і за C^* приймається той, найбільше значення якого за всіх варіантів (6.47) мінімальне серед найбільших значень інших векторів (6.48).

Приклад 6.5. Для наочності розглянемо двовимірний випадок ($p = 2$). Нехай $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 9$, $\sigma_{12}^2 = 2{,}8$, $\gamma = 0{,}1$. Можливі поєднання наведено в табл. 6.4.

Таблиця 6.4

Множники можливих відхилень оцінок дисперсій

Номер варіанта	Множники для		
	σ_1^2	σ_2^2	σ_{12}^2
1	$1+\gamma$	$1+\gamma$	$1+\gamma$
2	$1-\gamma$	$1-\gamma$	$1-\gamma$
3	$1+\gamma$	$1-\gamma$	$\sqrt{\left(1-\gamma^2\right)}$
4	$1-\gamma$	$1+\gamma$	$\sqrt{\left(1-\gamma^2\right)}$

Оцінка (6.44):

$$\alpha_i^* = C\alpha_i(1) + (1-C)\alpha_i(2).$$

Дисперсія (6.114):

$$\sigma^2_{\alpha^*_r} = \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}^2\right)C^2 + 2\left(\sigma_{12}^2 - \sigma_1^2\right)C + \sigma_2^2. \qquad (6.48)$$

Підставивши замість дисперсій чотири варіанти їх оцінки з табл. 6.3 і виконавши операції (6.45), (6.46), отримаємо набір (6.48) для чотирьох варіантів (6.48):

$$C^*(1)=C^*(2)=\frac{\hat{\sigma}_1^2-\hat{\sigma}_{12}^2}{\hat{\sigma}_1^2+\hat{\sigma}_2^2-2\hat{\sigma}_{12}^2}=1{,}41;$$

$$C^*(3)=\frac{\hat{\sigma}_2^2(1-\gamma)-\hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1-\gamma^2}}{\hat{\sigma}_1^2(1+\gamma)+\hat{\sigma}_2^2(1-\gamma)-2\hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1-\gamma^2}}=1{,}465;$$

$$C^*(4)=\frac{\hat{\sigma}_2^2(1+\gamma)-\hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1-\gamma^2}}{\hat{\sigma}_1^2(1-\gamma)+\hat{\sigma}_2^2(1+\gamma)-2\hat{\sigma}_{12}^2\sqrt{1-\gamma^2}}=1{,}361.$$

Значення $\sigma^2_{\alpha_r^*}\left(S,C^*(\xi)\right)$ зведено в табл. 6.5.

Таблиця 6.5

Оптимальні значення дисперсій

$\sigma^2_{\alpha_r^*}\left(S,C^*(\xi)\right)$				
S \ ξ	1	2	3	4
1	0,290	0,290	0,304	0,300
2	0,236	0,236	0,249	0,245
3	0,327	0,327	0,316	0,354
4	0,232	0,232	0,275	0,218

У табл. 6.5 жирною рамкою виділено варіанти з $\max\sigma^2_{\alpha_r^*}\left(S,C^*(\xi)\right)$, подвійною рамкою — з $\min\limits_{\xi\in\{1,4\},S\in\{1,4\}}\max\hat{\sigma}^2_{\alpha_r^*}=$ $=\hat{\sigma}^2_{\alpha_r^*}\left(3,C^*(3)\right)=0{,}316$, із її аргументом $C^*=1{,}465$, $\left(1-C^*\right)=-0{,}465$. Якщо взяти $\sigma_1^2=1$; $\sigma_2^2=9$; $\sigma_{12}^2=2{,}8$; $\gamma=0{,}1$, то $C^*(1)=C^*(2)=0{,}756$; $C^*(3)=0{,}737$; $C^*(4)=0{,}737$.

До табл. 6.5 подібна табл. 6.6

Таблиця 6.6

Оптимальні значення дисперсій

$\sigma^2_{\alpha_r^*}\left(S, C^*(\xi)\right)$				
S \ ξ	1	2	3	4
1	0,081	0,081	0,089	0,087
2	0,067	0,067	0,073	0,071
3	0,082	0,082	0,078	0,099
4	0,076	0,076	0,094	0,070

Відповідно $\min\limits_{\xi\in\{1,4\},S\in\{1,4\}} \max \hat{\sigma}^2_{\alpha_r^*} = \hat{\sigma}^2_{\alpha_r^*}\left(S, C^*(\xi)\right) = 0,082$, $C^* = 0,756$, $\left(1 - C^*\right) = 0,244$. Якщо припустити, що $\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$, то для різних значень коефіцієнта кореляції $r_{12} = \dfrac{\sigma_{12}^2}{\sqrt{\sigma_1^2 \sigma_2^2}}$ та співвідношення $F_{12} = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}$ одержимо сім'ю графіків $C^*\left(r_{12}, F\right)$ (рис. 6.23). Для $F_{12} = 1$, $C^* = 0,5$ для будь-яких r_{12}; при $F_{12} \to \infty$, $C^* \to 1$, $\left(1 - C^*\right) \to 0$, тобто неефективний метод виключається. Характерно, що для однакових $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \left|\sigma_{12}^2\right|$ величина $\hat{\sigma}^2_{\alpha_r^*}$ залежить від знака σ_{12}^2 (0,316 для позитивної і 0,082 — для негативної). Тобто зважування двох методів із негативною σ_{12}^2 дає кращий результат. У даному прикладі для $\sigma_{12}^2 = 0$ дисперсія $\hat{\sigma}^2_{\alpha_r^*} = 0,9$. Це набагато більше мінімаксних значень дисперсій при $\sigma_{12}^2 = \pm 2,8$ (0,316 і 0,082 відповідно). Тобто взаємна кореляція дозволяє підвищити точність мінімаксної оцінки.

Таким чином, використовуючи кілька моделей об'єкта ідентифікації і кілька методів їх параметричного оцінювання спільно з технологією статистичного моделювання перешкод, можна істотно підвищити точність оцінок параметрів АДК ЛА без збільшення довжини вибірки даних натурних випробувань. Тим

більше, що з огляду на нестаціонарність об'єкта ідентифікації, вибірки не можуть бути як завгодно великими.

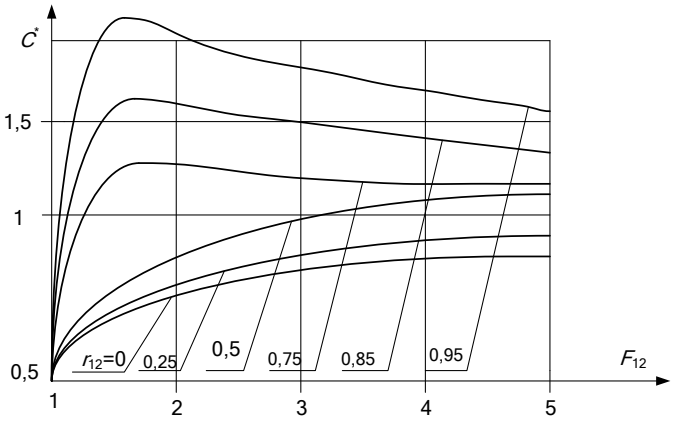


Рис. 6.23. Залежність оптимальної ваги C^* від ступеня кореляції і зашумленості оцінок

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Сильвестров А. Н.* Идентификация и оптимизация автоматических систем / А. Н. Сильвестров, П. И. Чинаев. — М. : Энергоатомиздат, 1987. — 200 с.

2. *Кірічков В. М.* Ідентифікація об'єктів систем управління технологічними процесами / В. М. Кірічков. — К. : Вища шк., 1990. — 263 с.

3. *Костюк В. І.* Безпошукові градієнтні самоналаштовуючі системи / В. І. Костюк. — К. : Техніка, 1969. — 380 с

4. *Адаптивні* системи ідентифікації / за ред. В. І. Костюка. — К. : Техніка, 1975. — 200 с.

5. *Люнг Л.* Идентификація систем. Теория для пользователей / Л. Люнг. — М. : Наука, 1991. — 432 с.

6. *Минина О. М.* Определение динамических характеристик и параметров типовых регулирующих объектов / О. М. Минина. — М. : Вид-во АН СССР, 1963.

7. *Наладка* средств автоматизации и автоматических систем регулирования / за ред. А. С. Клюєва. — М. : Енергоатомиздат, 1989. — 367 с.

Розділ 7

ДВОКРОКОВА ІДЕНТИФІКАЦІЯ КОЕФІЦІЄНТІВ МОДЕЛІ РУХОМИХ ОБ'ЄКТІВ

7.1. Математичні моделі поздовжнього короткоперіодичного руху об'єкта

Поздовжній рух ЛА у швидкісній системі координат (*X*, *Y*, *Z*) [1] описується системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} m\dot{v} = X, \\ mv\dot{\theta} = Y, \\ J_{z_1}\dot{\omega} = M_z, \end{cases}$$

де m і J_{z_1} — незмінні для даної ділянки траєкторії маса і момент інерції; $v, \omega_z, \dot{v}, \dot{\omega}_2$ — лінійна і кутова швидкості та їх похідні за часом $\dot{\theta} = \omega_z - \dot{\alpha}$; α — кут атаки; X, Y, M_z — сили і момент:

$$\left.\begin{aligned} X &= P_x - Q - G\sin\theta, \\ Y &= P_y + Y_{\text{аер}} - G\cos\theta, \\ M_z &= M_{z\,\text{дв}} + M_{z\,\text{аер}}, \end{aligned}\right\}$$

де Q, $Y_{\text{аер}}$, $M_{z\,\text{аер}}$ — аеродинамічні сили опору, піднімальна сила і момент; $P_x, P_y, M_{z\,\text{дв}}$ — складові тяги і моменту, що створюються двигунами; G — вага ЛА; θ — кут нахилу траєкторії.

Як основний, розглядається рух зі сталою швидкістю v, висотою H, конфігурацією літака і тягою двигунів. Тоді для короткоперіодичного руху центру мас і навколо центра мас літака, що становить реакцію на відхилення керувального впливу $\delta_{\text{в}}$ (кут відхилення рулів висоти або стабілізаторів) у пов'язаній із літаком системі координат (X_1, Y_1, Z_1), приріст ΔC_y і Δm_z, коефіцієнти C_y

та m_z піднімальної сили і моменту $M_z = m_z q S$ можуть бути наближено виражені лінійною залежністю:

$$\Delta C_y = C_y^{\alpha}\Delta\alpha + C_y^{\dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha} + C_y^{\omega_z}\Delta\omega_{z_1} + C_y^{\delta_в}\Delta\delta_b\,; \qquad (7.1)$$

$$\Delta m_{z_1} = m_{z_1}^{\alpha}\Delta\alpha + m_{z_1}^{\dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha} + m_{z_1}^{\omega_z}\Delta\omega_z + m_{z_1}^{\delta_в}\Delta\delta_b\,, \qquad (7.2)$$

де $C_y^{\alpha}, C_y^{\dot{\alpha}}, C_y^{\omega_z}, C_y^{\delta_b}$ — часткові похідні від C_y за відповідними змінними $\alpha, \dot{\alpha}, \omega_z, \delta_b$, взятими в точці, яка відповідає основному руху; $m_z^{\alpha}, m_{z_1}^{\dot{\alpha}}, m_{z_1}^{\omega_z}, m_z^{\delta_b}$ — аналогічні похідні від m_{z_1}; q — швидкісний напір повітряного потоку; S — площа крила.

Запишемо кінематичне співвідношення

$$\dot{\theta} = \frac{g}{v} n_y \cos\theta\,,$$

де g — прискорення сили тяжіння у відхиленнях від основного руху, вважаючи $v = \text{const},\ \cos\theta \cong 1$:

$$\Delta\dot{\alpha} = \Delta\omega_{z_1} - \frac{g}{v}\Delta n_y\,. \qquad (7.3)$$

Прирости коефіцієнтів ΔC_y та Δm_z пов'язані з вимірюваними в польоті вертикальним перевантаженням і швидкістю $n_{ó}$ і ω_{z_1} співвідношенням:

$$\Delta C_y = \frac{G}{qS}\Delta n_y\,, \qquad (7.4)$$

$$\Delta m_{z_1} = \frac{J_{z_1}}{qSb_{À}}\Delta\dot{\omega}_{z_1}\,,$$

де b_A — середня аеродинамічна хорда крила (САХ).

7.1.1. Залежність Δm_{z_1} від $\Delta n_y, \Delta\omega_{z_1}, \Delta\delta_b$..

Підставивши з рівняння (7.3) значення $\Delta\dot{\alpha}$ у рівняння (7.1) і (7.2), отримаємо:

$$\Delta C_y = C_y^{\alpha}\Delta\alpha + \left(C_y^{\dot{\alpha}} + C_y^{\omega}\right)\Delta\omega_{z_1} + C_y^{\delta}\Delta\delta_b - C_y^{\dot{\alpha}}\frac{g}{v}\Delta n_y, \qquad (7.5)$$

$$\Delta m_{z_1} = m_{z_1}^{\alpha}\Delta\alpha + \left(m_{z_1}^{\dot{\alpha}} + m_{z_1}^{\omega}\right)\Delta\omega_{z_1} + m_{z_1}^{\delta}\Delta\delta_b - m_{z_1}^{\dot{\alpha}}\frac{g}{v}\Delta n_y. \qquad (7.6)$$

Враховуючи вираз (7.4), з рівняння (7.5) знайдемо $\Delta\alpha$:

$$\Delta\dot{\alpha} = \left(C_y^{\alpha}\right)^{-1}\left[\left(\frac{G}{qS} + C_y^{\dot{\alpha}}\frac{g}{v}\right)\Delta n_y - \left(C_y^{\dot{\alpha}} + C_y^{\omega}\right)\Delta\omega_{z_1} - C_y^{\delta}\Delta\delta_b\right]. \qquad (7.7)$$

Підставивши (7.7) в рівняння (7.6) і враховуючи, що $\left(C_y^{\alpha}\right)^{-1} m_{z_1}^{\alpha} = m_{z_1}^{C_y}$, отримаємо вираз, що пов'язує Δm_{z_1} з добре вимірюваними змінними $\Delta n_y, \Delta\omega_{z_1}, \Delta\delta_b$:

$$\begin{aligned}\Delta m_{z_1} = &\left[m_{z_1}^{C_y}\left(\frac{G}{qS} + C_y^{\dot{\alpha}}\frac{g}{v}\right) - m_{z_1}^{\dot{\alpha}}\frac{g}{v}\right]\Delta n_y + \\ &+\left[\left(m_{z_1}^{\dot{\alpha}} + m_{z_1}^{\omega}\right) - m_{z_1}^{C_y}\left(C_y^{\dot{\alpha}} + C_y^{\omega}\right)\right]\Delta\omega_{z_1} + \\ &+\left[m_{z_1}^{\delta} - m_{z_1}^{C_y}C_y^{\delta}\right]\Delta\delta_b.\end{aligned} \qquad (7.8)$$

7.1.2. Залежність Δm_{z_1} від $\Delta\alpha, \Delta\omega_{z_1}, \Delta\delta_b$

Із виразів (7.3) і (7.4) отримаємо:

$$\Delta\tilde{N}_y = \tau\left(\Delta\omega_{z_1} - \Delta\dot{\alpha}\right), \qquad (7.9)$$

де $\tau = \frac{v}{g}\frac{G}{qS} = \frac{2m}{\rho S v}$ — масштаб часу; m — маса літака; ρ — густина повітря.

Підставивши (7.9) і (7.1), знайдемо $\Delta\dot{\alpha}$:

$$\Delta\dot{\alpha} = \frac{\tau - C_y^{\omega}}{\tau + C_y^{\dot{\alpha}}}\Delta\omega_{z_1} - \frac{C_y^{\alpha}}{\tau + C_y^{\dot{\alpha}}}\Delta\alpha - \frac{C_y^{\delta}}{\tau + C_y^{\dot{\alpha}}}\Delta\delta_b. \qquad (7.10)$$

Підставивши значення (7.10) в рівняння (7.2), отримаємо шуканий вираз:

$$\Delta m_{z_1} = \left(m_{z_1}^{\dot\alpha} \frac{C_y^{\alpha}}{\tau + C_y^{\dot\alpha}} \right) \Delta\alpha + \left(m_{z_1}^{\omega} + m_{z_1}^{\dot\alpha} \frac{\tau - C_y^{\omega}}{\tau + C_y^{\dot\alpha}} \right) \Delta\omega_{z_1} + \\ + \left(m_{z_1}^{\delta} - m_{z_1}^{\dot\alpha} \frac{C_y^{\delta}}{\tau + C_y^{\alpha}} \right) \Delta\delta_b. \qquad (7.11)$$

7.1.3. Залежність Δm_{z_1} *від* $\Delta n_y, \Delta\dot\alpha, \Delta\delta_b$

Із рівняння (7.9) знайдемо

$$\Delta\omega_{z_1} = \tau^{-1} \Delta C_y + \Delta\dot\alpha \,. \qquad (7.12)$$

Із рівняння (7.1):

$$\Delta\alpha = \left(C_y^{\alpha} \right)^{-1} \left[\Delta C_y - C_y^{\omega} \Delta\omega_{z_1} + C_y^{\dot\alpha} \Delta\dot\alpha + C_y^{\delta} \Delta\delta_b \right]. \qquad (7.13)$$

Підставивши (7.4) в рівняння (7.12), а (7.13) в рівняння (7.2) і об'єднавши подібні, отримаємо:

$$\Delta m_{z_1} = \left[\frac{m_{z_1}^{\alpha}}{C_y^{\alpha}} + m_{z_1}^{\omega} \tau^{-1} \frac{m_{z_1}^{\alpha}}{C_y^{\alpha}} C_y^{\omega} \tau^{-1} \right] \Delta C_y + \\ + \left[\left(m_{z_1}^{\dot\alpha} + m_{z_1}^{\omega} \right) - \frac{m_{z_1}^{\alpha}}{C_y^{\alpha}} C_y^{\dot\alpha} \right] \Delta\dot\alpha + \left[m_{z_1}^{\delta} - \frac{C_y^{\delta}}{C_y^{\alpha}} m_{z_1}^{\alpha} \right] \Delta\delta_b$$

або

$$\Delta m_{z_1} = \left[\left(m_{z_1}^{C_y} + \frac{m_{z_1}^{\bar\omega}}{\mu} \right) - m_{z_1}^{C_y} \frac{C_y^{\bar\omega}}{\mu} \right] \frac{G}{qS} \Delta n_y + \\ + \left[m_{z_1}^{\bar{\dot\alpha}} + m_{z_1}^{\bar\omega} - m_{z_1}^{\omega} C_y^{\dot\alpha} \right] \Delta\dot\alpha + \left[m_{z_1}^{\delta} - C_y^{\delta} m_{z_1}^{C_y} \right] \Delta\delta_b, \qquad (7.14)$$

де $m_{z_1}^{\bar\omega} = \frac{v}{b_{À}} m_{z_1}^{\omega}$; $m_{z_1}^{\bar{\dot\alpha}} = m_{z_1}^{\dot\alpha} \frac{v}{b_{À}}$; $C_y^{\bar\omega} = C_y^{\omega} \frac{v}{b_{À}}$; $\mu = \frac{2m}{\rho S b_{À}}$ — коефіцієнт відносної щільності літака в поздовжньому русі.

