УДК 532.529.6: 541.183

В.Р. Кулінченко, доктор техн. наук
І.К. Мотуз, асистент. Національний університет харчових технологій
V.R. Kulintchenko, doctor of tech. science
I.K. Motuz, assistant**.** National university of food technologies

Рух бульбашки в рідині при наявності поверхнево-активних речовин (ПАР)
Motson of bubble is in liquid at presence of exterior-aktive matters (EAM)

Для великих значень чисел Рейнольдса отриманий вираз для сили опору з урахуванням зміни коефіцієнта поверхневого натягу на поверхні бульбашки. Знайдено аналітичний вираз для сили гальмування рух бульбашки, для випадку, коли зміна поверхневого натягу викликана розчиненими в рідині поверхнево-активними речовинами (ПАР) з відносно малою концентрацією.

Ключові слова: *поверхнево-активна речовина, бульбашка, сила гальмування, концентрація.*

For the large values of numbers of Reynolds expression is got for force of resistance taking into account the change of coefficient of superficial forced on exterior bubble. Analytical expression is found for force of braking motion of bubble, for a case, when the change of superficial forced is caused in a liquid exterior-aktive matters (EAM) from relatively by a small concentration.

Keywords: *exterior-aktive matter, bubble, braking force, concentration.*

Для больших значений числа Рейнольдса получено выражение для силы сопротивления, учитывающее изменение коэффициента поверхностного натяжения на поверхности пузырька. Найдено аналитическое выражение силы, тормозящей движение пузырька, для случая, когда изменение поверхностного натяжения вызвано растворенными в жидкости поверхностно-активными веществами (ПАВ) с относительно малой концентрацией.

Ключевые слова: *поверхностно-активные вещества, пузырек, сила торможения, концентрация.*

Рух бульбашок помірних розмірів (R >> 1 мм), як показано в роботі [1], описується рівнянням Лагранжа, яке для випадку руху одиничних бульбашок
має вигляд:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \AA}{\partial u_i}-\frac{\partial E}{\partial r_i}=-\frac{4}{3}\pi\rho g_i R^3+f_i, \qquad (1)$$

де E – кінетична енергія рідини, визначена в наближені потенціального обтікання; u_i і r_i – відповідно компоненти вектора швидкості і вектора координат центра бульбашки; R – радіус бульбашки; g_i – компонента вектора прискорення сиди тяжіння; f_i – компонента сили в'язкого опору, яка для чистої рідини становлять $12\pi\eta Ru$ і спрямована назустріч руху бульбашки.

Системним рівнянням (1) можна користуватися при малому відхиленні поля швидкостей реальної рідини від відповідного поля швидкостей ідеальної рідини. Ця умова виконується для чистої рідини при числах Рейнольдса порядку 100. Для рідин з розчиненими в них іншими речовинами системою (1) можна користуватися тільки у тому випадку, якщо ПАР не сильно впливають на гідродинаміку біля поверхні бульбашки.

Помножимо кожний з доданків системи (1) на компоненту швидкості і отримаємо:

$$\frac{d}{dt}\left(u_i\frac{\partial \AA}{\partial u_i}-E\right)=-\frac{4}{3}\pi\rho g_i R^3 u_i+f_i u_i.$$

Отримане таким чином рівняння повністю відображає закон зміни кінетичної енергії системи, який є точним наслідком рівняння (1):

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{4}{3}\pi\rho g_i R^3 u_i + f_i u_i. \qquad (2)$$

З іншого боку, зміну кінетичної енергії можна відшукати, використовуючи рівняння Нав'є-Стокса

$$\rho\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\rho gz\delta_{ij} + \tau_{ij}\right), \qquad (3)$$

де ρgz – потенціал сили тяжіння; τ_{ij} – тензор напруг; v_i – компоненти швидкості рідини.

До цих рівнянь необхідно приєднати рівняння нестисливості

vv $$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \qquad (4)$$ vvv

Під однаковими індексами тут і в подальшому необхідно розуміти суму аналогічних компонент. Рівняння (3) і (4) розглядаються в декартовій системі координат x_i, в якій рідина знаходиться в стані спокою на нескінченності. На границі бульбашки повинна виконуватися умова рівності нормальної до поверхні бульбашки компоненти швидкості рідини і нормальної компоненти швидкості спливання бульбашки

$$v_i n_i\big|_S = u_i n_i, \qquad (5)$$

де n_i – компоненти нормалі.

