

Про зліченно – кратні функції

Як зазвичай, через $\mathbb{R}^2$ позначимо двовимірний евклідов простір.

Вважаючи означення контингенції множини в просторі $\mathbb{R}^2$ відомим, введемо таке поняття.

Розглянемо контингенцію $\text{contg}_E a$ довільної множини $E \subset \mathbb{R}^2$ в якій-небудь точці $a \in E$. Кожну з двох будь-яких проміжних півдотичних цієї множини в точці a , які утворюють кут, що не містить контингенції $\text{contg}_E a$, будемо називати крайньою півдотичною множини E в точці a .

Одним із різновидів теорем про покриття плоских множин евклідового простору є таке твердження.

Теорема 1. Нехай в кожній точці деякої підмножини $P \subseteq E \subset \mathbb{R}^2$ множина E має крайню півдотичну, паралельну фіксованій прямій l . Тоді ортогональна проекція підмножини P на пряму, перпендикулярну до l , має нульову лінійну міру.

Доведення. За умовою теореми в кожній точці підмножини $P \subseteq E$ контингенція множини E не є повною площиною. Тоді, як відомо ([3], стор. 384), $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3$, де P_1 і P_2 - підмножини, в точках яких відповідно множина E має дотичну та її контингенція є півплощиною, а P_3 - підмножина нульової довжини.

Отже, в кожній точці $a \in P \subseteq E$, за виключенням, можливо, множини точок нульової довжини, множина E має крайню дотичну, паралельну прямій l . Беручи до уваги, що ортогональна проекція множини P_3 на будь-яку пряму є множиною міри нуль, розглянемо точки множини $P_1 \cup P_2$.

Тепер перебуваючи в умовах відомої теореми ([3], стор. 385), залишається лише скористатися нею, щоб завершити доведення.

За допомогою попередньої теореми далі встановимо одну диференціальну властивість неперервної функції однієї дійсної змінної в термінах похідних чисел.

Нехай f - скінченна функція однієї змінної. Прийmemo такі загальновживані позначення: $f^+(x_0)$ - праве похідне число та $\underline{f}^+(x_0), \overline{f}^+(x_0)$ - відповідно нижнє і верхнє праві похідні числа функції $f(x)$ в точці x_0 . Сформулюємо запропоновану С. Банахом таку умову.

Функція f задовольняє умову (T1) на сегменті $[a; b]$, якщо майже кожне своє значення вона набуває на цьому сегменті не більше ніж скінченне число разів.

Тепер має місце теорема.

Теорема2. Нехай $f(x), x \in [a; b]$ - неперервна функція, яка задовольняє умову (T1) і в кожній точці x множини $E \subset [a; b]$ має праве похідне число, що дорівнює нулю. Тоді образ $f(E)$ має лінійну міру нуль.

Доведення. Якщо $E \supset E_0$ - множина всіх точок x , для яких повний прообраз $f^{-1}f(x)$ є не більш ніж скінченною множиною, то для доведення теореми достатньо показати, що $mes f(E_0) = 0$.

Нехай x_0 - довільна точка множини E_0 . Тоді x_0 є ізольованою точкою множини $f^{-1}f(x_0)$, причому $f^+(x_0) = 0$. Звідси випливає або $\underline{f}^+(x_0) = 0$, або $\overline{f}^+(x_0) = 0$ і, отже, в точці графіка функції $f(x)$ з абсцисою x_0 існує крайня півдотична паралельна осі абсцис.

Застосовуючи теорему1 до множини точок $(x; f(x)), x \in E_0$ на площині $\mathbb{R}^2$, дістаємо $mes f(E_0) = 0$.

Важливими є функції, що задані на сегменті і монотонні на складових інтервалах деякої відкритої скрізь щільної підмножини цього сегмента. Встановимо умови, при яких така монотонність має місце.

Теорема 3. Нехай функція $f(x)$, $x \in [a; b]$ неперервна і множина e скінченних або злічених її рівнів другої категорії на образі $[m; M]$ сегмента $[a; b]$. Тоді існує відкрита скрізь щільна множина $G \subset [a; b]$, в кожній компоненті якої функція f монотонна.

Доведення. Нехай у двовимірному евклідовому просторі задана яка-небудь прямокутна декартова система координат Oxy . Надалі вважатимемо, що функція f не має інтервалів сталості на $[a; b]$.