7.1.4. Залежність Δm_{z_1} *від* $\Delta\alpha, \Delta\dot{\alpha}, \Delta\delta_b$

Прирівнявши (7.1) і (7.9), знайдемо:

$$\Delta\omega_{z_1} = \frac{C_y^{\alpha}}{\tau - C_y^{\omega}}\Delta\alpha + \frac{\tau + C_y^{\dot{\alpha}}}{\tau - C_y^{\omega}}\Delta\alpha + \frac{C_y^{\delta}}{\tau - C_y^{\omega}}\Delta\delta_b . \qquad (7.15)$$

Підставивши (7.15) в рівняння (7.9), отримаємо:

$$\Delta m_{z_1} = \left(m_{z_1}^{\alpha} + m_{z_1}^{\omega}\frac{C_y^{\alpha}}{\tau - C_y^{\omega}} \right)\Delta\alpha + \left(m_{z_1}^{\dot{\alpha}} + m_{z_1}^{\omega}\frac{\tau + C_y^{\dot{\alpha}}}{\tau - C_y^{\omega}} \right)\Delta\dot{\alpha} + \\ + \left(m_{z_1}^{\delta} + m_{z_1}^{\omega}\frac{C_y^{\delta}}{\tau - C_y^{\omega}} \right)\Delta\delta_b . \qquad (7.16)$$

7.1.5. Залежність ΔC_y *від* $\Delta\alpha, \Delta\omega_z, \Delta\delta_b$

Підставивши значення $\Delta\dot{\alpha}$ з рівняння (7.3) в рівняння (7.1) та враховуючи (7.4), отримаємо:

$$\Delta C_y = \frac{C_y^{\alpha}}{1 + \frac{C_y^{\bar{\dot{\alpha}}}}{\mu}}\Delta\alpha + \frac{C_y^{\dot{\alpha}} + C_y^{\omega}}{1 + \frac{C_y^{\bar{\dot{\alpha}}}}{\mu}}\Delta\omega_{z_1} + \frac{C_y^{\delta}}{1 + \frac{C_y^{\bar{\dot{\alpha}}}}{\mu}}\Delta\delta_b . \qquad (7.17)$$

7.1.6. Залежність ΔC_y *від* $\Delta\alpha, \Delta\dot{\alpha}, \Delta\delta_b$

Підставивши значення $\Delta\omega_z$ з рівняння (7.3) в рівняння (7.1) та враховуючи (7.7), отримаємо:

$$\Delta C_y = \frac{C_y^{\alpha}}{1 - \frac{C_y^{\bar{\omega}}}{\mu}}\Delta\alpha + \frac{C_y^{\dot{\alpha}} + C_y^{\omega}}{1 - \frac{C_y^{\bar{\omega}}}{\mu}}\Delta\dot{\alpha} + \frac{C_y^{\delta}}{1 - \frac{C_y^{\bar{\omega}}}{\mu}}\Delta\delta_{\text{в}} .$$

7.1.7. Залежність $\Delta\dot{C}_y$ *від* $\Delta\dot{\alpha}, \Delta\dot{\omega}_{z_1}, \Delta\dot{\delta}_b$

Узявши похідну за часом від лівої і правої частини рівняння (7.17) і підставивши значення $\Delta\dot{\alpha}$ з рівняння (7.3), отримаємо:

$$\Delta\dot{C}_y = \frac{C_y^{\alpha}}{1+\frac{C_y^{\bar{\dot{\alpha}}}}{\mu}}\left(\Delta\omega_{z_1} - \frac{g}{v}\Delta n_y\right) + \frac{C_y^{\dot{\alpha}} + C_y^{\omega}}{1+\frac{C_y^{\bar{\dot{\alpha}}}}{\mu}}\Delta\dot{\omega}_{z_1} + \frac{C_y^{\delta}}{1+\frac{C_y^{\delta}}{\mu}}\Delta\dot{\delta}_b\,.$$

7.2. Характеристики стійкості і керованості та їх оцінки за лінеаризованим рівнянням сили Y і моменту M_{z1}

Запишемо рівняння, відповідні (7.8), (7.14), (7.16):

$$\Delta\dot{\omega}_{z_1} = a_1\Delta n_y + a_2\Delta\omega_{z_1} + a_3\Delta\delta_b; \tag{7.18}$$

$$\Delta\dot{\omega}_{z_1} = b_1\Delta\alpha + b_2\Delta\omega_{z_1} + b_3\Delta\delta_b; \tag{7.19}$$

$$\Delta\dot{\omega}_{z_1} = C_1\Delta n_y + C_2\Delta\dot{\alpha} + C_3\Delta\delta_b; \tag{7.20}$$

$$\Delta\dot{\omega}_{z_1} = d_1\Delta\alpha + d_2\Delta\dot{\alpha} + d_3\Delta\delta_b; \tag{7.21}$$

$$\Delta n_y = e_1\Delta\alpha + e_2\Delta\omega_{z_1} + e_3\Delta\delta_b; \tag{7.22}$$

$$\Delta n_y = f_1\Delta\alpha + f_2\Delta\dot{\alpha} + f_3\Delta\delta_b; \tag{7.23}$$

$$\Delta\dot{n}_y = P_1\left(\Delta\omega_{z_1} - \frac{g}{v}\Delta n_y\right) + P_2\Delta\omega_{z_1} + P_3\Delta\dot{\delta}_b\,, \tag{7.24}$$

де, з урахуванням залежностей (7.8), (7.9), (7.10), (7.16). відповідно враховуючи, що

$$\Delta m_{z_1} = \frac{J_{z_1}}{q\,S\,b_{\text{À}}}\Delta\dot{\omega}_{z_1},$$

маємо:

$$a_1 = \frac{q\,S\,b_{\text{À}}}{J_{z_1}}\left[m_{z_1}^{C_y}\left(\frac{G}{q\,S} + C_y^{\dot{\alpha}}\frac{g}{v}\right) - m_{z_1}^{\dot{\alpha}}\frac{g}{v}\right]; \tag{7.25}$$

$$a_2 = \frac{q\,S\,b_{\text{À}}}{J_{z_1}}\left[\left(m_{z_1}^{\dot{\alpha}} + m_{z_1}^{\omega}\right) - m_{z_1}^{C_y}\left(C_y^{\dot{\alpha}} + C_y^{\omega}\right)\right]; \tag{7.26}$$

$$a_3 = \frac{q S b_A}{J_{z_1}} \left[m_{z_1}^{\delta} - m_{z_1}^{C_y} C_y^{\delta} \right]; \qquad (7.27)$$

$$b_1 = \frac{q S b_A}{J_{z_1}} \left[m_{z_1}^{\alpha} - m_{z_1}^{\dot{\alpha}} \frac{C_y^{\alpha}}{\tau + C_y^{\dot{\alpha}}} \right];$$

$$b_2 = \frac{q S b_A}{J_{z_1}} \left[m_{z_1}^{\omega} + m_{z_1}^{\dot{\alpha}} \frac{\tau - C_y^{\omega}}{\tau + C_y^{\dot{\alpha}}} \right];$$

$$b_3 = \frac{q S b_A}{J_{z_1}} \left[m_{z_1}^{\delta} - m_{z_1}^{\dot{\alpha}} \frac{C_y^{\delta}}{\tau + C_y^{\dot{\alpha}}} \right];$$

$$C_1 = \frac{q S b_A}{J_{z_1}} \left[\left(m_{z_1}^{C_y} + \frac{m_{z_1}^{\bar{\omega}}}{\mu} \right) - m_{z_1}^{C_y} \frac{C_y^{\bar{\omega}}}{\mu} \right] \frac{G}{qS};$$

$$C_2 = \frac{q S b_A}{J_{z_2}} \left[\left(m_{z_1}^{\dot{\alpha}} + m_{z_1}^{\omega} \right) - m_{z_1}^{C_y} C_y^{\dot{\alpha}} \right];$$

$$C_3 = \frac{q S b_A}{J_{z_1}} \left[m_{z_1}^{\delta} - C_y^{\delta} \right];$$

$$d_1 = \frac{q S b_A}{J_{z_1}} \left[m_{z_1}^{\alpha} + m_{z_1}^{\omega} \frac{C_y^{\alpha}}{\tau - C_y^{\omega}} \right];$$

$$d_2 = \frac{q S b_A}{J_{z_1}} \left[m_{z_1}^{\dot{\alpha}} + m_{z_1}^{\omega} \frac{\tau + C_y^{\dot{\alpha}}}{\tau - C_y^{\omega}} \right];$$

$$d_3 = \frac{q S b_A}{J_{z_1}} \left[m_{z_1}^{\delta} + m_{z_1}^{\omega} \frac{C_y^{\delta}}{\tau - C_y^{\omega}} \right];$$

$$e_1 = \frac{qS}{G} \frac{C_y^{\dot{\alpha}}}{1 + \frac{C_y^{\bar{\dot{\alpha}}}}{\mu}}; \qquad (7.28)$$

$$e_2 = \frac{qS}{G}\frac{C_y^{\dot\alpha} + C_y^{\omega}}{1 + \frac{C_y^{\bar{\dot\alpha}}}{\mu}}; \tag{7.29}$$

$$e_3 = \frac{qS}{G}\frac{C_y^{\delta}}{1 + \frac{C_y^{\bar{\dot\alpha}}}{\mu}}; \tag{7.30}$$

$$f_1 = \frac{qS}{G}\frac{C_y^{\alpha}}{1 - C_y^{\alpha}/\mu}; \tag{7.31}$$

$$f_2 = \frac{qS}{G}\frac{C_y^{\dot\alpha} + C_y^{\omega}}{1 - C_y^{\bar\omega}/\mu}; \tag{7.32}$$

$$f_3 = \frac{qS}{G}\frac{C_y^{\delta}}{1 - C_y^{\bar\omega}/\mu}; \tag{7.33}$$

$$P_1 = e_1;\ P_2 = e_2;\ P_3 = e_3. \tag{7.34}$$

7.2.1. Передатні функції каналу поздовжнього руху

Із рівняння (7.10), (7.11) складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \Delta\dot\alpha = C_{11}\Delta\alpha + C_{12}\Delta\omega_z + C_{13}\Delta\delta_в; \\ \Delta\dot\omega_{z_1} = C_{21}\Delta\alpha + C_{22}\Delta\omega_{z_1} + C_{23}\Delta\delta_в, \end{cases} \tag{7.35}$$

де відповідно (7.10), (7.11):

$$C_{11} = -\frac{C_y^{\alpha}}{t + C_y^{\dot\alpha}}; \quad C_{12} = \frac{t - C_y^{\omega}}{t + C_y^{\dot\alpha}}; \quad C_{13} = \frac{C_y^{\delta}}{t + C_y^{\dot\alpha}};$$

$$C_{21} = \frac{qSb_À}{J_{z_1}}\left(m_{z_1}^{\alpha} - m_{z_1}^{\dot\alpha}\frac{C_y^{\alpha}}{t + C_y^{\dot\alpha}}\right);$$

$$C_{22} = \frac{qSb_À}{J_{z_1}}\left(m_{z_1}^{\omega} - m_{z_1}^{\dot\alpha}\frac{t - C_y^{\omega}}{t + C_y^{\dot\alpha}}\right);$$

$$C_{23} = \frac{q S b_{\text{À}}}{J_{z_1}} \left(m_{z_1}^{\delta} - m_{z_1}^{\dot{\alpha}} \frac{C_y^{\delta}}{t + C_y^{\alpha}} \right).$$

Для визначення передатних функцій, вважаючи в (7.35) початкові умови нульовими, перейдемо до змінної Лапласа — s, наведемо подібні, тоді отримаємо систему алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases} \left(S - C_{11}\right)\Delta\alpha - C_{12}\Delta\omega_{z_1} = C_{13}\Delta\delta_{\text{â}}; \\ -C_{21}\Delta\alpha + \left(S - C_{22}\right)\Delta\omega_{z_1} = C_{23}\Delta\delta_{\text{â}}. \end{cases} \tag{7.36}$$

Для визначення передатних функцій за кутом α і швидкістю ω_{z_1} достатньо знайти головний визначник і визначники $\Delta\omega_{z_1}$, $\Delta\alpha$ системи (7.36):

$$\Delta = s^2 - \left(C_{11} + C_{22}\right)S + \left(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}\right); \tag{7.37}$$

$$\Delta\alpha = C_{13}s - \left(C_{13}C_{22} - C_{12}C_{23}\right); \tag{7.38}$$

$$\Delta\omega_{z_1} = C_{23}s - \left(C_{23}C_{11} - C_{13}C_{21}\right). \tag{7.39}$$

Крім того, враховуючи (7.3), знайдемо:

$$\Delta n_y = \frac{v}{g}\left(\Delta\omega_{z_1} - S\Delta\alpha\right).$$

Передатні функції $W_{\alpha}(S)$, $W_{\omega_{z_1}}(S)$, $W_{n_y}(S)$ між керуючим впливом $\delta_{\text{в}}$ і реакціями на нього α, ω_{z_1} і n_y, відповідно дорівнюють:

$$W_{\alpha}(s) = \frac{\Delta\alpha}{\Delta};\ W_{\omega_{z_1}}(s) = \frac{\Delta\omega_{z_1}}{\Delta};$$

$$W_{n_y}(s) = \frac{v}{g}\left[W_{\omega_{z_1}}(s) - sW_{\alpha}(s)\right].$$

Із виразів (7.37)–(7.39) і значень C_{ij} для рівняння (7.35) випливає, що вільний член $\left(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}\right)$ у загальному знаменнику (7.37) передатних функцій, що визначає запас аперіодичної стійкості літака в каналі поздовжнього руху, дорівнює:

$$\left(C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21}\right)=\frac{qSb_A}{J_{z_1}}\times$$

$$\times\left\{(-1)\left[m_{z_1}^{\alpha}-m_{z_1}^{\dot\alpha}\frac{C_y^{\alpha}}{\tau+C_y^{\dot\alpha}}\right]\frac{\tau-C_y^{\omega}}{\tau+C_y^{\dot\alpha}}-\frac{C_y^{\alpha}}{\tau+C_y^{\dot\alpha}}\left[m_z^{\omega}+\frac{\tau-C_y^{\omega}}{\tau+C_y^{\dot\alpha}}m_{z_1}^{\dot\alpha}\right]\right\}=$$

$$=-\frac{qSb_AC_y^{\alpha}}{J_{z_1}}\left[m_z^{C_y}\frac{\mu-C_y^{\omega}}{\mu+C_y^{\bar{\dot\alpha}}}+\frac{m_z^{\bar\omega}}{\mu+C_y^{\bar{\dot\alpha}}}\right]=$$

$$=-\frac{qSb_{\grave{A}}C_y^{\alpha}}{J_{z_1}}\left[m_{z_1}^{C_y}+\frac{m_z^{\omega}}{\mu}-m_z^{C_y}\frac{C_y^{\bar\omega}+C_y^{\bar{\dot\alpha}}}{\mu+C_y^{\bar{\dot\alpha}}}-\frac{m_z^{\bar\omega}}{\mu}\frac{C_y^{\bar{\dot\alpha}}}{\mu+C_y^{\bar{\dot\alpha}}}\right].$$

Коефіцієнт $\left(C_{11}+C_{22}\right)$ при S в рівнянні (7.37), що визначає *запас коливальної стійкості*, дорівнює:

$$-\left(C_{11}+C_{22}\right)=-\frac{qSb_A}{J_{z_1}v}\left(m_{z_1}^{\alpha\bar\omega}+m_{z_1}^{\bar{\dot\alpha}}-m_{z_1}^{\bar{\dot\alpha}}\frac{C_y^{\bar\omega}+C_y^{\bar{\dot\alpha}}}{\mu+C_y^{\bar{\dot\alpha}}}\right)+\frac{C_y^{\alpha}\dfrac{v}{b_A}}{\mu+C_y^{\bar{\dot\alpha}}}.$$

Значення коефіцієнтів чисельників $\Delta\alpha,\Delta\omega_{z_1},\Delta n_y$ передатних функцій, відповідно дорівнюють:
для $\Delta\alpha$:

$$-\left(C_{13}C_{22}-C_{12}C_{21}\right)=\frac{qSb_A}{J_{z_1}}\left[m_{z_1}^{\bar\omega}\frac{C_y^{\delta}}{\mu+C_y^{\bar{\dot\alpha}}}+m_{z_1}^{\delta}\frac{\mu-C_y^{\bar\omega}}{\mu+C_y^{\bar{\dot\alpha}}}\right],$$

$$C_{13}=-\frac{C_y^{\delta}}{\tau+C_y^{\bar{\dot\alpha}}};$$

для $\Delta\omega_{z_1}$:

$$-\left(C_{11}C_{23}-C_{13}C_{21}\right)=-\frac{qSb_A}{J_{z_1}}\left[m_{z_1}^{\alpha}\frac{C_y^{\delta}}{\tau+C_y^{\dot\alpha}}-m_{z_1}^{\delta}\frac{C_y^{\alpha}}{\tau+C_y^{\bar{\dot\alpha}}}\right],\qquad(7.40)$$

$$C_{23}=\left(m_{z_1}^{\delta}-m_{z_1}^{\dot\alpha}\frac{C_y^{\delta}}{\tau+C_y^{\dot\alpha}}\right)\frac{qSb_A}{J_{z_1}}.$$

Для Δn_y вільний член дорівнює виразу (7.40), помноженому на $\frac{v}{g}$. Коефіцієнт при S в рівнянні (7.37) дорівнює:

$$\frac{v}{g}\frac{qSb_A}{J_{z_1}}\left[m_{z_1}^{\delta}\frac{C_y^{\bar{\alpha}}+C_y^{\bar{\omega}}}{\mu+C_y^{\bar{\alpha}}}-\left(m_{z_1}^{\bar{\alpha}}+m_{z_1}^{\bar{\omega}z_1}\right)\frac{C_y^{\delta}}{\mu+C_y^{\bar{\alpha}}}\right].$$

Коефіцієнт S^2 дорівнює:

$$-\frac{v}{g}\frac{C_y^{\delta}}{\tau+C_y^{\dot{\alpha}}}.$$

7.2.2. Вираз для оцінок характеристик стійкості і керованості в каналі поздовжнього руху літака

Запас стійкості (аперіодичної) *з перевантаження* при фіксованому керуванні (σ_n).