Крім цього, дотичне напруження на поверхні бульбашки повинно врівноважуватися дотичним градієнтом поверхневого натягу $\nabla_i\sigma$, у разі коли з'являються ПАР:

$$\tau_{ij} n_j = \tau_n n_i \nabla_i \sigma. \qquad (6)$$

При цьому вектор градієнта поверхневої концентрації спрямований вздовж поверхні бульбашки

$$n_i \nabla_i \sigma = 0. \qquad (7)$$

Помножимо обидві частини рівняння (3) на відповідні компоненти швидкості v_i і додамо за всіма однаковими індексами, при цьому отримаємо:

$$\frac{d}{dt}\frac{\rho v^2}{2} = v_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\rho gz\delta_{ij} + \tau_{ij}\right).$$

Якщо використати рівняння нерозривності потоку (4), то останню залежність можна перетворити до такого вигляду:

$$\frac{d}{dt}\frac{\rho v^2}{2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\rho gz\delta_{ij} v_i + \tau_{ij} v_i\right) - \tau_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \qquad (8)$$

Виконаємо інтегрування рівняння (8) за всім об'ємом рідини і, використавши теорему Гауса-Остроградського [2],

$$\frac{d}{dt}\int_V \frac{\rho v^2}{2} d^3 r = \int_S \rho gz v_i n_i dS - \int_S \tau_{ij} v_i n_j dS - \int_V \tau_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} d^3 r, \qquad (9)$$

покажемо, що ліва частина рівняння (9), яка характеризує зміну всієї кінетичної енергії рідини, мало чим відрізняється від відповідної кінетичної енергії ідеальної рідини, розрахованої в наближенні потенціального обтікання бульбашки. Дійсно швидкість v_i реальної рідини можна подати у вигляді суми швидкостей потенціального потоку $\partial\Phi/\partial x_i$ і певної невеликої добавки v_i', яка на поверхні бульбашки задовольняє умову:

$$v_i' n_i\Big|_S = 0. \qquad (10)$$

Тоді всю кінетичну енергію можна записати у вигляді суми трьох доданків:

$$\int \frac{\rho v^2}{2} d^3 r = \int\left(\frac{\rho}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} + \rho v_i'\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} + \frac{\rho v'^2}{2}\right)d^3 r.$$

Перший доданок є не що інше як кінетична енергія ідеальної рідини *E*, другий доданок за допомогою рівняння нерозривності потоку (4) можна привести до інтеграла по поверхні бульбашки, який при умові (5) перетворюється в нуль. У цьому разі кінцеве рівняння кінетичної енергії рідини буде мати такий вигляд:

$$\int \frac{\rho v^2}{2} d^3 r = E + \int \frac{\rho v'^2}{2} d^3 r. \qquad (11)$$

За допомогою граничної умови (6) і рівняння (7) вираз, який знаходиться під другим поверхневим інтегралом формули (9), можна перетворити наступним чином:

$$\tau_{ij} n_j v_i \Big|_S = \left(\tau_n n_i - \nabla_i \sigma\right)\left(v_i - u_i\right)\Big|_S + u_i \tau_{ij} n_j \Big|_S .$$

Далі, використовуючи граничну умову (5), отримаємо

$$\tau_{ij} n_j v_i \Big|_S = -\left(v_i - u_i\right) \nabla_i \sigma \Big|_S + u_i \tau_{ij} n_j \Big|_S . \qquad (12)$$

За допомогою співвідношень (11) і (12), відкидаючи малі члени з рівняння (9), визначимо зміну енергії в ідеальній рідині

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{4}{3}\pi\rho R^3 g_i u_i + u_i \int_S \tau_{ij} n_j dS + \int_S \left(v_i - u_i\right) \nabla_i \sigma dS - \int_V \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d^3 r.$$

Інтеграл, що входить множником в другий доданок правої частини, є повна сила, яка діє на бульбашку, що згідно другому закону Ньютона дорівнює зміні кількості руху бульбашки. Але тому що маса бульбашки дуже мала, то ця сила практично дорівнює нулю. Виходячи з цього, кінцева зміна енергії становить:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{4}{3}\pi\rho R^3 g_i u_i + \int_S \left(v_i - u_i\right) \nabla_i \sigma dS - \int_V \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d^3 r. \qquad (13)$$