За умовою теореми множина незлічених рівнів функції f є множиною першої категорії на $[m; M]$. Оскільки будь-яка множина першої категорії міститься в деякій F_σ -множині першої категорії, то вважатимемо надалі що множина другої категорії e скінченних або злічених її рівнів є G_δ -множиною на сегменті $[m; M]$.

Далі візьмемо простір Бера N —множину всіх ірраціональних точок сегмента $[m; M]$. Тоді перетин $E = N \cap e$ є скрізь щільною G_δ -множиною на $[m; M]$, яка гомеоморфна берівському простору.

Візьмемо тепер деяку фіксовану пряму L на площині Oxy , паралельну до осі Ox . Розглянемо прямий добуток $L \times E$, який є також G_δ -множиною на площині Oxy . Оскільки множина E другої категорії на $[m; M]$, то G_δ -множина $B = (L \times E) \cap B_f$ є скрізь щільною на графіку B_f функції f .

Отже маємо борельову множину B , яку кожна пряма паралельна до осі Ox перетинає щонайбільше по зліченній множині точок. Тоді за відомою теоремою М.М. Лузіна ([2], стор. 245-246) множина B є об'єднанням

зліченної множини борельових множин $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$, однозначних відносно осі Oy і попарно без спільних точок, причому точки цих множин B_n розміщені на однозначних відносно Oy кривих, кожна з яких є графіком однозначної функції класифікації Бера і лежить або нижче, або вище другої.

З попереднього випливає, що знайдуться точка графіка функції B_f та її отвір U на площині Ox такий, що він містить непорожню відкриту порцію $\lambda = U \cap B_f$ - дугу графіка функції f на деякому інтервалі $\delta \subset [a; b]$, на якій одна з множин B_n буде скрізь щільною і не має жодної точки інших множин з послідовності $B_1, B_2, \dots$. Тоді кожна пряма, яка паралельна до осі Ox і проходить через точку множини $\lambda \cap B_n$, перетинає дугу λ в єдиній цій самій точці. Звідси ясно, що неперервна функція f здійснює взаємнооднозначне відображення множини скрізь щільної на інтервалі δ . Отже, вона є строго монотонною на цьому δ .

Розглянуту схему для знаходження інтервала монотонності $\delta \subset [a; b]$, очевидно, можна реалізувати для функції f на будь-якому сегменті $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$. Скориставшись цим фактом, приходимо до висновку: на сегменті $[a; b]$ існує скрізь щільна система інтервалів попарно без спільних точок $\{(a_k; b_k)\}$, на кожному з яких функція f строго монотонна.

Нехай тепер не виключена можливість того, що функція f має інтервали сталості на сегменті $[a; b]$. Тоді розглянемо замкнену множину – доповнення $[a; b] \setminus O$ до відкритої множини O , на компонентах якої функція f є сталою. Якщо це доповнення ніде не щільне, то функція f монотонна на кожній компоненті відкритої скрізь щільної множини $G = O \subset [a; b]$. Якщо ж доповнення містить скінченне число або зліченну

множину невироджених сегментів, то на кожному з них за попереднім виділяється відкрита скрізь щільна множина G_i , складена із скінченної або зліченної множини інтервалів, на яких функція f є строго монотонною. Звідси знову маємо відкриту скрізь щільну множину

$$G = O \cup \left(\bigcup_i G_i \right) \subset [a; b] \text{ і на кожній її компоненті функція } f \text{ монотонна.}$$

Теорема доведена.

Теорема 3 дає змогу отримати таке твердження.

Теорема 4. Нехай на сегменті $[a; b]$ задана неперервна і ніде не стала функція $f(x)$, причому множина скінченних або злічених її рівнів є борельовою і не першої категорії на $f([a; b])$. Тоді знайдеться принаймні один інтервал $\delta \subset [a; b]$, на якому функція f буде строго монотонною.

Доведення. Оскільки за умовою борельова множина скінченних або злічених рівнів функції f не є множиною першої категорії на $f([a; b])$, то відомо, що існує сегмент $[c; d] \subset f([a; b])$, на якому вона буде множиною другої категорії. Тоді, взявши до уваги, що функція f ніде не стала на $[a; b]$, знайдемо сегмент $\Delta \subset f^{-1}([c; d]) \subset [a; b]$, де, очевидно, f задовольняє всі умови теореми 3. Звідси випливає, що можна виділити хоча б один інтервал $\delta \subset \Delta \subset [a; b]$ на якому функція f є строго монотонною.