а) із (7.1) випливає, що справжнє значення запасу стійкості одне:

$$\sigma_n=\frac{J_{z_1}}{qSb_{\dot{A}}C_y^{\alpha}}\left(C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21}\right)=m_{z_1}^{C_y}+ \\ +\frac{m_{z_1}^{\bar{\omega}}}{\mu}-m_{z_1}^{C_y}\frac{C_y^{\bar{\omega}}+C_y^{\bar{\alpha}}}{\mu+C_y^{\bar{\alpha}}}-\frac{m_{z_1}^{C}}{\mu}\frac{C_y^{\bar{\alpha}}}{\mu+C_y^{\bar{\alpha}}}. \qquad (7.41)$$

б) із (7.18), (7.25)–(7.27) випливає, що оцінка $\hat{\sigma}_n$ істинного запасу стійкості σ_n (8.41) дорівнює:

$$\hat{\sigma}_n=\frac{J_{z_1}}{Gb_{\dot{A}}}\left(a_1+\frac{g}{v}a_2\right)=m_{z_1}^{C_y}+m_{z_1}^{C_y}\frac{C_y^{\bar{\alpha}}}{\mu}-\frac{m_{z_1}^{C_y^{\bar{\alpha}}}}{\mu}+ \\ +\frac{m_{z_1}^{\bar{\alpha}}+m_{z_1}^{\bar{\omega}}}{\mu}-m_{z_1}^{C_y}\frac{C_y^{\bar{\alpha}}+C_y^{\bar{\omega}}}{\mu}=m_{z_1}^{C_y}+\frac{m_{z_1}^{\bar{\omega}}}{\mu}-\frac{m_{z_1}^{C_y}C_{z_1}^{\bar{\omega}}}{\mu}. \qquad (7.42)$$

Методична похибка у визначенні істинного запасу стійкості σ_n за оцінкою $\hat{\sigma}_n$ (7.42):

$$\delta\sigma_n = \hat{\sigma} - \sigma_n = m_{z_1}^{C_y}\left[\frac{C_y^{\bar{\omega}} + C_y^{\bar{\alpha}}}{\mu + C_y^{\bar{\alpha}}} - \frac{C_y^{\bar{\omega}}}{\mu}\right] +$$

$$+ m_{z_1}^{\bar{\omega}} \frac{C_y^{\bar{\alpha}}}{\mu\left(\mu + C_y^{\bar{\alpha}}\right)} = m_{z_1}^{C_y} \frac{C_y^{\bar{\alpha}}\left(\mu - C_y^{\bar{\omega}}\right)}{\mu\left(\mu + C_y^{\bar{\alpha}}\right)} + m_{z_1}^{\bar{\omega}} \frac{C_y^{\bar{\alpha}}}{\mu\left(\mu + C_y^{\bar{\alpha}}\right)} = \quad (7.43)$$

$$= \frac{C_y^{\bar{\alpha}}}{\mu\left(\mu + C_y^{\bar{\alpha}}\right)}\left[m_{z_1}^{C_y}\left(\mu - C_y^{\bar{\omega}}\right) + m_{z_1}^{\bar{\omega}}\right].$$

При $m_z^{C_y} < 0$, $m_z^{\bar{\omega}} < 0$, $C_y^{\bar{\alpha}} > 0$, що має місце для не змінного перевантаження літака n_y, величина $\delta\sigma_n < 0$, тобто оцінка (7.42) запасу (7.41) буде більше (за абсолютною величиною) на величину (7.43). Враховуючи реальні співвідношення величин $\mu = 50 \div 100$; $C_y^{\bar{\omega}} = 1-2$; $C_y^{\bar{\alpha}} = 0{,}5-1$; $m_{z_1}^{C_y} = 0{,}1-0{,}3$; $m_{z_1}^{\bar{\omega}} = 10-25$, вираз (7.43) можна записати наближено:

$$\delta\sigma_n \cong \left(m_{z_1}^{C_y} + \frac{m_{z_1}^{\bar{\omega}}}{\mu}\right)\frac{C_y^{\bar{\alpha}}}{\mu} \approx \sigma_n \frac{C_y^{\bar{\alpha}}}{\mu}. \quad (7.44)$$

Тоді відносна похибка $\delta\sigma_n/\sigma_n$ дорівнює:

$$\frac{\delta\sigma_n}{\sigma_n} \cong \frac{C_y^{\bar{\alpha}}}{\mu}.$$

Враховуючи реальний порядок величин $C_y^{\bar{\alpha}}$ і μ можна вважати, що оцінка (7.42) практично збігається з істинним значенням (7.41). Відносна похибка не перевищить 1–2 відсотків від σ_n.

7.2.3. Нейтральне центрування літака

Оцінка $\hat{\bar{X}}_n$ нейтрального центрування $\hat{\bar{X}}_n$ літака з перевантаженням n_y у відсотках від середньої аеродинамічної хорди літака (САХ) визначається за формулою

$$\hat{\bar{X}}_n = \bar{X}\,\% + \left|\hat{\sigma}_n\right| \cdot 100\,\%,$$

де $\hat{\sigma}_n$ — оцінка (7.42) або (7.41); $\overline{X}_T\,\% = \dfrac{\overline{X}_T}{b_A} 100\,\%$ — поздовжнє центрування літака у відсотках САХ.

7.2.4. Витрата руля висоти на одиницю перевантаження

Оцінка $\hat{\delta}_b^{C_y}$ коефіцієнта $\delta_b^{C_y}$ витрати руля висоти δ_b на одиницю перевантаження n_y визначається з рівняння (7.14) при $\Delta m_{z_1} = \Delta\dot{\alpha} = 0$ як відношення коефіцієнтів C_1 і C_3 при Δn та $\Delta\delta_b$:

$$\hat{\delta}_b^{n_y} = -\frac{\left(m_{z_1}^{C_y} + \dfrac{m_{z_1}^{\bar{\omega}}}{\mu}\right) - m_{z_1}^{C_y}\dfrac{C_y^{\bar{\omega}}}{\mu}\dfrac{G}{qS}}{m_{z_1}^{\delta} - m_{z_1}^{C_y} C_y^{\delta}}.$$

що еквівалентно відношенню коефіцієнтів рівняння (7.18):

$$\hat{\delta}_b^{C_y} = -\frac{a_1 + \dfrac{g}{v} a_2}{a_3}.$$

7.2.5. Похідна від коефіцієнта поздовжнього моменту за рулем висоти

Оцінка $\hat{m}_{z_1}^{\delta_b}$ похідної $m_{z_1}^{\delta_b}$ може бути обчислена шляхом множення одного з коефіцієнтів a_3, b_3, c_3 або d_3 на J_{z_1}/qSb_A рівнянь (7.18)–(7.21). Найбільш близькою буде оцінка:

$$\hat{m}_{z_1}^{\delta_b} = \frac{J_{z_1}}{qSb_A} b_3. \qquad (7.45)$$

Підставивши в рівняння (7.45) значення (7.27) β_3, отримаємо:

$$\hat{m}_{z_1}^{\delta_b} = \frac{J_{z_1}}{qSb_{\dot{A}}} b_3 = m_{z_1}^{\delta_b} - m_{z_1}^{\dot{\alpha}} \frac{C_y^{\delta}}{\mu + C_y^{\dot{\alpha}}},$$

при $m_{z_1}^{\dot{\alpha}} < 0,\ C_y^{\delta} < 0$ ця оцінка буде занижена за абсолютною величиною на 1–5 відсотків залежно від $C_y^{\delta}, m_{z_1}^{\dot{\alpha}}, C_y^{\alpha}, \mu$;

Коефіцієнт $m_{z_1}^{\delta_b}$ може бути визначений із передатної функції за ω_{z_1} через коефіцієнт $(C_{13}, C_{21} - C_{23}C_{11})$ чисельника, помноженого на $\frac{v}{g}$:

$$\hat{m}_{z_1}^{\delta_b} = \frac{v}{g}\frac{J_{z_1}G}{q^2 S^2 b_A C_y^{\alpha}}(C_{13}C_{21} - C_{23}C_{11}).$$

Методична похибка дорівнюватиме:

$$\delta\hat{m}_{z_1}^{\delta_b} = \hat{m}_{z_1}^{\delta_b} - m_{z_1}^{\delta_b} = \frac{m_{z_1}^{\delta_b} C_y^{\bar{\alpha}}}{\mu + C_y^{\alpha}} + m_{z_1}^{C_y} C_y^{\delta_b}\left(1 - \frac{C_y^{\bar{\alpha}}}{\mu + C_y^{\bar{\alpha}}}\right).$$

7.2.6. Коефіцієнт моменту поздовжнього сумарного демпфірування

Оцінка $\hat{m}_{z_1}^{*\bar{\alpha}}$ коефіцієнта моменту поздовжнього сумарного демпфірування:

$$\hat{m}_{z_1}^{*\bar{\alpha}} = m_{z_1}^{\bar{\alpha}} + m_{z_1}^{\bar{\omega}_{z_1}}$$

може бути обчислена шляхом множення одного з коефіцієнтів рівнянь (7.18)–(7.21) a_2, b_2, c_2 або d_2 на $J_{z_1} v / q S b_A$. Найбільш близькою буде

$$\hat{m}_{z_1}^{*\bar{\alpha}} = \frac{J_{z_1} v}{q S b_A} b_2.$$

Оскільки $\left|m_{z_1}^{\bar{\alpha}}\right| < \left|m_{z_1}^{*\bar{\alpha}}\right|\left|C_y^{*\alpha}\right| \approx (1 \div 2),\ \mu \approx (50 - 100)$, то $\delta\hat{m}_{z_1}^{\bar{\alpha}}$ становитиме одиниці відсотків від $m_{z_1}^{*\bar{\alpha}}$. Оцінка $m_{z_1}^{*\bar{\alpha}}$ може бути визначена з передатної функції (7.37) каналу поздовжнього руху.

$$\hat{m}_{z_1}^{*\bar{\alpha}} = \frac{J_{z_1}}{m b_A^2}\left[C_y^{\alpha} + (C_{11} + C_{22})\frac{2m}{\rho v S}\right]. \qquad (7.46)$$

Підставивши у (7.46) значення (7.27а), отримаємо:

$$\hat{m}_{z_1}^{*\bar{\bar{\alpha}}} = m_{z_1}^{*\bar{\alpha}} - m_{z_1}^{\bar{\bar{\alpha}}} \frac{C_y^{\bar{\omega}} + C_y^{\bar{\bar{\alpha}}}}{\mu + C_y^{\bar{\bar{\alpha}}}},$$

при $m_{z_1}^{\bar{\bar{\alpha}}} < 0,\ C_y^{\omega} > 0,\ C_y^{\bar{\bar{\alpha}}} > 0$ оцінка (7.46) занижена за абсолютною величиною на величину

$$\delta\hat{m}_{z_1}^{*\bar{\bar{\alpha}}} = -m_{z_1}^{\bar{\bar{\alpha}}} \frac{C_y^{\bar{\omega}} + C_y^{\bar{\bar{\alpha}}}}{\mu + C_y^{\bar{\bar{\alpha}}}} \cong -\frac{m_{z_1}^{\bar{\bar{\alpha}}}}{\mu} C_y^{*\bar{\bar{\alpha}}}.$$

Для оцінки методичної похибки $\delta\hat{m}_{z_1}^{*\bar{\alpha}}$ достатньо підставити у (7.47) значення $(C_{11} + C_{22})$ із (7.35):

$$\delta\hat{m}_{z_1}^{*\bar{\alpha}} = m_{z_1}^{\bar{\alpha}} - \frac{J_{z_1}}{m в_A}\left\{C_y^{\alpha} + \left[\frac{-C_y^{\alpha}}{\tau + C_y^{\dot{\alpha}}} + \frac{q S b_A}{J_{z_1}}\left(m_{z_1}^{\omega_{z_1}} + m_{z_1}^{\dot{\alpha}} \frac{\tau - C_y^{\omega_{z_1}}}{\tau + C_y^{\dot{\alpha}}}\right)\right]\right\} = \tag{7.47}$$

$$= \frac{1}{\mu + C_y^{\bar{\bar{\alpha}}}}\left[m_{z_1}^{\bar{\bar{\alpha}}}\left(C_y^{\bar{\alpha}} + C_y^{\bar{\omega}}\right) + \frac{J_{z_1}}{m + b_A^2} C_y^{\alpha} C_y^{\bar{\alpha}}\right].$$

Похибка з урахуванням реальних значень становитиме одиниці відсотків від оцінки $m_{z_1}^{*\bar{\alpha}}$. Величина $(C_{11} + C_{22})$ в (7.37) характеризує запас коливальної стійкості за перевантаженням: що менше $(C_{11} + C_{22})$, то слабше демпфірування вільних коливань.

7.2.7. Похідна коефіцієнта піднімальної сили за кутом атаки

Оцінка $\hat{C}_y^{\alpha}$ похідної C_y^{α} може бути обчислена шляхом множення одного з коефіцієнтів e_1, f_1 або p_1 рівнянь (7.22)–(7.24) на $\frac{G}{qS}$:

$$\hat{C}_y^{\alpha} = \frac{G}{qS} e_1 = \frac{G}{qS} p_1. \tag{7.48}$$

Підставивши у рівняння (7.48) значення e_1 або p_2 (7.29), (7.34), отримаємо

$$\hat{C}_y^{\alpha} = C_y^{\alpha} - C_y^{\alpha} \frac{C_y^{\bar{\dot{\alpha}}}}{\mu + C_y^{\bar{\dot{\alpha}}}},$$

при $C_y^{\alpha} > 0,\ C_y^{\bar{\dot{\alpha}}} > 0$ оцінка (7.48) занижена на величину

$$C_y^{\alpha} \frac{C_y^{\bar{\dot{\alpha}}}}{\mu + C_y^{\bar{\dot{\alpha}}}}. \qquad (7.49)$$

7.2.8. Похідна коефіцієнта піднімальної сили за рулем висоти

Оцінка $\hat{C}_y^{\delta}$ похідної C_y^{δ} може бути обчислена як добуток одного з коефіцієнтів $e_3,\ f_3$ або p_3 рівнянь (7.22)–(7.24) на $\frac{G}{qS}$:

$$\hat{C}_y^{\delta} = \frac{G}{qS} e_3.$$

Згідно з рівняння (7.30), оцінка (7.49)

$$\hat{C}_y^{\delta} = C_y^{\delta} - C_y^{\delta} \frac{C_y^{\bar{\dot{\alpha}}}}{\mu + C_y^{\bar{\dot{\alpha}}}}$$

занижена за абсолютною величиною на величину $C_y^{\delta} \frac{C_y^{\bar{\dot{\alpha}}}}{\mu + C_y^{\bar{\dot{\alpha}}}}$, а оцінка

$$\hat{C}_y^{\delta} = \frac{G}{qS} f_3 = \frac{G}{qS} p_3$$

згідно з (7.33)

$$\hat{C}_y^{\delta} = C_y^{\delta} + C_y^{\delta} \frac{C_y^{\bar{\omega}}}{\mu + C_y^{\bar{\omega}}}$$

завищена на $C_y^{\delta} \frac{C_y^{\bar{\omega}}}{\mu + C_y^{\bar{\omega}}}$.

Оцінка $\hat{C}_y^{\delta}$ похідної C_y^{δ} може бути наближено обчислена через коефіцієнти a_1, a_2, a_3, b_3 як співвідношення

$$\hat{C}_y^{\delta} \cong \frac{G}{qS}\frac{b_3 - a_3}{a_1 + \dfrac{g}{v}a_2},$$

еквівалентне відношенню $\left(J_{z_1}/qSb_A\right)\left(b_3 - a_3\right)$ до значення $\hat{\sigma}_n$, близького до $m_{z_1}^{C_y}$, знайденому за формулою (7.42), що дорівнює приблизно:

$$\hat{C}_y^{\delta} \approx C_y^{\delta}\frac{m_{z_1}^{\bar{\bar{\alpha}}}}{\mu + C_y^{\bar{\bar{\alpha}}}}.$$

7.2.9. Коефіцієнт сили поздовжнього сумарного демпфірування

Оцінка $\hat{C}_y^{*\bar{\bar{\alpha}}}$ коефіцієнта

$$C_y^{*\bar{\bar{\alpha}}} = C_y^{\bar{\bar{\alpha}}} + C_y^{\bar{\omega}}$$

може бути обчислена як добуток одного з коефіцієнтів e_2, f_2 або P_2 рівнянь (7.22)–(7.24) на τ:

$$C_y^{*\bar{\bar{\alpha}}} = \frac{G}{qS}\frac{v}{b_A}e_2; \qquad (7.50)$$

згідно з рівнянням (7.28) оцінка (7.50) занижена:

$$\hat{C}_y^{\bar{\bar{\alpha}}} = -\hat{C}_y^{*\bar{\bar{\alpha}}}\frac{C_y^{\bar{\bar{\alpha}}}}{\mu + C_y^{\bar{\bar{\alpha}}}},$$

а оцінка

$$\hat{C}_y^{\bar{\bar{\alpha}}} = \frac{G}{qS}\frac{v}{b_A}f_2 = \frac{G}{qS}\frac{v}{b_A}P_2,$$

згідно з рівнянням (7.28), завищена —

$$\hat{C}_y^{\bar{\bar{\alpha}}} = C_y^{*\bar{\bar{\alpha}}} + C_y^{*\bar{\bar{\alpha}}}\frac{C_y^{\bar{\omega}}}{\mu + C_y^{\bar{\omega}}}.$$

Відносні похибки становлять одиниці відсотків.

Оцінка $\hat{C}_y^{\bar{\alpha}}$ може бути наближено обчислена через коефіцієнти $a_1,\ a_2,\ b_2$ як відношення

$$\hat{C}_y^{\bar{\alpha}} \cong \frac{G}{qS}\frac{v}{b_A}\frac{b_2 - a_2}{a_1 + \dfrac{g}{v}a_2},$$

еквівалентне відношенню $\dfrac{J_{z_1}}{qSb_A}\left(b_2 - a_2\right)$ і значенню σ_n, знайденому за формулою (7.42), що дорівнює:

$$\hat{C}_y^{*\bar{\alpha}} \cong C_y^{*\bar{\alpha}} - C_y^{*\bar{\alpha}}\frac{m_{z_1}^{\bar{\alpha}}}{\mu + C_y^{\bar{\alpha}}}.$$

7.3. Критерії поздовжньої динамічної стійкості і керованості

7.3.1. Показник ω_0^2 / n_y^α відношення квадрата кутової частоти ω_0 недемпфірованих вільних коливань до коефіцієнта n_y^α

Оцінка ω_0^2 / n_y^α показника

$$\frac{\omega_0^2}{n_y^\alpha} = -\frac{\dfrac{\mu}{\bar{\tau}^2}\dfrac{\sigma_n C_y^\alpha}{\bar{\upsilon}_z^{-2}}}{\dfrac{qS}{G}C_y^\alpha} = -\frac{Gb_A}{J_{z_1}}\sigma_n \qquad (7.51)$$

де $\bar{\upsilon}_z^{-2} = \dfrac{J_{z_1}}{mb_A^2}$, відповідно до виразу (7.42), визначається через коефіцієнти (7.18) таким виразом

$$\frac{\omega_0^2}{m_y^\alpha} = -\left(a_1 + \frac{g}{v}a_2\right), \qquad (7.52)$$

де, згідно з рівнянням (7.44), оцінка (7.52) буде незначно завищена.

Методично точний вираз ω_0^2/n_y^α визначається з рівняння (7.41) згідно з виразом (7.51).

7.3.2. Період T вільних коливань

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}\right) - \frac{1}{4}\left(C_{11} + C_{22}\right)^2}} \qquad (7.52)$$

визначається через коефіцієнти знаменника (7.37) передатної функції за ω_z, n_y, або α. Оцінка $\hat{T}$ періоду T за величиною σ_n (7.42) може бути визначена за формулою

$$T = \frac{2\pi}{\frac{qSb_A}{J_{z_1}}\hat{C}_y^\alpha \hat{\sigma}_n},$$

де $\hat{C}_y^\alpha$ обчислено згідно з виразом (7.48) або (7.49).