Вважаючи, що сила опору f_i має спільний напрямок зі швидкістю, тоді, порівнюючи формули (13) і (2), відшукаємо величину цієї сили

$$f = \frac{1}{u}\left[\int_S \left(v_i - u_i\right) \nabla_i \sigma dS - \int_V \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d^3 r\right].$$

Другий доданок правої частини останнього рівняння є дисипація енергії, яку як показано в роботах [3, 4], можна розраховувати в наближенні потенціального обтікання. Таким чином, отримаємо

$$f = \frac{1}{u}\int_S \left(v_i - u_i\right) \nabla_i \sigma dS - 12\pi\eta R u. \qquad (14)$$

Отримані результати показують, що наявність поверхнево-активних речовин приводить до виникнення додаткової сили *F*, яка для сферичної бульбашки дорівнює

$$F = \frac{2\pi R}{u}\int_0^{\pi} \overline{v}_\theta \frac{d\sigma}{d\theta} \sin\theta d\theta, \qquad (15)$$

де $\overline{v}_\theta$ – тангенціальна швидкість рідини в системі координат, зв’язаній з бульбашкою; θ – кут, який відраховується від верхнього полюсу бульбашки.

Зміна поверхневого натягу речовини може бути викликана наявністю поверхнево-активних речовин, які адсорбуються на поверхні бульбашки. Якщо концентрація ПАР досить мала і не чинить суттєвого впливу на гідродинамічну обстановку біля бульбашки і, крім цього, адсорбція далека від насичення, то в першому наближенні

$$\lambda = \frac{\Gamma_0}{R c_p}\sqrt{\frac{uR}{D}} \ll 1,$$

де Γ_0 – рівноважне значення адсорбції на нерухомій поверхні бульбашки при концентрації ПАР, розчинених у рідині – c_p; *D* – коефіцієнт молекулярної дифузії.

Розподіл адсорбованої речовини по поверхні бульбашки визначене в роботі [4] і становить:

$$\Gamma(\theta) = \Gamma_0\left[1 + \lambda J(\theta)\right], \qquad (16)$$

де $J(\theta) = -\int\limits_0^{\theta} \dfrac{\sqrt{6}\sin\theta'\cos\theta' d\theta'}{\sqrt{\pi(\cos\theta' - 1/3\cos^3\theta' - \cos\theta + 1/3\cos^3\theta)}}.$

Швидкість на поверхні бульбашки мало відрізняється від швидкості потенціального обтікання сфери радіусом R

$$\overline{v}_0 = \frac{3}{2} u \sin\theta.$$

Таким чином, гальмівна сила, викликана наявністю поверхнево-активних речовин, діюча на бульбашку, становить:

$$F = \frac{3\pi R}{2}\frac{d\sigma}{d\Gamma}\int\limits_0^{\pi} \sin^2\theta \frac{d\Gamma}{d\theta} d\theta = -3\pi R \frac{d\sigma}{d\Gamma}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta\cos\theta\Gamma(\theta)d\theta.$$

Враховуючи, що на лінії ділянки ізотерми Ленгмюра рівняння Гіббса має вигляд $d\sigma/d\Gamma = -R_г T$ (де $R_г$ – газова стала; T – абсолютна температура) [5], після чисельного визначення відповідного інтеграла отримуємо кінцевий вираз для виразу додаткової сили, викликаної наявністю поверхнево-активних речовин:

$$F = -1{,}15\lambda R_{\text{ã}}\text{Ò}R\Gamma_0. \qquad (17)$$

Висновок. Розрахунки показують, що навіть для малих концентрацій ПАР додаткова сила гальмування чинить суттєвий вплив на рух бульбашки в розчині алілового спирту (0,01 моль/л) і становить приблизно 11 % по відношенню до сили в’язкого опору.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Рулёв Н.Н.* Гидродинамика всплывающего пузырька: Обзор// Коллоидный журнал.– 1980,т.42, №2.– С. 252-263.

2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике.– М.: Наука, 1968.– 720 с.

3. *Леви В.Г.* Физико-химическая гидродинамика.–М.: Физматгиз, 1959.– 470 с.

4. *Духин С.С.* Диффузионно-электрическая теория неравновесных электроповерхностных сил и электрокинетических явлений: Дис…докт. техн. наук.– М.-К.: 1965.– 435 с.

5. *Наумов В.А.* Химия коллоидов.– Л.: Ленгиз, 1932.– 379 с.