Безпосереднім наслідком теореми 4 є твердження стосовно ніде не монотонної функції.

Теорема 5. Якщо неперервна функція $f(x)$ ніде не монотонна на сегменті $[a; b]$ і множина скінченних або злічених її рівнів є борельовою, то вона має множину незлічених рівнів другої категорії на $f([a; b])$.

Наведемо приклад, який є ілюстрацією останньої теореми.

Приклад. Нехай маємо дві множини E_1 та E_2 такі, що

$E_1 \cup E_2 = [0;1]$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, причому кожна з них є скрізь щільною і додатної міри.

$$\text{Покладемо } g(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } x \in E_1, \\ -1, \text{ при } x \in E_2 \end{cases}.$$

Тоді $f(x) = \int_0^x g(t)dt$ є ліпшицевою ніде не монотонною функцією на

сегменті $[0;1]$, а її похідна $f'(x)$ майже скрізь дорівнює або 1 на E_1 , або -1 на E_2 .

Відомо ([4], стор. 79), що на множині другої категорії $E \subset [0;1]$ маємо $\underline{f}^+(x) = -1$ і $\overline{f}^+(x) = 1$ та для кожної точки $x \in E$ множина всіх похідних чисел цієї функції становить собою сегмент $[-1;1]$. Тут образ $f(E)$ і, отже, множина незліченних рівнів функції $f(x)$ другої категорії на $f([0;1])$ ([4], стор. 77).

Зазначимо, що у прикладі при визначенні функції $g(x)$ замість 1 і -1 можна взяти будь-які неперервні функції $h_1(x)$ і $h_2(x)$ графіки яких лежать по різні боки від деякої прямої паралельної до осі Ox .

У подальшому потрібна така умова, введена М.М. Лузіним.

Функція f , що неперервна на сегменті $[a;b]$, задовольняє на ньому властивість (N), якщо вона будь-яку множину міри нуль переводить в множину міри нуль.

Як відомо, Н.К. Барі і Д.Є. Меньшов повністю охарактеризували клас функцій, які є суперпозиціями абсолютно неперервних функцій. У зв'язку з цим, в термінах категорії дамо уточнення характеристики такого класу функцій.

Для цього розглянемо неперервну функцію f , яка на сегменті $[a;b]$ задовольняє умову (T1). Тоді за теоремою Н.К. Барі ([3], стор. 414) ця функція зображується у вигляді суперпозиції двох неперервних функцій $f(x) = h[g(x)]$, де внутрішня має обмежену варіацію, а зовнішня монотонно зростає і абсолютно неперервна.

Якщо функція f до того ж має множину незліченних рівнів першої категорії, то за теоремою 3 вона монотонна на компонентах деякої відкритої скрізь щільної множини $G = \bigcup_i G_i \subset [a;b]$. Оскільки для функції h існує обернена функція h^{-1} , то звідси випливає, що $g(x) = h^{-1}[f(x)]$ є також монотонною на кожній компоненті G_i .

Нарешті, якщо на сегменті $[a;b]$ розглянута функція f задовольняє ще і умову (N), то функція g також задовольняє умову (N) і, будучи, за попереднім, функцією обмеженої варіації, є абсолютно неперервною.

Отже, має місце така теорема, яка є доповненням до результату Н.К. Барі.

Теорема 6. Будь-яка неперервна функція f , що має множину незлічених рівнів першої категорії і задовольняє умову (T1) на сегменті $[a;b]$, є на цьому сегменті суперпозицією двох неперервних функцій, з яких внутрішня має обмежену варіацію і монотонна на кожній компоненті деякої відкритої скрізь щільної множини $G = \bigcup_i G_i \subset [a;b]$, а зовнішня зростає і абсолютно неперервна. Якщо далі функція f задовольняє і умову (N), то f є суперпозицією двох абсолютно неперервних функцій, з яких зовнішня зростає, а внутрішня монотонна на компонентах G_i множини G .

Література

1. Александров П.С. О счетно-кратных открытых отображениях, ДАН, 1936, 4, с. 283-288

2. Лузин Н.Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях – М., ГИТТЛ, 1953
3. Сакс С. Теория интеграла – М., Изд-во иностр. лит., 1949
4. Трохимчук Ю.Ю. Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности – К., 2008