7.3.3. Величина відносного закидання перевантаження $\Delta\bar{n}_y$

Для визначення відносного закидання

$$\Delta\bar{n}_y = \frac{\Delta n_{y\ \max} - \Delta n_{y\ \text{уст}}}{\Delta n_y},$$

де $\Delta n_{y\ \max}$ максимальне, а $\Delta n_{y\ \text{уст}}$ — стале значення відхилення Δn_y, викликаного ступінчастим відхиленням $\Delta X_\text{в}$.

Необхідно обчислити колову частоту і декремент згасання коливань h. Оцінка $\hat{\omega}_0$ із рівняння (7.52) дорівнює $2\pi/T$, величина h, згідно з рівнянням (7.37), дорівнює:

$$h = -\frac{1}{2}\left(C_{11} + C_{22}\right),$$

або, згідно з рівнянням (7.47) оцінка $\hat{h}$ дорівнює:

$\hat{h} = \frac{1}{2\pi}\left(\hat{C}_y^{\alpha} - \frac{\hat{m}_{z_1}^{\bar{\dot{\alpha}}}}{\bar{\upsilon}_z^2}\right)$, де $\bar{\upsilon}_{z_1}^2 = \frac{J_{z_1}}{m b_A}$ в C_y^{α} і $\hat{m}_{z_1}^{\bar{\dot{\alpha}}}$, визначаються згідно з рівняннями (7.49) та (7.46) відповідно.

Тоді оцінка $\Delta\bar{n}_y$ відносного закидання для випадку перехідних процесів із перерегулюванням дорівнює:

$$\Delta\hat{n}_y = e^{-\pi}\frac{\hat{h}}{\sqrt{\hat{\omega}_0^2 - \hat{h}^2}}$$

або

$$\Delta\hat{n}_y = e^{-\pi}\frac{\hat{h}}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

де ξ — коефіцієнт відносного демпфірування коливань, $\xi = \frac{\hat{h}}{\hat{\omega}_0}$.

Час t_c першого виходу літака на сталу перевантаження
(для коливальних перехідних процесів):

$$t_c = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)}{\hat{\omega}_0\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Час $t_{зг}$ входу Δn_y у зону 5-відсоткового відхилення Δn_y

$$t_{зг} \cong \frac{3}{\hat{h}},$$

де оцінки $\hat{\omega}_0$, $\hat{\xi}$ і $\hat{h}$ визначені вище.

Показник інтенсивності згасання амплітуди за період

$$m_{зг} = e^{-\pi}\frac{2\pi}{\sqrt{\hat{\omega}_0^2 - \hat{h}^2}}.$$

7.4. Незміщене оцінювання лінійної складової нелінійної моделі динаміки об'єкта

Поздовжній збурений рух ЛА описується простою моделлю (7.3), (7.5). Мала розмірність базису частково знімає проблему мультиколеніарності змінних, що призводить до некоректного розв'язання задачі оцінювання коефіцієнтів рівнянь руху і обчислення за ними аеродинамічних коефіцієнтів (АДК) і характеристик. За такої ситуації основною похибкою оцінок є їх зміщення внаслідок наближеності стаціонарної лінійної моделі (7.3), (7.5), не враховуючи такі чинники:

1. Літак або інший ЛА, як правило, несиметричний відносно площини XOZ. Внаслідок цього, а також впливу обдування від двигунів, динаміка кабрування і пікірування, навіть за малих $\Delta\alpha$, буде різною. Отже, різними будуть і коефіцієнти рівнянь (7.3), (7.5).

2. За дуже малих відхилень $\Delta\delta_B$, $\Delta\alpha$, $\Delta\bar{\omega}_z$ лінійна модель точна, але вона погано ідентифікується через збільшення співвідношення шум–сигнал і вплив уже відчутних інших, у неврахованих у моделі, факторів: зміна швидкості, тяги двигунів, аеропружності, турбулентності атмосфери та ін. Основні фактори $\Delta\alpha$, $\Delta\bar{\omega}_z$, $\Delta\delta_B$ повинні бути істотними. Ці відхилення мають обмеження знизу — за суттєвістю, зверху — за нелінійністю.

3. Аналогічно обмеженням за амплітудою $\Delta\delta_B$ і, як наслідок, $\Delta\alpha$, $\Delta\bar{\omega}_z$, вводяться обмеження знизу і зверху на швидкість $\Delta\dot{\delta}_в$ зміни положення керма висоти $\Delta\delta_B$. При модельній зміні динаміка відсутня і тривимірний базис $\Delta\alpha$, $\Delta\bar{\omega}_z$, $\Delta\delta_B$ вироджується в одно- або двовимірний. Система вироджена. Зворотна задача некоректна за Тихоновим. За дуже різкої зміни $\Delta\delta_B$, наприклад різкому переході з кабрування в пікірування або навпаки, виникає додаткове «антидемпфірування» внаслідок розгину раніше злегка прогнутої осі X_1X_1 хвоста літака. Для таких режимів від'ємний коефіцієнт сумарного демпфірування при $\Delta\bar{\omega}_z$ в рівнянні (7.3) при його оцінюванні за реальними даними буде занижений за абсолютною величиною або навіть додатний. Це пояснюється неадекватністю моделі (7.3) процесу.

Прямий облік ефекту аеропружності фюзеляжу літака у вигляді двомасової моделі m_1 і m_2 із пружним зв'язком вимагає додаткових датчиків для реєстрації прогину хвоста літака щодо будівельної осі X_1X_1.

Непрямий облік цього і всіх інших невиміряних або тих, що не увійшли до моделі (7.3), (7.5) чинників, запропонована нижче у вигляді постановки завдання планування і обробки даних, експерименту альтернативного до застосовуваного для оцінювання аеродинамічних коефіцієнтів у бічному русі ЛА. Уточнимо основні складові даного підходу.

З фізично реалізованого натурального експерименту знайти оцінки АДК з максимально можливою точністю при обмеженнях на інтервали зміни часу експерименту і амплітуди відхилень змінних.

Тут слід уточнити поняття АДК: аеродинамічний коефіцієнт — це похідна від моменту тангажа m_{z_1} чи піднімальної сили C_y за відповідною змінною $\alpha, \omega_{z_1}, \delta_B, \alpha, M, t$ і т. д), узята у фіксованій точці простору — часу.

Таке визначення АДК буде тотожним коефіцієнтам моделей (7.3), (7.5) лише за умови, коли відхилення $\Delta\alpha, \Delta\bar{\omega}_{z_1}, \Delta\delta_B, \Delta t$ та ін. прагнуть до нуля. Але тоді співвідношення «шум–сигнал» необмежено зростають і оцінити АДК буде неможливо.

Необхідно спланувати експеримент так, щоб вирішити зазначене протиріччя.

Розумним компромісом між лінійною моделлю ПД (7.3), (7.5), справедливою для малих відхилень, і повною нелінійною нестаціонарною моделлю (7.3), справедливою для всіх режимів польоту, буде модель ПД, представлена першим і другим членами розкладання нелінійної моделі рядів Тейлора.

Передбачається також, що в межах одного експерименту висота (барометричний тиск), швидкість (швидкісний напір $0,5\rho v^2$), конфігурація літака, його центрування, маса змінюються несуттєво в розумінні впливу на зміну АДК.

Тоді, наприклад для m_{z_1}, отримаємо

$$m_{z_1}(t) = m_{z_1}(t_0) + \left.\frac{\partial m_{z_1}}{\partial \alpha}\right|_{t_0} \Delta\alpha(t) + \left.\frac{\partial m_{z_1}}{\partial \bar{\omega}_{z_1}}\right|_{t_0} \Delta\bar{\omega}_{z_1}(t) + \left.\frac{\partial m_{z_1}}{\partial \delta_B}\right|_{t_0} \times$$

$$\times \Delta\delta_B(t) + \frac{1}{2} \cdot \left.\frac{\partial^2 m_{z_1}}{\partial \alpha^2}\right|_{t_0} \left(\Delta\alpha(t)^2\right) \times$$

$$\times \left[+ \left.\frac{\partial^2 m_{z_1}}{\partial \bar{\omega}_{z_1}}\right|_{t_0} \left(\Delta\bar{\omega}_{z_1}(t)\right)^2 + \left.\frac{\partial^2 m_{z_1}}{\partial \delta_B}\right|_{t_0} \left(\Delta\delta_B(t)\right)^2 \right] + \qquad (7.53)$$

$$+ \left.\frac{\partial^2 m_{z_1}}{\partial \alpha \partial \bar{\omega}_{z_1}}\right|_{t_0} \cdot \Delta\alpha(t) \cdot \Delta\bar{\omega}_{z_1}(t) + \left.\frac{\partial^2 m_{z_1}}{\partial \alpha \partial \delta_B}\right|_{t_0} \Delta\alpha(t) \times$$

$$\times \Delta\delta_B(t) + \left.\frac{\partial^2 m_{z_1}}{\partial \bar{\omega}_{z_1} \partial \delta_B}\right|_{t_0} \Delta\bar{\omega}_{z_1} \Delta\delta_B(t).$$

Така модель враховує несиметричність режимів кабрування і пікірування для обмежених відхилень. Але велика кількість її членів (дев'ять), серед яких лише $\Delta\delta_B$ незалежна змінна, а інші, з урахуванням взаємозв'язку їх рівнянням (7.3) — її наслідки; взаємна корельованість, обмеженість і наближеність вимірювань збільшень, обмеженість часу одного режиму зміною швидкості і висоти (при постійній тязі двигунів), роблять завдання оцінювання всіх АДК некоректним внаслідок фізичної неможливості забезпечення ортогональності змінних і достатньою довжиною вибірок.

Відповідно до мети експерименту нас цікавлять перші три лінійні члени розкладання (7.53).

Для точного їх оцінювання сплануємо натурний експеримент за наступною схемою, альтернативною ортогональній. Нехай усі змінні рівняння (7.53) будуть близькі за формою: $\Delta\delta_B(t)$ — «сходинка»; $\Delta\alpha(t)$, $\Delta\omega(t)$, — відповідно до рівнянь динаміки короткоперіодичних ПД, експоненціальні функції — реакції ЛА на вплив $\delta_B(t)$.

Перепишемо (7.53) так:

$$\Delta m_{z_1}(t) =$$
$$= \left[m_{z_1}^{\alpha} + \left(m_{z_1}^{\alpha^2} \Delta\alpha(t) + m_{z_1}^{\alpha\bar{\omega}_z} \Delta\bar{\omega}_{z_1}(t) + m_{z_1}^{\alpha\delta_B} \Delta\delta_B(t) \right) \right] \Delta\alpha(t) +$$
$$+ \left[m_{z_1}^{\bar{\omega}_{z_1}} + \left(m_{z_1}^{\bar{\omega}_{z_1}\alpha} \Delta\alpha(t) + m_{z}^{\bar{\omega}_{z_1}^2} \Delta\bar{\omega}_{z_1}(t) + m_{z_1}^{\bar{\omega}_{z_1}\delta_B} \Delta\delta_B(t) \right) \right] \Delta\bar{\omega}_{z_1}(t) + \quad (7.54)$$
$$+ \left[m_{z_1}^{\delta_B} + \left(m_{z_1}^{\delta_B\alpha} \Delta\alpha(t) + m_{z}^{\delta_B\bar{\omega}_{z_1}} \Delta\bar{\omega}_{z_1}(t) + m_{z_1}^{\delta_B^2} \Delta\delta_B(t) \right) \right] \Delta\delta_B(t),$$

де кожен коефіцієнт складається з шуканого АДК і лінійної функції $\Delta\alpha,\ \Delta\omega_z,\ \Delta\delta_B$.

Якщо з певним досить грубим ступенем наближення у виразах для коефіцієнтів рівняння (7.54) $\Delta\alpha(t), \Delta\omega_{z_1}(t), \Delta\delta_B(t)$ замінити відповідними ступінчастими функціями $\Delta\alpha(\infty)1(t),\ \Delta\omega_{z_1}(\infty)\cdot 1(t),$ $\Delta\delta_B(\infty)\cdot 1(t)$, де аргумент (∞) відповідає часу появи сталого значення $\Delta\alpha(t), \Delta\omega_{z_1}(t), \Delta\delta_B(t)$, то з точністю до цього наближення рівняння (7.10) можна подати у такому вигляді:

$$\Delta m_{z_1}(t) \cong a_2 \Delta\alpha(t) + a_1 \Delta\omega_z(t) + \hat{a}_1 \Delta\delta_B(t), \qquad (7.55)$$

де

$$a_1 = m_{z_1}^{\bar{\omega}_z} + \left[m_{z_1}^{\alpha\bar{\omega}_z} \Delta\alpha(\infty) + m_{z_1}^{\bar{\omega}_z^2} \Delta\bar{\omega}_{z_1}(\infty) + m_{z_1}^{\alpha\delta_B} \Delta\delta_B(\infty) \right];$$

$$a_2 = m_{z}^{\alpha} + \left[m_{z}^{\alpha^2} \Delta\alpha(\infty) + m_{z_1}^{\alpha\bar{\omega}_z} \Delta\bar{\omega}_{z_1}(\infty) + m_{z_1}^{\alpha\delta_B} \Delta\delta_B(\infty) \right];$$

$$b_1 = m_{z}^{\delta_B} + \left[m_{z}^{\delta_B\alpha} \Delta\alpha(\infty) + m_{z}^{\delta_B\bar{\omega}_z} \Delta\bar{\omega}_{z_1}(\infty) + m_{z}^{\delta_B^2} \Delta\delta_B(\infty) \right].$$

Що ближча форма сигналів до «сходинки», то точніше рівняння (7.11), але й то гірша обумовленість інформаційної матриці. Через взаємозв'язок змінних $\Delta\alpha, \Delta\omega_{z_1}, \Delta\delta_B$ керувати «ступінчастістю» неможливо. Але змінюючи амплітуду $\Delta\delta_B(\infty)$, ми можемо пропорційно змінювати зсув коефіцієнтів a_1, a_2, b_1 відносно шуканих АДК: $m_{z_1}^{\bar{\omega}_z}$, $m_{z_1}^{\alpha}$, $m_{z}^{\delta_B}$.

Тоді, альтернативна ортогональній, постановка експерименту полягатиме в послідовності сходинок рулем висоти різної амплітуди, визначенні зміщених коефіцієнтів a_1, a_2, b_1 керування (7.55) і ліквідації цього зміщення шляхом лінійної апроксимації коефіцієнтів a_1, a_2, b_1 у функції $\Delta\delta_B(\infty)$, $\Delta\alpha(\infty)$ або $\Delta\omega_z(\infty)$.

Наприклад:

$$a_{1i} = m_{z_1}^{\bar{\omega}_z} + k_1\Delta\alpha_i(\infty);$$
$$a_{2i} = m_{z_1}^{\alpha} + k_2\Delta\alpha_i(\infty);$$
$$b_{1i} = m_z^{\delta_B} + k_3\Delta\alpha_i(\infty),$$

де i — номер сходинки різної амплітуди.

У загальному випадку [3] i-й рядок векторно-матричного керування рухом тіла, що враховує лінійні та квадратні члени Тейлорівського розкладання має вигляд:

$$\Delta y_i = \Delta X A_i + \Delta X B_i \Delta X^{\mathrm{T}},$$

де

$$\Delta y_i^{\mathrm{T}} = \left[\Delta y_i(1), \Delta y_i(2), ..., \Delta y_i(N)\right];$$
$$A_i^{\mathrm{T}} = \left[a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}\right];$$

$$\Delta X = \begin{bmatrix} \Delta x_1(1)\ \Delta x_2(1)...\Delta x_n(1) \\ \Delta x_1(2)\ \Delta x_2(2)...\Delta x_n(2) \\ \Delta x_1(N)\ \Delta x_2(n)...\Delta x_n(N) \end{bmatrix};$$

$$B_i = \begin{bmatrix} b_{i11}\ b_{i12}...b_{i1n} \\ b_{i21}\ b_{i22}...b_{i2n} \\ b_{in1}\ b_{in2}\ ...v\hat{a}_{inn} \end{bmatrix},$$

де N і n — число дискретів за часом і розмірністю вектора A_i відповідно.

Зміщена через неврахування квадратичної форми $\Delta X B_i \Delta X^{\mathrm{T}}$ МНК-оцінка $\hat{A}_i$ вектора-стовпчика A_i:

$$\hat{A}_i = \left(\Delta X^{\mathrm{T}} \Delta X\right)^{-1} \Delta X^{\mathrm{T}} \Delta y_i . \qquad (7.56)$$

Її зсув пропорційний ΔX^T:

$$\hat{A}_i - A_i = \left(\Delta X^{\mathrm{T}} \Delta X\right)^{-1} \Delta X^{\mathrm{T}} \Delta X B_i \Delta X^{\mathrm{T}} = B_i \Delta X^{\mathrm{T}} .$$

У ще більш загальному випадку модель (7.56) повинна бути поширена членами третього і вище порядку, і залежність зміщення оцінок від ΔX матиме нелінійний характер. Тому для ефективної реалізації альтернативного підходу, як уже йшлося, слід обмежити знизу і зверху діапазони зміни ΔX.

Для підтвердження доцільності альтернативного підходу розглянемо числовий приклад.

Приклад 7.1. Точна нелінійна модель

$$y(k) = \sum_{j=1}^{3} x_j(k) + \sum_{j,q=1,\, j \geq q}^{3} x_j(k) x_q(k) \qquad (7.57)$$

з одиничними коефіцієнтами β_i для чотирьох вибірок різної амплітуди $X_{\max}$ апроксимувалася її лінійною частиною для таких сигналів

$$x_1(k) = x_{\max}(l) \sin\left(\pi \frac{k-1}{M-1}\right), \quad x_2(k) = x_{\max}(l) \sin\left(2\pi \frac{k-1}{M-1}\right),$$

$$x_3(k) = x_{\max}(l) \cos\left(2\pi \frac{k-1}{M-1}\right),$$

$k = \overline{1, M}$, $l = \overline{1, 4}$.

Оцінки $\hat{\beta}_j (j = 1, 2, 3)$ обчислювалися методом найменших квадратів (МНК). При цьому показник $\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon$ похибки ε апроксимації $y(k)$ лінійною моделлю $y(k) = \hat{\beta}_1 x_1(k) + \hat{\beta}_2 x_2(k) + \hat{\beta}_3 x_3(k)$ був на два порядки менший від аналогічної норми $\|\Delta y\|$. Тобто задача апроксимації розв'язується достатньо якісно. Але коефіцієнти $\hat{\beta}_i$ були істотно зміщені (рис. 7.1).

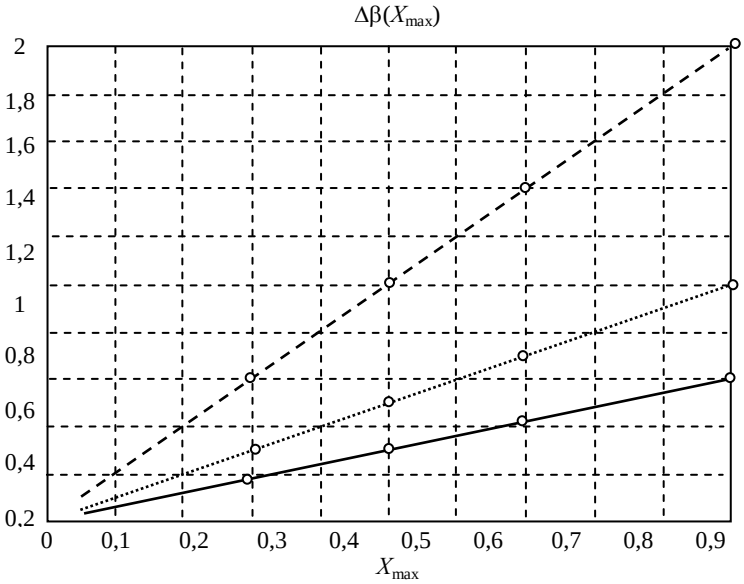


Рис. 7.1. Залежність $\beta(x_{\max})$:
- - - $\Delta\beta_1$; ····· $\Delta\beta_2$; —— $\Delta\beta_3$

Лінійні регресійні залежності зсувів $\Delta\beta_j$ (j = 1, 2, 3) від $x_{\max}(l)$, (l = 1, 2, 3, 4), збігаються для нульової амплітуди $x_{\max}$ до нуля; відповідно оцінки $\hat{\beta}_j$ збігаються до істинних β_j =1.

Якщо бралася повна модель (7.57), то з регуляризацією за Тихоновим МНК-оцінювання коефіцієнтів цієї моделі дало практично нульове значення показника $\varepsilon^T\varepsilon$.

Регуляризований показник:

$$I(\hat{\beta},\alpha)=\left\|\Delta Y(y)-\Delta\hat{Y}(\hat{\beta},t)\right\|+\alpha\left\|\hat{\beta}-\beta_{apr}\right\|, \qquad (7.58)$$

де α — параметр регуляризації; β_{apr} — апріорі заданий вектор параметрів.

Але практично нульове значення показника $\varepsilon^T\varepsilon$ досягається для різних значень β_{apr}, а оцінка $\hat{\beta}$ близька до β_{apr}, а не до дійсної, що дорівнює одиниці.

Для більшої наочності розглянемо двовимірну задачу, коли модель і об'єкт ізоморфні:

$$y(k) = \beta_1 x_1(k) + \beta_2 x_2(k),$$

Тут $x_1(k)$ і $x_2(k)$ сильно корельовані. Тому функціонал $\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon$ (пунктирні лінії на рис. 7.2) як функція $\hat{\beta}$, сильновипуклий для першого і третього квадранта площини (β_1, β_2) і слабовипуклий («рівчак») для другого і четвертого квадрантів.

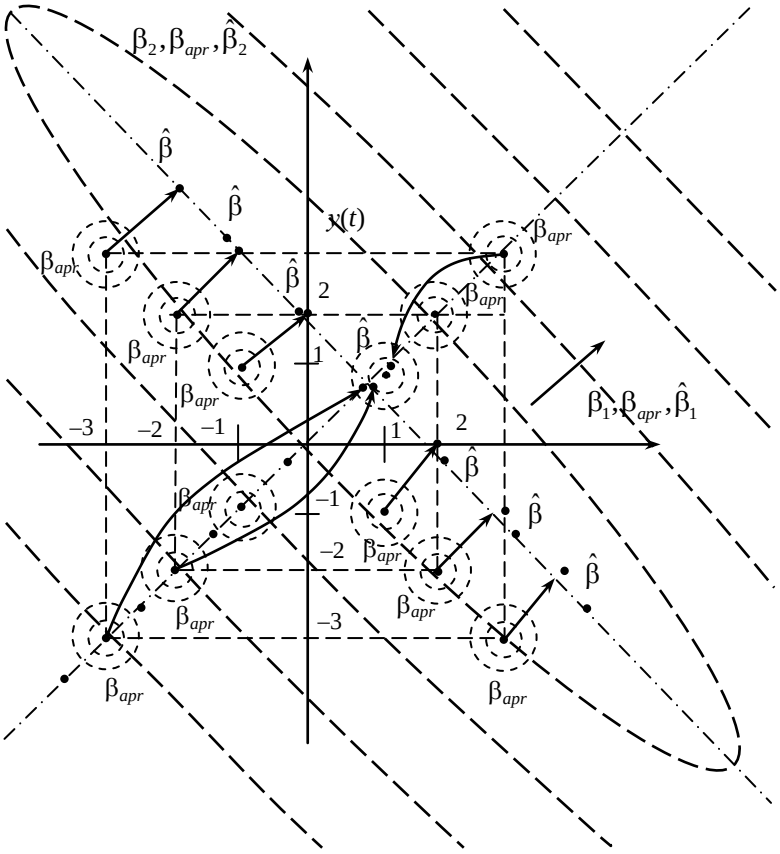


Рис. 7.2. Точне значення β і її оцінка $\hat{\beta}$, отримана за умови мінімуму функціонала (7.58) для різних апріорних значень β_{apr}

Регуляризуючий десятивідсотковий додаток $\alpha\left\|\hat{\beta}-\beta_{apr}\right\|$ функціонала (7.58) (кола на рис. 7.2) строговипуклий і, відпо-відно, робить випуклим функціонал (7.58). Стрілками показано процес мінімізації функціонала (7.58), в результаті якого з апріорної оцінки β_{apr} отримано апостеріорну оцінку $\hat{\beta}$ (табл. 7.1).

Таблиця 7.1

Апріорні і апостеріорні значення параметрів

β_{apr1}	$\hat{\beta}_1$	β_{apr2}	$\hat{\beta}_2$	$\dfrac{\left\|\Delta Y(t)-\Delta\hat{Y}(t)\right\|}{\left\|\Delta Y(t)\right\|}$
1	1	1	1	0
–1	0,904	–1	0,904	0,0091
–2	0,857	–2	0,857	0,0091
–3	0,809	–3	0,809	0,036
2	1,048	2	1,048	0,0023
3	1,095	3	1,095	0,0091
1	1,9	–1	0,0015	0,0045
2	2,85	–2	–0,95	0,011
3	3,8	–3	–1,9	0,0226
–1	0,0015	1	1,9	0,0045
–2	–0,95	2	2,85	0,011
–3	–1,9	3	3,8	0,0226

Як випливає з табл. 7.1 і рис. 7.2, оцінки $\hat{\beta}$ прямують в область близьку до дійсного значення, якщо β_{apr} лежить у першому і третьому квадранті (ближче або далі від β залежно від віддалення β_{apr} від β). Якщо ж β_{apr} лежить у другому і четвертому квадрантах, оцінки, в результаті мінімізації регуляризованого функціонала (7.58), не відходять далеко від апріорних, знаходячи точку компромісу між зростаючим додатком $\alpha\left\|\hat{\beta}-\beta_{apr}\right\|$ і спадним значенням норми $\left\|\Delta Y(t)-\Delta\hat{Y}(\beta,t)\right\|$. При цьому відношення $\varepsilon^T\varepsilon$ до $\left\|\Delta Y(t)\right\|$ не перевищує 2,26 відсотків. Тобто якість сигнальної ідентифікації досить висока, тоді як параметрична ідентифікація

взагалі некоректна: у другому квадранті $\hat{\beta}_2$ навіть йде від β_{apr2} у протилежний від $\hat{\beta}_2$ бік, аналогічно в четвертому квадранті $\hat{\beta}_1$. Загалом, для *n* змінних, функція $I(\beta)$ може мати кілька «рівчаків» мінімальної або навіть нульової крутизни, що ще більше ускладнює завдання.

Приклад 7.2. На рис. 7.3 наведено осцилограми семи режимів зміни руля висоти $\delta_в$, кута атаки $\alpha(t)$ і кутової швидкості $\omega_{Z_1}(t)$ літака М-17 в короткоперіодичному поздовжньому русі. Це забезпечує автономність до неврахованої безлічі змінних (боковий рух відсутній, швидкість, висота, конфігурація ЛА і інші змінні сталі).

Повна модель залежності $\dot{\omega}_{Z_1}(t)$ від $\delta_в(t)$, $\alpha(t)$ і $\omega_{Z_1}(t)$ подібна до моделі (7.58). У кожному із семи режимів визначалися зміщені внаслідок наближення моделі оцінки коефіцієнтів $\hat{\beta}_j$, $j=1,2,3$. За ними обчислювався конкретний фізичний параметр: нормована за середньою аеродинамічною хордою крила відстань між центром мас і аеродинамічним фокусом літака, тобто запас $\hat{\sigma}_n$ аперіодичної стійкості за вертикальним перевантаженням.

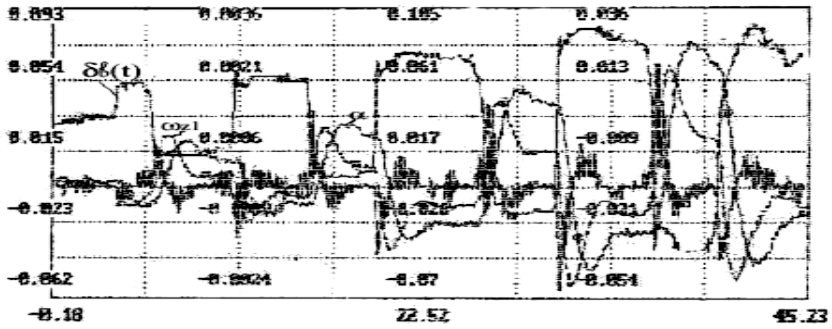


Рис. 7.3. Осцилограми режимів зміни руля висоти, кута атаки і кутової швидкості

Далі запас апроксимувався лінійною залежністю у функції $\|\Delta\alpha\|$ (рис. 7.4):

$$\hat{\sigma}(\|\Delta\alpha\|) = 0,22 - 0,075\|\Delta\alpha\|. \qquad (7.59)$$

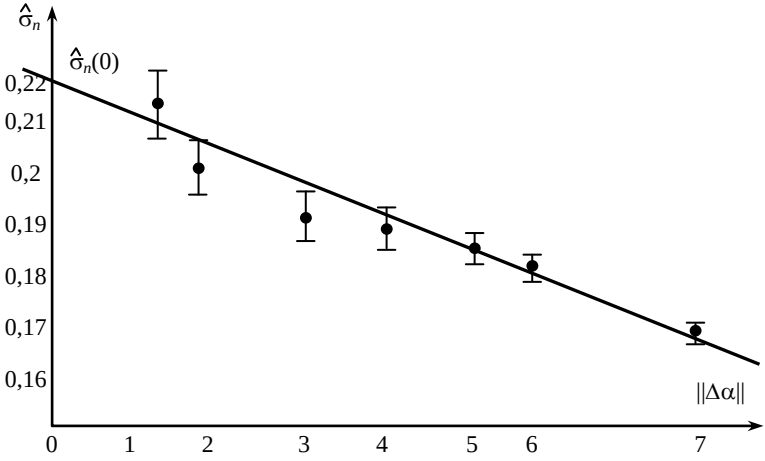


Рис. 7.4. Залежність оцінки $\hat{\sigma}_n$ від $\|\alpha\|$

Прогнозне в $\|\Delta\alpha\| = 0$ значення $\hat{\sigma}_n(0)$ лежить в області дійсних значень σ_n. Незміщену оцінку $\hat{\sigma}_n = 0,22$ отримано шляхом лінійної апроксимації залежності (7.59) і розрахунку її значення в точці нульових відхилень. Просте усереднення результатів дасть істотно зміщену (занижену) оцінку $\hat{\sigma}_n = 0,188$. Подальше уточнення $\hat{\sigma}_n$ може бути досягнуте шляхом апроксимації оцінок $\hat{\sigma}_n(0)$ гладкою регресійною залежністю від інших параметрів польоту (швидкості, висоти і т. д.).

Так, у табл. 7.2 наведено лінійні регресійні залежності АДК від початкового значення кута атаки α і його похідної, яка визначає темп виконання динамічних режимів в короткоперіодичному поздовжньому русі літака Ан-72.

У першому стовпчику табл. 7.2 подано відповідні АДК, у наступних стовпчиках a_0, a_1, a_2 — коефіцієнти регресії, далі середньоквадратична похибка (СКП) апроксимації відповідного АДК, далі середнє значення АДК і його середньоквадратичне відхилення.

Як бачимо, урахування тільки регресорів α і $\dot{\alpha}$ дало змогу в середньому вдвічі підвищити точність оцінок АДК.

Таблиця 7.2

Залежність оцінок АДК від α і $\dot{\alpha}$

АДК	a_0	a_1	a_2	СКП апр.	Середнє	СКП сер.
$m_z^{\bar{\omega}_z}$	–8,54	–0,2289	–0,0112	0,01	–10,61	**0,02**
m_z^{α}	–0,0092	0	0	0,007	–0,0091	**0,007**
$m_z^{\delta_a}$	–0,0161	–0,0012	0	0,003	–0,02	**0,009**
$m_z^{C_y}$	–0,0873	–0,0029	0	0,004	–0,0928	**0,006**
C_y^{α}	0,1068	–0,003	0	0,001	0,0979	**0,003**
$C_y^{\delta_a}$	–0,01	0,0012	0,0001	0,431	0,0028	**0,923**
σ_n	–0,2301	0,0071	0,0001	0,001	–0,2119	**0,002**

У табл. 7.3 наведені узагальнені для різних типів літаків дані, які підтверджують ефективність уточнення, зокрема запасу стійкості σ_n шляхом апроксимації лінійною регресивною залежністю від різних параметрів ΔX польоту. Для різних ЛА розмірність ΔX змінювалася від 2 до 6 і кількість режимів від 15 до 190.

Таблиця 7.3

Порівняння простого усереднювання з регресивною апроксимацією σ_n від параметрів польоту

Тип літака	СКП, %		Розмірність ΔX	Кількість режимів
	моделі	середнє		
Ан-72	5	102	6	190
Іл-86	7	31	2	25
Ту-154	4	13	4	70
Міг-29	7	50	4	50
М-17	0.5	1.5	2	15

Таким чином, для коректності постановки задачі ідентифікації слід розрізняти *сигнальний* і *параметричний* підходи. Спільність їх полягає в мінімізації $\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon$, відмінність — у моделях (абстрактна і «фізично» адекватна) і вимогах до функціонала $\varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon$ як функції оцінки $\hat{\beta}$ (відповідно нестрога й строга випуклість).

На жаль, у практиці льотних випробувань ЛА іноді користуються для оцінювання параметрів *сигнальною ідентифікацією*, закладаючи в модель апріорі необ'єктивні неточні (за розрахунком або результатами продувань в аеродинамічній трубі) коефіцієнти з подальшим «підлагодженням» їх до умов мінімуму функціонала (7.58). При цьому досягається удавана адекватність моделі об'єкта: похибка ε досить мала, оцінки $\hat{\beta}$ близькі до апріорних. Але останні можуть істотно відрізнятися від дійсних фізичних параметрів, що згодом може призвести до зниження безпеки польотів через неправильне оцінювання аеродинамічних коефіцієнтів ЛА, що визначають їх стійкість і керованість.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. На прикладі визначення аеродинамічних коефіцієнтів літака, поясніть метод оцінювання лінійної складової

$$\Delta y = \Delta x \cdot A$$

квадратичного рівняння Рікатті

$$\Delta y = \Delta x \cdot A + \Delta X \cdot B \cdot \Delta X^T.$$

2. Чому не можна з експерименту коректно визначити коефіцієнти рівняння Рікатті?

3. Поясніть Рис. 10.2. та некоректність оцінювання коефіцієнтів за умови не випуклості функціонала середньо-квадратичної похибки змінних об'єкта і моделі.

4. В чому різниця сигнального параметричного підходів?

7.5. Ідентифікація гладкої нелінійної статичної складової динамічної моделі

Для реально обмежених швидкостей $\dot{X}^*(t)$ і змінних $X^*(t)$ та гладких статичних нелінійностей $f(U)$ для i-ої складової $x_i^*(t)$ вектор-функції $X^*(t)$ з точністю до $\varepsilon^*(t)$ динаміка процесу $x_i(U(t))$ може бути зображена у вигляді моделі Гаммерштейна [1]:

$$a_n \frac{d^n x_i^*}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_i^*}{dt^{n-1}} + \cdots + x_i^*(t) = f[U^*(t)], \qquad (7.60)$$

де a_j, $j = \overline{1,n}$ і $f(U^*)$ невідомі.

Завдання полягає у визначенні статичної нелінійної залежності

$$x_i^*(t) = f(U^*)$$

при невідомих a_j з довільного динамічного режиму зміни $X^*(t)$ в обмеженій *G*-області [4].

Довільність режиму не гарантує лінійної незалежності змінних при a_j і, як наслідок, невиродженості інформаційної матриці $X^{\mathrm{T}} X$.

Ще більша некоректність виникає у традиційному підході при апроксимації $f(U)$ степеневим поліномом від *U*

$$\hat{f}(U) = \sum_{l=0}^{m} b_l U^l,$$

або системою інших квазіортогональних функцій $\varphi_l(U)$

$$\hat{f}(U) = \sum_{l=0}^{m} b_l \varphi_l(U),$$

коли з рівняння (7.60), зображеного у вигляді

$$\varepsilon(t) = x_i(t) - \sum_{l=0}^{m} b_l \varphi_l[U(t)] + \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{d^j x_i(t)}{dt^j} \qquad (7.61)$$

за неточних $x_i(t)$, $U(t)$ та їх похідних необхідно визначити $m+n$ невідомих, де числа *m* і *n* також невідомі.

Нехай, наприклад, в (7.60) лінійно незалежні лише перша і друга похідні від $x^*(t)$. Тоді для подолання цієї проблеми скористаємося апріорі відомою властивістю гладкості залежності $f(U)$. Будемо оцінювати коефіцієнти a_j рівняння (7.59) не з умови мінімуму середнього квадрата похибки (7.61), а з умови гладкості залежності $f(U)$:

$$(a_1, a_2) = \arg\min_{(a_1,a_2)} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{d^r x_{\text{ск}}(t_k)}{dU^r} \right)^2, \qquad (7.62)$$

де r характеризує ступінь гладкості $f(U)$. Тоді компенсоване по динаміці значення $x(t_k)$ дорівнюватиме:

$$x_{\text{ск}}(t_k) = x(t_k) - a_1 \frac{dx(t_k)}{dt} - a_1 \frac{d^2 x(t_k)}{dt^2}.$$

Практично в (7.62) замість похідних беруться кінцеві різниці відповідного порядку, які обчислюються за попередньо згладженим за допомогою сплайнів і впорядкованим за зростанням U масивом даних.

Приклад 7.3. Як $f(U)$ взята залежність (рис. 7.5)

$$f(U) = 4U - 60\sin(0,065U). \qquad (7.63)$$

Вхідний вплив $U(t)$ — послідовність сходинок:

$$U(t) = U_{\max}\left[-1 + \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{16} 1(t - k\Delta t) \right].$$

На $x^*(t)$ накладено 20-відсотковий білий шум. Результат спільного МНК-оцінювання коефіцієнтів b_i та a_1, a_2 моделі (7.61) для $n = 2,\ m = 1,2,3,4,5$ наведено на рис. 7.5.

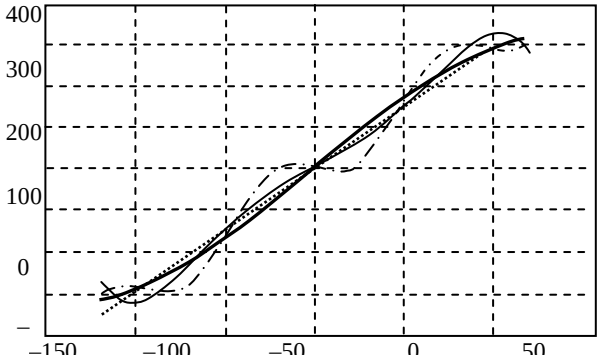


Рис. 7.5. МНК-апроксимація залежності (7.63):
$z(x)$; y_2; y_3; y_4

Очевидно, збільшення m не призвело до відновлення моделі (7.63). Результат непараметричного оцінювання нелінійності (7.63) із умови (7.62) гладкості $f(U)$ при r = 1, 2, 3 наведено на рис. 7.6.

Як випливає із зіставлення графіків на рис. 7.5, 7.6, непараметрична оцінка $\hat{f}(U)$ із корекцією динаміки із умови (7.62) істотно ближче до істинної $f(U)$, ніж параметрична МНК-оцінка при спільному оцінюванні коефіцієнтів лінійної та нелінійної частини моделі (7.60).

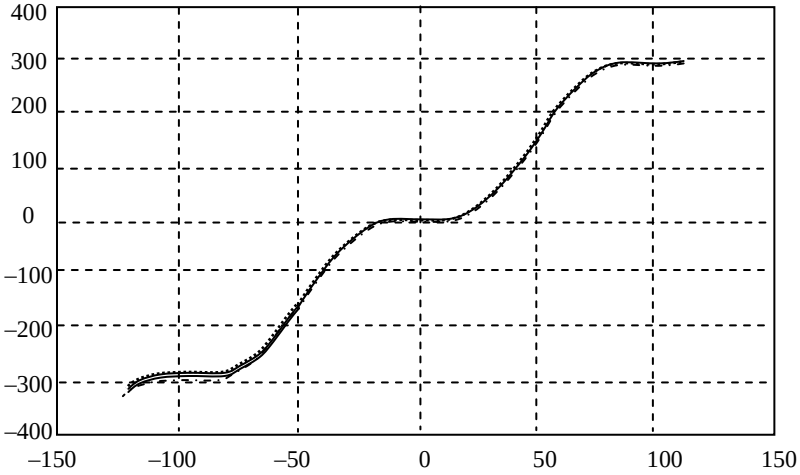


Рис. 7.6. Непараметрична апроксимація (7.63):
$z(x)$; y_2; y_3; y_4

Приклад 7.4. На рис. 7.7 наведено одну з балансувальних залежностей для літака М-17, отриману з динамічних режимів з умови (7.62) (лінія *1*), і апроксимовану прямою *2*, а також ламану *3*, впорядковану за N_y залежність, побудовану без компенсації динаміки.

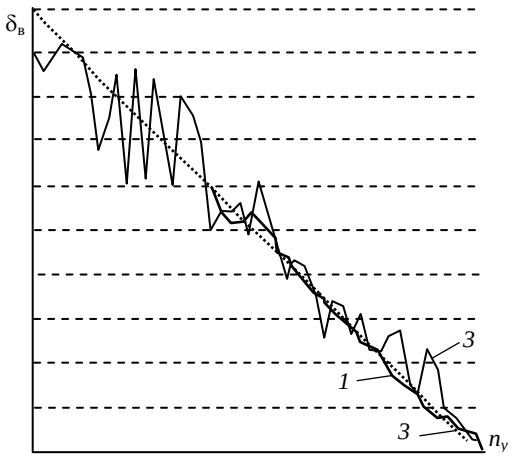


Рис. 7.7. Графік балансування залежностей $\delta_в(n_y)$

Таким чином, можна спочатку виявити й оцінити нелінійність, а потім, якщо режим досить динамічний, коректно оцінити лінійну динамічну частину моделі (7.23).

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. Як нелінійна динаміка об'єкта описується моделлю Гемерштейна?

2. Яким чином компенсується динаміка і яка вимога до статичної нелінійності $f(U(t))$ *в моделі (7.60)?*

3. Яким чином умова гладкості $f(0)$ *регуляризує задачу оцінювання параметрів динамічної складової ММ Гамерштейна?*

4. Проаналізуйте графіки на Рис. 7.5.÷7.7.

7.6. Структурно-параметрична ідентифікація багатовимірних нелінійних залежностей за експериментальними даними

Відсутність інформації про структуру нелінійної багатовимірної залежності $y(x_1,\ldots,x_n)$ не дає можливості застосувати методику оптимального планування експерименту. Як правило, знімаються часткові перерізу $y(x_i)$ при сталих x_j $(j=\overline{1,n-1},\ j\neq i)$. Скориста-

шись основоположною властивістю гладкості $y(x)$, подамо цю залежність кратним рядом Тейлора або його степеневим еквівалентом:

$$y(x)=\beta_0+\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}x_i x_j+\cdots\ . \qquad (7.64)$$

Для часткового k-го перерізу при $x_i=\text{const}$, $i=\overline{1,n-1}, i\neq k$ з (7.64) отримаємо одновимірну залежність

$$y(x_k)=\beta_{0k}+\beta_{1k}x_k+\beta_{2k}x_k^2+\cdots. \qquad (7.65)$$

Структура залежності (7.65) і параметри $\beta_{0k},\beta_{1k},\ldots$ знахо-дяться за МНК для (7.65) при різних, але фіксованих значень інших змінних. Далі коефіцієнти часткових моделей послідовно апроксимуються як функції цих змінних.

Приклад 7.5. Як приклад, розглянемо висотно-швидкісні характеристики турбогвинтового авіадвигуна AI-20M (залежність тяги y від висоти x_1, швидкості x_2 та керуючого впливу x_3).

Математичну модель (рис. 7.8, неперервні лінії) отримано з локальних моделей перерізів $y(x_k)$ при $x_1=c_i, x_2=c_j$:

$$y(x_3)=\beta_0''+\beta_1''x_3$$

шляхом МНК-апроксимації її коефіцієнтів квадратичною моделлю за x_1:

$$\beta_0''=\beta_{01}'x_2+\beta_{02}',\quad \beta_1''=\beta_{11}'x_2+\beta_{12}'. \qquad (7.66)$$

і подальшої апроксимації статистично значущих коефіцієнтів моделей (7.66) квадратичної моделі за x_1:

$$\beta_i'=\beta_{i0}+\beta_{i1}x_1+\beta_{i2}x_2,\ i=0,1.$$

У результаті, повна модель набуває вигляду

$$y=\left(\beta_0+\beta_{01}x_1+\beta_{02}x_1^2\right)+\left(\beta_1+\beta_{11}x_1+\beta_{12}x_1^2\right)x_2+\left(\beta_2+\beta_{21}x_1+\beta_{22}x_1^2\right)x_3+$$
$$+\left(\beta_3+\beta_{31}x_1+\beta_{32}x_1^2\right)x_2x_3+\left(\beta_4+\beta_{41}x_1+\beta_{42}x_1^2\right)x_2^2.$$

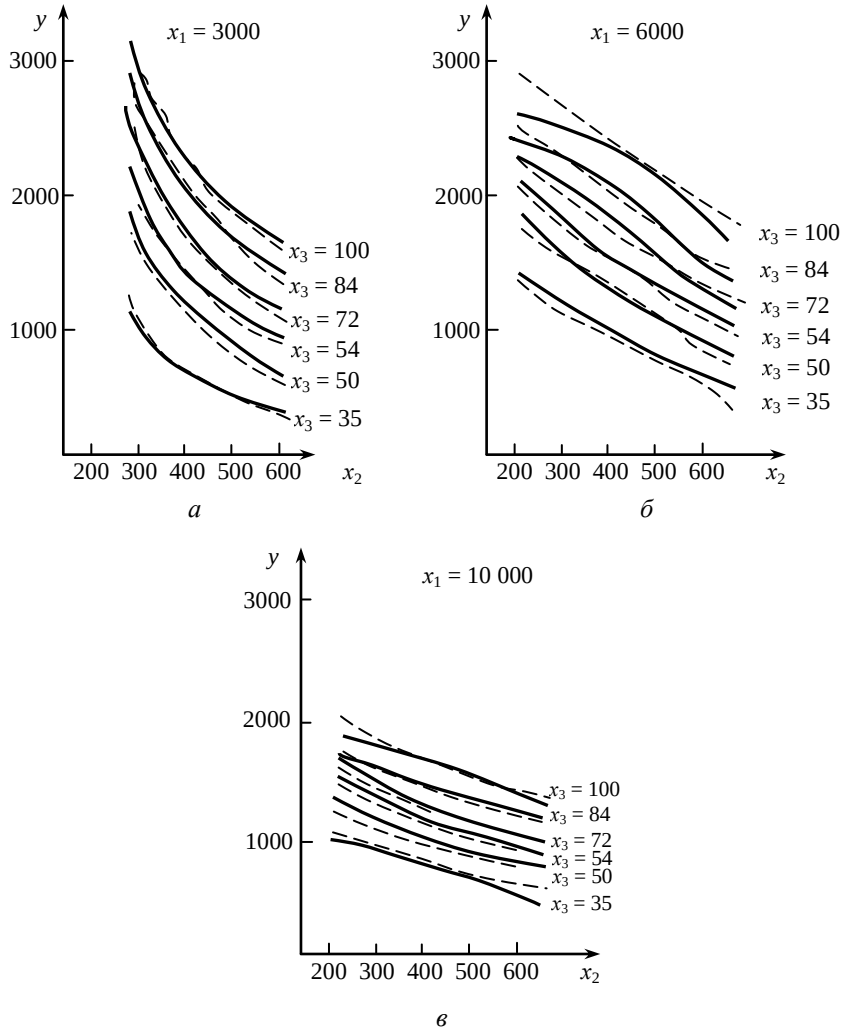


Рис. 7.8. Характеристики авіадвигуна АІ-20М:
неперервні лінії — модель; пунктирні — експериментні дані:
а — x_1 = 3000 м; *б* — x_1 = 6000 м; *в* — x_1 = 10 000 м

Практично збіглися (рис. 7.9) продувні в аеродинамічній трубі дані з моделлю для аеродинамічної поправки y у функції кута атаки x_1 і положення закрилків x_2 літака Ту-144.

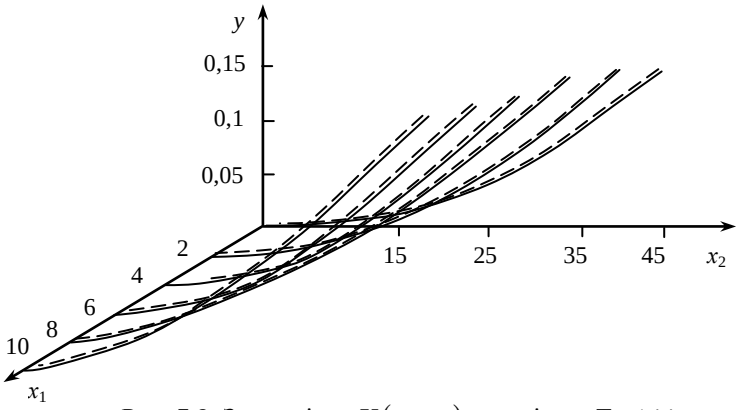


Рис. 7.9. Залежність $Y(x_1, x_2)$ для літака Ту-144

Тут із локальних моделей

$$y(x_2) = \beta'_{i1} x_2 + \beta'_{i2} x_2^2, \quad x_1 = \text{const}, \, i = \overline{1,6} \qquad (7.67)$$

лінійною за x_1 апроксимацією коефіцієнтів моделі (7.67)

$$\beta''_{i1}(x_1) = \beta_1 + \beta_2 x_1; \quad \beta''_{i2}(x_1) = \beta_3 + \beta_4 x_1$$

отримано повну модель

$$y = \beta_1 x_2 + \beta_2 x_1 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \beta_4 x_1 x_2^2.$$

Максимальна похибка апроксимації становила 2 відсотків від $y_{\max}$.

Залежність $\hat{J}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ (рис. 7.10) отримано аналогічно:

$$Y(\beta_1) = \alpha_{1ik}\beta_1 + \alpha_{2ik}\beta_1^2, \quad i = 1,2,3; \quad k = 1,2,3; \qquad (7.68)$$

$$\alpha_{jik}(\beta_2) = \alpha'_{jk}\beta_2 + \alpha''_{jk}\beta_2^2, \quad j = 1,2;$$

$$\alpha_{jk}^{(l)}(\beta_3) = \alpha'_j \beta_3 + \alpha''_j \beta_3^2. \qquad (7.69)$$

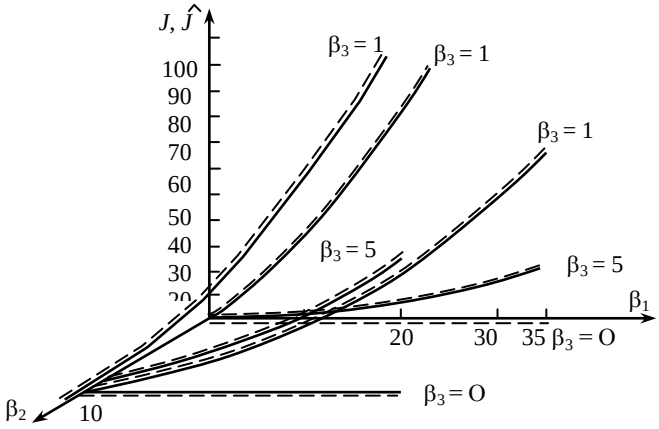


Рис. 7.10. Залежність $J(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ та її модель $\hat{J}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

Після підстановки коефіцієнтів (7.69) в (7.70), а (7.70) в (7.68) отримаємо:

$$\begin{gathered}\hat{J}(\beta)=-0,96\cdot10^{-6}\beta_1\beta_2\beta_3-0,61\cdot10^{-2}\beta_1\beta_2^2\beta_3^2+0,9\cdot10^{-2}\beta_2^2\beta_3^2+\\+0,23\beta_1^2\beta_2\beta_3^2+0,04\beta_1\beta_2\beta_3^2-1,72\beta_2\beta_3^2-0,24\cdot10^{-4}\beta_1^2\beta_2^2\beta_3+\\+0,46\cdot10^{-5}\beta_1\beta_2^2\beta_3-0,0232\beta_2^2\beta_3-0,0126\beta_1^2\beta_2\beta_3+0,133\beta_1\beta_2\beta_3+\\+1,02\beta_2\beta_3.\end{gathered}\tag{7.70}$$

Похибка апроксимації не перевищує 0,5 відсотків від максимального значення *J*. У разі, якщо допустима похибка становить 5 відсотків, вираз (7.70) суттєво спрощується:

$$\begin{gathered}\hat{J}(\beta)=-0,61\cdot10^{-2}\beta_1\beta_2^2\beta_3^2+0,9\cdot10^{-2}\beta_2^2\beta_3^2+0,23\beta_1^2\beta_2\beta_3^2+\\+0,04\beta_1\beta_2\beta_3^2-1,72\beta_2\beta_3^2-0,0232\beta_2^2\beta_3-0,0126\beta_1^2\beta_2\beta_3+\\+0,133\beta_1\beta_2\beta_3+1,02\beta_2\beta_3.\end{gathered}$$

Як бачимо з прикладів, даний алгоритм дає можливість досить просто визначити структуру і параметри складних багатовимірних нелінійних залежностей, поданих таблично за результатами натурних експериментів.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. Як, користуючись кратним рядом Тейлора і принципами декомпозиції і композиції були отримані структура і параметри багатомірних нелінійних залежностей (Рис. 7.8.÷7.10.)?

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Кринецкий Л. И.* Лётные испытания систем управления ракетами / Л. И. Кринецкий. — М. : Машиностроение, 1980. — 400 с.

2. *Сильвестров А. Н.* Две стратегии идентификации реальных объектов / А. Н. Сильвестров, В. М. Синеглазов, Л. Ю. Спинул // Електроника и системы управления. — 2008. — № 1(15). — С. 129–137.

3. *Сильвестров А. Н.* Идентификация статистических и динамических характеристик реальних объектов / А. Н. Сильвестров, В. М. Синеглазов // Електроника и системы управления. — 2006. — № 4. — С. 36–41.

4. *Патент 30530*, Україна МПК 05В 13/60. Спосіб визначення гладкої статистичної нелінійності з динаміки об'єкта контролю / А. М. Сільвестров, П. М. Лисиця, П. М. Галай. — NU 200713 від 25.02.2008.

5. *Островерхов М.Я.* Системи і методи ідентифікації електротехнічних об'єктів/ М.Я. Островерхов, А.М. Сільвестров, О.М. Скринник. – К.: НАУ, 2016. – 324 с.

Розділ 8

АДАПТИВНА АКТИВНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ БІЧНОГО РУХУ ОБ'ЄКТА

8.1. Структурна схема бортової системи адаптивного оптимального керування льотними випробуваннями на стійкість і керованість

Літальні апарати є складною динамічною системою, остаточне доведення якої можливе лише за результатами випробувань у польоті. Ефективне керування льотним експериментом можливе лише при високому ступені його автоматизації. У термінах загальної теорії систем [1] вважатимемо, що є об'єкт, вимірювальний пристрій і пристрій керування (рис. 8.1).

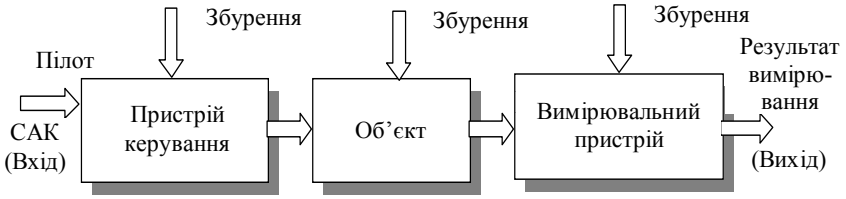


Рис. 8.1. Структурна схема системи

Недоліком відомих алгоритмів керування є слабке використання достовірної інформації про поточну динаміку системи. Застосування принципів адаптації та ідентифікації в системі керування має суттєво збільшити ефективність її функціонування.

Бортова система (рис. 8.2) складається з таких компонентів: вимірювально-інформаційна система; бортова обчислювальна система; апаратура з'єднання.

До складу інформаційно-вимірювальної системи входить контрольно-вимірювальна апаратура таких систем:

– система метеовимірів, яка забезпечує необхідною інформацією про стан зовнішнього середовища та режиму польоту (швидкість V, висота H, швидкісний натиск q тощо);

– інерційно-навігаційна система, що забезпечує інформацією про кутові швидкості ЛА, кути атаки і ковзання, перевантаження;

– система бортових вимірювань, що повідомляє про витрату палива, кути відхилення органів керування;

– система відображення для повідомлення пілоту відомостей про кондиційність одержуваного в ході експерименту матеріалу, про оптимальні умови проведення експерименту (інформацію про оптимальне керування ЛА).

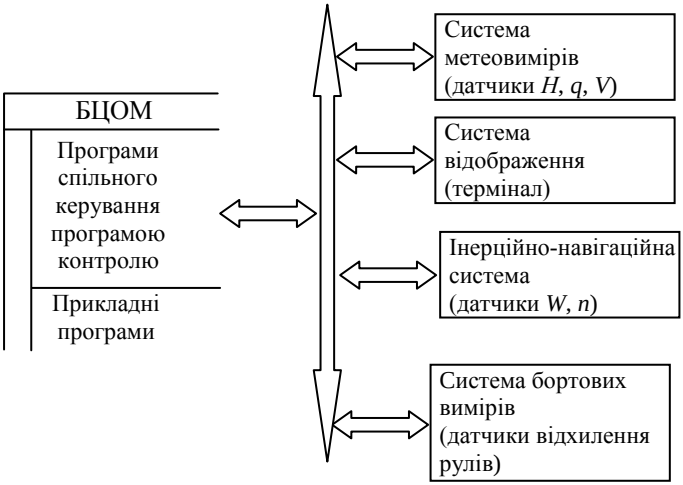


Рис. 8.2. Складові частини бортової системи

Бортова обчислювальна система забезпечує:

• аналіз кондиційності одержуваного в процесі льотного експерименту матеріалу;

• індикацію пілоту всієї необхідної для якісного проведення експерименту інформації;

• обробку експериментального матеріалу;

• зберігання результатів експерименту;

• облік накопиченої інформації про модель об’єкта при плануванні наступного експерименту.

Апаратура з’єднання забезпечує циркуляцію інформаційних потоків у системі. Система (рис. 8.3) функціонує так:

1. Задаються параметри апріорної моделі і вимоги до точності ідентифікації, необхідні для синтезу оптимальних тестових сигналів.

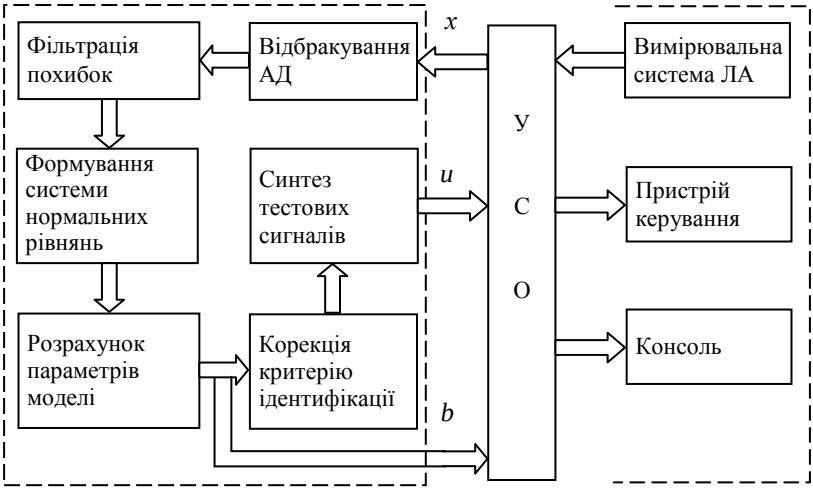


Рис. 8.3. Функціональна схема

2. Посилаючись на свідчення бортової системи вимірювань та системи метеовимірів, задаються дані для синтезу тестових сигналів та ідентифікації моделі щодо конкретного експерименту (швидкість V, висота H, швидкісний натиск q). Залежно від витрати палива уточнюються моменти інерції ЛА. Задаються значення кута атаки, на яких проводитиметься експеримент.

3. За критеріями, що визначають точність ідентифікації параметрів, синтезуються оптимальні тестові сигнали.

4. За допомогою системи відображення пілоту повідомляються необхідні для проведення експерименту дані.

5. Проводиться експеримент із первинною обробкою матеріалу у міру його надходження. Первинна обробка включає в себе відбраковування аномальних даних і фільтрацію перешкод вимірювань. З відфільтрованих даних рекурентно формується система нормальних рівнянь.

6. По закінченню експерименту обчислюються параметри моделі шляхом розв’язання системи нормальних рівнянь.

7. Приймається рішення про кондиційність експериментального матеріалу і про досягнення необхідної точності визначення параметрів. В іншому випадку перехід до п. 2.

8.2. Математичні моделі збуреного руху об'єкта та їх декомпозиція

Якщо розглядати ЛА як тверде тіло сталої маси з площиною симетрії *OXY*, то в зв'язаній системі координат рівняння його руху в просторі мають вигляд:

$$m\left(\dot{V}_Z + \omega_X V_Y - \omega_Y V_X\right) = z + mg\cos\vartheta\sin\gamma, \tag{8.1}$$

$$I_X\dot{\omega}_X - \left(I_Y - I_Z\right)\omega_Y\omega_Z + I_{XY}\left(\omega_X\omega_Z - \dot{\omega}_Y\right) = M_X, \tag{8.2}$$

$$I_Y\dot{\omega}_Y - \left(I_Z - I_X\right)\omega_Z\omega_X - I_{XY}\left(\omega_Y\omega_Z - \dot{\omega}_X\right) = M_Y, \tag{8.3}$$

$$m\left(\dot{V}_X + \omega_Y V_Z - \omega_Z V_Y\right) = P_X - x + mg\sin\vartheta, \tag{8.4}$$

$$m\left(\dot{V}_Y + \omega_Z V_X - \omega_X V_Z\right) = P_Y - y_{\text{аер}} - mg\cos\vartheta, \tag{8.5}$$

$$I_Z\dot{\omega}_Z - \left(I_X - I_Y\right)\omega_X\omega_Y - I_{XY}\left(\omega_X^2 - \omega_Y^2\right) = M_{Z\,\text{аер}} + M_{z\,\text{дв}}, \tag{8.6}$$

де I_x, I_y, I_z — осьові; I_{xy} — відцентровий момент інерції; ω_x, ω_y, ω_z — кутові швидкості крену, рискання і тангажа; m — маса ЛА; ϑ, γ — кути крену і тангажа; V_x, V_y, V_z — складові вектора швидкості ЛА; x — лобовий опір; $y_{\text{аер}}$ — піднімальна сила; P_x, P_y — складові вектора тяги; $M_{\text{здв}}$ — гіроскопічний момент двигуна; z — поперечна сила; M_x, M_y, M_z — аеродинамічні моменти щодо відповідних осей.

Вирази (8.1)–(8.6) становлять собою систему нелінійних диференціальних рівнянь. Для отримання рівнянь, що дозволяють розв'язати задачу ідентифікації стійкості і керованості ЛА, скористаємося принципом лінеаризації рівнянь руху за допомогою методу малих збурень.

Відповідно до цього методу вважатимемо, що кінематичні параметри збуреного руху ЛА мало відрізняються від параметрів опорного руху в одні і ті ж моменти часу.

Нелінійні залежності за допомогою розкладання в ряд Тейлора можна наближено зобразити у вигляді системи лінійних диференціальних рівнянь, яка описує збурений рух ЛА як відхилення від опорного руху.

Умова малості відхилення Δx кінематичних параметрів дозволяє вважати, що $\cos\Delta x \approx 1$; $\sin\Delta x \approx \Delta x$; $\Delta x = \{\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma\}$.

До рівнянь (8.1)–(8.6) входять аеродинамічні сили й моменти:

$$x = c_x qS; \quad y = c_y qS; \quad z = c_z qS;$$

$$M_x = m_x(\alpha) qSl; \; M_y = m_y(\alpha) qSl; \; M_z = m_z(\alpha) qSb_A,$$

де q — швидкісний напір; S — площа крила; l — розмах крила; b_A — середня аеродинамічна хорда крила.

У загальному випадку коефіцієнти аеродинамічних сил і моментів є функцією кута атаки α_0. Вибираючи як опорний рух режими з фіксованими кутами атаки α_0, можна вважати, що коефіцієнти c_x, c_y, c_z, m_x, m_y, m_z стаціонарні. Вважаємо

$$\omega_x^0 = \omega_y^0 = \omega_z^0 = 0\,.$$

Покладемо також, що бічний і поздовжній рухи не впливають один на одного. Для цього маневр у бічному русі виконується при майже постійному α, а в поздовжньому — при нульових відхиленнях змінних бокового руху.

Ізольований бічний рух (БР) можливий за таких обмежень, які доповнюють наведені вище $\Delta\omega_z = 0$; $V - \text{const}$; $\sin\Delta\beta \approx \beta$; $\cos\Delta\beta \approx 1$, де β — кут ковзання ЛА.

З огляду на ці обмеження і використовуючи співвідношення $V_x = V\cos\beta\cos\alpha$; $V_y = -V\cos\beta\sin\alpha$; $V_z = V\sin\beta$, з (8.1)–(8.3) отримаємо:

$$\dot\beta = \cos\alpha\,\omega_y + \sin\alpha\,\omega_z + \frac{z}{mV},$$

$$I_x\dot\omega_x - I_{xy}\dot\omega_y = M_x, \tag{8.7}$$

$$I_y\dot\omega_y - I_{yx}\dot\omega_x = M_y, \tag{8.8}$$

де $\dfrac{z}{mV}$ — наведена поперечна сила:

$$\frac{z}{mV} = \frac{z_{\text{аер}} + mg\cos\vartheta\sin\gamma}{mV} = \frac{g}{V}n_z + \frac{g}{V}\cos\vartheta\sin\gamma\,, \tag{8.9}$$

де n_z — бічне перевантаження.

$$\Delta c_z = c_z^{\beta}\Delta\beta + c_z^{\beta_н}\Delta\delta_н + c_z^{\delta_e}\Delta\delta_e \tag{8.10}$$

$$m_x = m_x^{\bar{\omega}_x}\Delta\bar{\omega}_x + m_x^{\bar{\omega}_y}\Delta\bar{\omega}_y + m_x^{\beta}\Delta\beta + m_x^{\delta_н}\Delta\delta_н + m_x^{\delta_e}\Delta\delta_e, \tag{8.11}$$

$$m_y = m_y^{\bar{\omega}_x}\Delta\bar{\omega}_x + m_y^{\bar{\omega}_y}\Delta\bar{\omega}_y + m_y^{\beta}\Delta\beta + m_y^{\beta_н}\Delta\delta_н + m_y^{\delta_e}\Delta\delta_e. \tag{8.12}$$

З огляду на це, а також на те, що поперечне перевантаження дорівнює $n_z = c_z qS/mg$, із (8.7)–(8.9) отримаємо:

$$\left(I_x\dot{\omega}_x - I_{xy}\dot{\omega}_y\right)\frac{1}{qSl} = m_x^{\bar{\omega}_x}\Delta\bar{\omega}_x + m_x^{\bar{\omega}_y}\Delta\bar{\omega}_y + m_x^{\beta}\Delta\beta + m_x^{\delta_н}\Delta\delta_н + m_x^{\delta_e}\Delta\delta_e, \tag{8.13}$$

$$\left(I_y\dot{\omega}_y - I_{xy}\dot{\omega}_x\right)\frac{1}{qSl} = m_y^{\bar{\omega}_x}\Delta\bar{\omega}_x + m_y^{\bar{\omega}_y}\Delta\bar{\omega}_y + m_y^{\beta}\Delta\beta + m_y^{\beta_н}\Delta\delta_н + m_y^{\delta_e}\Delta\delta_e, \tag{8.14}$$

$$\Delta n_z\frac{mg}{qS} = c_z^{\delta}\Delta\beta + c_z^{\delta_н}\Delta\delta_н + c_z^{\delta_e}\Delta\delta_e, \tag{8.15}$$

де $\delta_н$, δ_e — кути відхилення руля напряму і елеронів; $\bar{\omega}_{x,y} = \frac{l}{2V}\omega_{x,y}$ — безрозмірні кутові швидкості крену і рискання.

8.3. Синтез тест-сигналів для ідентифікації параметрів моделі бічного руху об'єкта

Проблема мультиколеніарності змінних одна з найважливіших при ідентифікації похідних стійкості і керованості. Майже лінійна залежність фазових змінних ЛА змушує шукати такі умови експерименту, за яких ця залежність виявляється найменшою мірою. Розв'язання цієї проблеми пов'язано з вибором таких тест-сигналів, щоб інформаційна матриця експерименту мала певну структуру.

Однією з особливостей реалізації тест-сигналів на борту ЛА є те, що вони можуть вироблятися як за допомогою системи

автоматичного керування (САК), так і в ручному режимі. Останнє більш імовірно на етапі льотних випробувань. Це накладає додаткові (з урахуванням розглянутих у розд. 2) обмеження на клас припустимих керувань:

1. Прийнятність для пілота. Вхідні сигнали не повинні виводити ЛА в область польотних режимів, із яких пілот не в змозі вивести ЛА. Сигнали мають бути відтворені пілотом.

2. Обмеження, що накладаються на міцність конструкції ЛА: маневри, що здійснюються ЛА і модельовані за допомогою вхідних сигналів, не повинні призводити до навантажень, які перевищували б допустимі.

Форму тест-сигналу руля керування наведено на рис. 8.4.

$$\dot{\beta} = \cos\alpha\,\omega_y + \sin\alpha\,\omega_z + \frac{z}{mV};$$

$$I_x\dot{\omega}_x - I_{xy}\dot{\omega}_y = M_x;$$

$$I_y\dot{\omega}_y - I_{xy}\dot{\omega}_X = M_y.$$

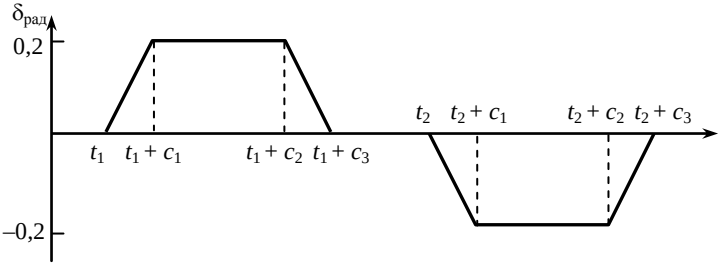


Рис. 8.4. Тестові сигнали для ідентифікації каналу бічного руху ЛА

Тестові сигнали не повинні створювати надмірних прискорень і істотно змінювати положення ЛА з метою збереження припущень щодо лінеаризації. Для моделі легкого маневреного ЛА вводилися такі обмеження:

$$|\Delta\beta| \le 14^{\circ},\ |\Delta\omega_x| \le 10 \text{ град/с},\ |\Delta\omega_z| \le 6 \text{ град/с}.$$

Для успішної відтворюваності сигналів пілотом накладаються обмеження на їх взаємне розташування:

$$t_j^i - t_l^k \ge \Delta t \in \Delta T_c;\ t_k - t_1' T_{\text{експ}};\ \ i,k = 1,2,\quad j \subset L_j,\quad l \subset L_l\ .$$

Остання нерівність пов’язана з обмеженням на тривалість експерименту. Момент подачі першого імпульсу $[+\delta_н]$ фіксований. Моменти подачі інших імпульсів $[\pm\delta_н, -\delta_н]$ задаються відносно першого.

На рис. 8.5 показано тест-сигнали, оптимальні за критерієм: $\Phi = \max \det M$, де M — інформаційна матриця експерименту. Оцінки для оптимального за Ф-критерієм і керування наведено в табл. 8.1.

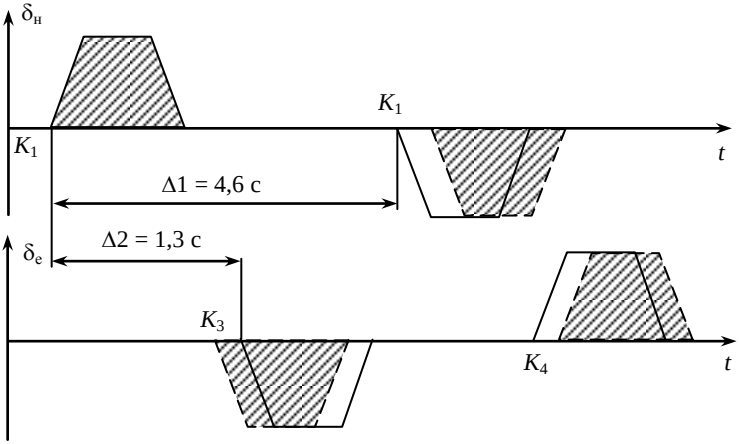


Рис. 8.5. Уточнення тестових сигналів за даними експерименту

Таблиця 8.1

Ідентифікація за Ф-критерієм

Параметри	$m_x^{\bar{\omega}_x}$	$m_x^{\bar{\omega}_y}$	m_x^{β}	$m_x^{\delta_н}$	$m_x^{\delta_e}$
	–0,36204	–0,07159	–0,07655	–0,00516	–0,05501
	$m_y^{\bar{\omega}_x}$	$m_y^{\bar{\omega}_y}$	m_y^{β}	$m_y^{\delta_н}$	$m_y^{\delta_e}$
	–0,36204	–0,07159	–0,07655	–0,00516	–0,05501
	—	—	c_z^{β}	$c_z^{\delta_н}$	$c_x^{\delta_e}$
	—	—	1,02887	–0,6232	0,00194

8.4. Корекція критеріїв якості експерименту

Необхідна для побудови цілеорієнтованої моделі матриця других похідних критерію верхнього рівня $I(\beta)$ в даному випадку задається діагональною матрицею $I''(\beta) = \mathrm{diag}(a_1, ..., a_m)$, де величини a_i визначаються необхідною точністю оцінки параметрів. Оскільки задача ідентифікації параметрів моделі ЛА є погано обумовленою, то домогтися в одному експерименті необхідної точності для всіх оцінок параметрів не вдається. Для подолання цих труднощів використовується алгоритм покоординатної оптимізації. Критерій покоординатної оптимізації для оцінки k-го параметра при використанні норми Гельдера має такий вигляд:

$$\Phi_k^p = \min_j \left\| j_k - i_k \right\|_p = \min \left(\sum_{i=1}^{m} \left| j_{kl} - i_{kl} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (8.16)$$

де j_{kl}, i_{kl} — елементи k-го рядка матриць $J > (\beta)$ і $I > (\beta)$ відповідно; p – показник норми.

Оскільки матриця для $I(\beta)$ діагональна, то критерій (8.16) набуває вигляду:

$$\Phi_k^p = \min \left(\sum_{l=1}^{m-1} \left| j_{kl} \right|^p + \left| j_{kk} - a_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (8.17)$$

При використанні норми з показником $p = 1$ можна вираз (8.17) ще спростити:

$$\Phi_k = \min_j \left(\sum_{i=1}^{m} \left| j_{ki} \right| - a_k \right). \qquad (8.18)$$

У табл. 8.2 наведено результати ідентифікації з використанням алгоритмів покоординатної оптимізації.

Алгоритм корекції критеріїв ідентифікації має вигляд:

– за продувними даними синтезуються тестові сигнали, оптимальні за критерієм $\Phi = \max \det M$;

– для уточнення кожного з параметрів синтезуються тестові сигнали, оптимальні за критерієм покоординатної оптимізації $\Phi_k = \min_j \sum_{i=1}^{m} \left| j_{ki} \right| - a_k$.

Таблиця 8.2

Ідентифікація параметрів за критеріями покоординатної оптимізації

Параметри моделі	$m_x^{\bar{\omega}_x}$	$m_x^{\bar{\omega}_y}$	m_x^{β}	$m_x^{\delta_н}$	$m_x^{\delta_e}$
	–0,358	–0,073	–0,0751	–0,00516	–0,055
	$m_y^{\bar{\omega}_x}$	$m_y^{\bar{\omega}_y}$	m_y^{β}	$m_y^{\delta_н}$	$m_y^{\delta_e}$
	–0,068	–0,037	–0,139	–0,034	0,01012
	–	–	c_z^{β}	$c_z^{\delta_н}$	$c_x^{\delta_e}$
	–	–	1,02911	–0,06271	0,00021

У табл. 8.3 наведено справжні параметри моделі ЛА (8.7)–(8.8). Як бачимо, оцінки АДК за критерієм (8.15) ближчі до точних АДК (табл. 8.3), ніж оцінки за критерієм Ф.

Таблиця 8.3

Справжні параметри системи

$m_x^{\bar{\omega}_x}$	$m_y^{\bar{\omega}_y}$	m_y^{β}	$m_y^{\delta_н}$	$m_y^{\delta_e}$
–0,3500	–0,64631	–0,075	–0,00516	–0,055
$m_y^{\bar{\omega}_x}$	$m_y^{\bar{\omega}_y}$	m_y^{β}	$m_y^{\delta_н}$	$m_y^{\delta_e}$
–0,070	–0,42537	–0,140	–0,0344	0,010
–	–	c_z^{β}	$c_z^{\delta_н}$	$c_x^{\delta_e}$
–	–	1,030	–0,063	0,00

8.5. Уточнення оцінок коефіцієнтів моделі бічного руху об’єкта

У процесі композиції відновлюється характер залежності коефіцієнтів аеродинамічних сил і моментів від кута атаки, роблячи можливим перехід від лінійних відносно шуканих коефіцієнтів моделей збільшень (8.13)–(8.15) до більш повних моделей, де АДК — функції кута α :

$$\left(I_x\dot{\omega}_x - I_{xy}\dot{\omega}_y\right)\frac{1}{qSl} = m_x^{\bar{\omega}x}(\alpha)\bar{\omega}_x + m_x^{\bar{\omega}y}(\alpha)\bar{\omega}_y + m_x^{\beta}(\alpha)\beta +$$

$$+m_x^{\delta_н}(\alpha)\delta_н + m_x^{\delta_e}(\alpha)\delta_e;$$

$$\left(I_y\dot{\omega}_y - I_{xy}\dot{\omega}_x\right)\frac{1}{qSl} = m_y^{\bar{\omega}x}(\alpha)\bar{\omega}_x + m_y^{\bar{\omega}y}(\alpha)\bar{\omega}_y + m_y^{\beta}(\alpha)\beta +$$

$$+m_y^{\delta_н}(\alpha)\delta_н + m_y^{\delta_e}m(\alpha)\delta_e;$$

$$\Delta n_z\frac{mg}{qS} = c_z^{\beta}(\alpha)\beta + c_z^{\beta_н}(\alpha)\delta_н + c_z^{\beta_e}(\alpha)\delta_e.$$

Для невеликого діапазону змін кута атаки легкого маневреного літака характер залежностей досить точно апроксимувався по МНК лінійними моделями:

$$\begin{aligned}
&m_x^{\bar{\omega}_x}(\alpha) = -0,64 + 0,024\alpha; \quad && m_y^{\bar{\omega}_y}(\alpha) = -0,66;\\
&m_x^{\beta}(\alpha) = -0,143 + 0,0095\alpha; \quad && m_x^{\delta_і}(\alpha) = -0,068 + 0,0047\alpha;\\
&m_x^{\delta_e}(\alpha) = -0,068 + 0,0027\alpha; \quad && m_y^{\bar{\omega}_x}(\alpha) = -0,21;\\
&m_y^{\bar{\omega}_y}(\alpha) = -0,565 + 0,064\alpha; \quad && m_y^{\beta}(\alpha) = -0,124 + 0,01\alpha;\\
&m_y^{\delta_і}(\alpha) = -0,14 + 0,01\alpha; \quad && m_y^{\delta_e}(\alpha) = -0,018;\\
&c_z^{\beta}(\alpha) = -1,41 + 0,097\alpha; \quad && c_z^{\delta_і}(\alpha) = -0,36 + 0,025\alpha;
\end{aligned} \tag{8.19}$$

$$c_z^{\delta_e}(\alpha) = -0,045 + 0,0032\alpha.$$

Деякі графіки отриманих залежностей зображено на рис. 8.6. Там же показано значення оцінок параметрів часткових моделей з використанням як оптимальних, так і неоптимальних вхідних сигналів.

Як бачимо, оптимізація тест-сигналів суттєво зменшує розкид точок відносно ліній регресії, а значить, і розкид оцінок коефіцієнтів. Середньоквадратична міра близькості перехідних процесів моделі і реального об'єкта

$$S = \int_T \left(x_0 - x_M\right)^2 dt. \tag{8.20}$$

Для моделі з коефіцієнтами, отриманими з використанням оптимальних за (8.18) сигналів, $s = 0,87$; для моделі з коефіцієнтами, отриманими за Ф-критерієм $S = 12,4$.

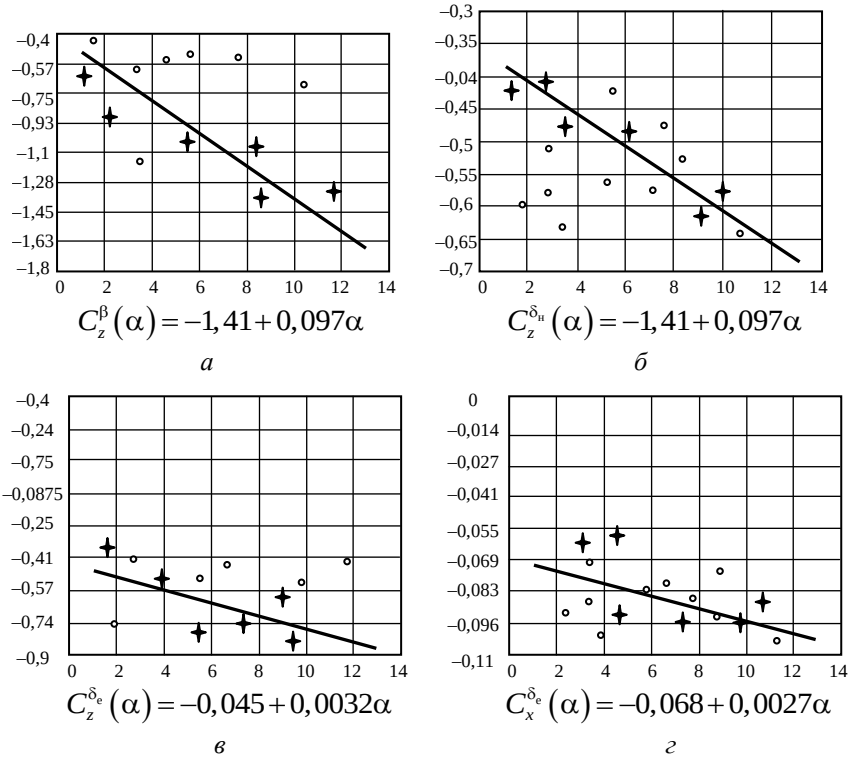


Рис. 8.6. Апроксимація залежності оцінок аеродинамічних коефіцієнтів від кута атаки, отриманих за D-критерієм (∘) та критерієм (8.18) (+), де *а* — залежність $C_z^{\beta}(\alpha)$; *б* — залежність $C_z^{\delta_н}(\alpha)$; *в* — залежність $C_z^{\delta_е}(\alpha)$; *г* — залежність $C_x^{\delta_е}(\alpha)$

Таким чином, якщо є необхідність у високій точності оцінювання окремих АДК, то доцільно для кожного АДК виконувати режим, оптимальний за критерієм (8.18).

Це задача параметричної ідентифікації. Якщо ж треба забезпечити тільки мінімум критерію (8.20), то достатньо D-оптимального плану експерименту. Це задача сигнальної ідентифікації.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. *Наведіть структурну схему бортової системи адаптивного оптимального керування натурними випробуваннями.*
2. *Наведіть алгоритм синтезу тест-сигналів для ідентифікації параметрів моделі.*
3. *У чому полягає оптимізація експерименту за D-критерієм?*
4. *Чому точність оцінок АДК за критерієм покоординатної оптимізації краща від оптимізації за D-критерієм і в чому гірша?*
5. *Чому залежність (8.19) ФДК від кута α несиметрична відносно α ?*
6. *Яким чином відбувається уточнення оцінок АДК (Рис. 8.6.) і чому не можна було б відразу ідентифікувати ці нелінійні складові?*

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Калман Р.* Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. — М. : Мир, 1971. — 380 с.

2. *Кринецкий Л. И.* Лётные испытания систем управления ракетами / Л. И. Кринецкий. — М. : Машиностроение, 1980. — 400 с.

3. *Круг Г. К.* Планирование експеримента в идентификации и екстарполяции / Г. К. Круг, Ю. А. Сосулин, В. А. Фатуев. — М. : Наука, 1977. — 280 с.

4. *Сільвестров А. М.* Цілеспрямовані системи ідентифікації / А. М. Сільвестров, В. М. Синєглазов. — К. : УМКВО, 1989. — 110 с.

5. *Сільвестров А. М.* Багатократно адаптивні системи ідентифікації / А. М. Сільвестров, О. М. Панченко. — К. : Техніка, 1983. — 110 с.

ЗМІСТ

	Вступ.....	3
1	**Системний підхід до задачі ідентифікації**.....	5
1.1	Визначення системи.....	5
	Контрольні запитання та завдання.....	14
1.2	Багаторівнева декомпозиція систем.....	14
	Контрольні запитання та завдання.....	25
1.3	Принцип узгодженості критеріїв.....	26
	Контрольні запитання та завдання.....	38
1.4	Композиція підсистем різних рівнів в єдину систему.....	39
	Контрольні запитання та завдання.....	46
	Використана література.....	46
2	**Моделі множинної регресії та їх ідентифікація методом найменших квадратів**.....	49
2.1	Загальний опис множинної лінійної регресії.....	49
2.2	Емпірична модель.....	50
2.3	МНК-оцінювання вектора β.....	52
2.4	Числові характеристики МНК-оцінок та емпіричної функції регресії.....	54
2.5	Теорема Гауса-Маркова для множинної лінійної регресії.....	58
2.6	Визначення точкової не зміщеної статистичної оцінки для σ_ε^2 випадкових відхилень ε_i.....	61
2.7	Статистична незалежність оцінок β^* і S_ε^2.....	63
2.8	Коефіцієнт детермінації.....	64
2.9	Закони розподілу оцінок $\beta_i^*\left(i=\overline{0,m}\right)$ емпіричної регресії.....	65
2.10	Довірчі інтервали теоретичної множинної лінійної регресії та її параметрів β_i.....	68
2.11	Перевірка статистичної значущості коефіцієнтів теоретичного рівняння регресії.....	70
2.12	Перевірка загальної якості множинної лінійної регресії.....	71

	Контрольні запитання та завдання.....	81
	Використана література.....	82
3	**Байєсівське оцінювання регресійних моделей і його редукція до МНК-оцінювання.....**	83
3.1	Статистичні критерії оптимальності…….....	83
	Контрольні запитання та завдання.....	86
3.2	Методи оцінювання вектора β лінійних моделей…..	86
	Контрольні запитання та завдання.....	97
3.3	Загальний алгоритм нелінійного оцінювання параметрів.....	98
	Контрольні запитання та завдання.....	111
3.4	Оптимізація параметрів алгоритму ідентифікації з умови мінімуму середніх втрат при керуванні динамічним об'єктом (канал крену ракети)……...	111
	Контрольні запитання та завдання.....	119
	Використана література.....	119
4	**Оцінювання параметрів лінійних моделей за неточними вхідними і вихідними сигналами об'єкта.....**	121
4.1	МНК в ситуації зашумленості вихідних і вхідних сигналів.....	121
	Контрольні запитання та завдання.....	125
4.2	Узагальнений МНК та його практична реалізація....	125
	Контрольні запитання та завдання.....	128
4.3	Інтегрований МНК.....	128
4.3.1	Загальні положення.....	128
4.3.2	Аналіз складових методу.....	129
4.3.3	Кількісні показники (4.35).....	135
4.3.4	Рекурентна форма обчислення.....	138
4.3.5	Вагова функція інтегрованого МНК.....	140
4.3.6	Алгоритм методу ІМНК.....	142
4.3.7	Приклад тестування методу ІМНК.....	145
	Контрольні запитання та завдання.....	152
4.4	Метод адаптивного одноразового ділення (МОД)…	153
4.4.1	Сутність методу.....	153
4.4.2	Зміщення оцінок.....	154
4.4.3	Коваріація оцінок (4.50).....	154
	Контрольні запитання та завдання.....	156

4.5 Метод прогнозу кореляцій..... 156
Контрольні запитання та завдання..... 158
4.6 Приклад побудови прогнозних моделей системою ідентифікації типу БАСІ..... 158
Контрольні запитання та завдання..... 167
Використана література..... 168
5 Неперервні моделі динамічних систем..... 169
5.1 Моделі, побудовані на основі законів механіки..... 169
Контрольні запитання та завдання..... 174
5.2 Моделі, побудовані на основі Законів електромеханіки..... 174
5.2.1 Передатна функція двигуна постійного струму як виконавчого елемента в системах бортової автоматики літальних апаратів..... 174
5.2.2 Передатна функція гідравлічного приводу рульових машинок літальних апаратів..... 178
5.3 Моделі у вигляді структурних схем об'єктів ідентифікації та систем керування ними..... 183
5.4 Спрощення передатних функцій..... 193
Контрольні запитання та завдання..... 197
5.5 Моделі в змінних стану..... 197
5.5.1 Змінні стану..... 197
5.6 Часові характеристики і перехідна матриця стану..... 203
5.7 Моделі об'єктів із розподіленими параметрами та їх ідентифікація..... 212
5.7.1 Моделювання об'єктів із розподіленими параметрами..... 212
5.7.2 Класифікація математичних моделей об'єктів із розподіленими параметрами..... 215
Контрольні запитання та завдання..... 231
Використана література..... 232
6 Методи ідентифікації динамічних об'єктів..... 233
6.1 Ідентифікація динамічних об'єктів..... 233
6.1.1 Активна ідентифікація динамічних об'єктів..... 233
6.1.2 Визначення імпульсної перехідної функції кореляційним методом..... 235
6.1.3 Псевдовипадкові двійкові послідовності

максимальної довжини..... 239
6.1.4 Отримання непараметричних оцінок перехідної функції (ПФ) і амплітудно-фазочастотної характеристики (АФЧХ) в режимі активної ідентифікації..... 249
6.1.5 Визначення коефіцієнтів рядів, у які розкладаються передатні функції..... 252
Контрольні запитання та завдання..... 262
6.2 Методи он-лайн-ідентифікації передатних функцій об'єктів..... 263
6.2.1 Ортогональні моделі..... 263
6.2.2 Градієнтний метод із паралельною моделлю..... 266
6.2.3 Градієнтний метод із послідовно-паралельною моделлю..... 268
6.2.4 Метод трьох моделей..... 271
6.2.5 Ноніусні моделі..... 280
Контрольні запитання та завдання..... 284
6.3 Комплексування методів і моделей..... 284
Використана література..... 292
7 Двокрокова ідентифікація коефіцієнтів моделі рухомих об'єктів..... 293
7.1 Математичні моделі поздовжнього короткоперіодичного руху об'єкта..... 293
7.1.1 Залежність Δm_{z_1} від $\Delta n_y, \Delta\omega_{z_1}, \Delta\delta_b$ 294
7.1.2 Залежність Δm_{z_1} від $\Delta\alpha, \Delta\omega_{z_1}, \Delta\delta_b$ 295
7.1.3 Залежність Δm_{z_1} від $\Delta n_y, \Delta\dot{\alpha}, \Delta\delta_b$ 296
7.1.4 Залежність Δm_{z_1} від $\Delta\alpha, \Delta\dot{\alpha}, \Delta\delta_b$ 297
7.1.5 Залежність ΔC_y від $\Delta\alpha, \Delta\omega_z, \Delta\delta_b$ 297
7.1.6 Залежність ΔC_y від $\Delta\alpha, \Delta\dot{\alpha}, \Delta\delta_b$ 297
7.1.7 Залежність $\Delta\dot{C}_y$ від $\Delta\dot{\alpha}, \Delta\dot{\omega}_{z_1}, \Delta\dot{\delta}_b$ 297
7.2 Характеристики стійкості і керованості та їх оцінки за лінеаризованим рівнянням сили Y і моменту M_{z1}..... 298
7.2.1 Передатні функції каналу поздовжнього руху..... 300
7.2.2 Вираз для оцінок характеристик стійкості

і керованості в каналі поздовжнього руху літака..... 303
7.2.3 Нейтральне центрування літака..... 304
7.2.4 Витрата руля висоти на одиницю перевантаження... 305
7.2.5 Похідна від коефіцієнта поздовжнього моменту за рулем висоти..... 305
7.2.6 Коефіцієнт моменту поздовжнього сумарного демпфірування..... 306
7.2.7 Похідна коефіцієнта піднімальної сили за кутом атаки..... 307
7.2.8 Похідна коефіцієнта піднімальної сили за рулем висоти..... 308
7.2.9 Коефіцієнт сили поздовжнього сумарного демпфірування..... 309
7.3 Критерії поздовжньої динамічної стійкості і керованості..... 310
7.3.1 Показник ω_0^2 / n_y^α відношення квадрата кутової частоти ω_0 недемпфіруваних вільних коливань до коефіцієнта n_y^α 310
7.3.2 Період Т вільних коливань..... 311
7.3.3 Величина відносного закидання перевантаження $\Delta\overline{n}_y$ 311
7.4 Незміщене оцінювання лінійної складової нелінійної моделі динаміки об'єкта..... 313
Контрольні запитання та завдання..... 325
7.5 Ідентифікація гладкої нелінійної статичної складової динамічної моделі 325
Контрольні запитання та завдання..... 329
7.6 Структурно-параметрична ідентифікація багатовимірних нелінійних залежностей за експериментальними даними..... 329
Контрольні запитання та завдання..... 334
Використана література..... 334
8 Адаптивна активна ідентифікація математичної моделі бічного руху об'єкта..... 335
8.1 Структурна схема бортової системи адаптивного оптимального керування льотними

випробуваннями
на стійкість і керованість..... 335
8.2 Математичні моделі збуреного руху об’єкта
та їх декомпозиція..... 338
8.3 Синтез тест-сигналів для ідентифікації параметрів
моделі бічного руху об’єкта..... 340
8.4 Корекція критеріїв якості експерименту..... 343
8.5 Уточнення оцінок коефіцієнтів моделі бічного руху
об’єкта..... 344
Контрольні запитання та завдання..... 347
Використана література..... 347