УДК 539.375

М.А. МАРТЫНЕ

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О МАТЕМАТИЧЕСКОМ РАЗРЕЗЕ ПО ПОВЕРХНОСТИ СЖАТОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

Постановка задачи. Решение уравнения Ламе. Пусть упр пространство содержит внутренний разрез по части поверхно сжатого эллипсоида вращения и находится под действием вн осесимметричных сил, приложенных на бесконечности. Предпо что внешняя система сил исключает контактирование поверхн разреза.

Рассмотрим задачу в сжатых эллипсоидальных координат вращения ξ, η, φ [1]:

$$z + ir = c\,\mathrm{sh}\,\xi\cos\eta + ic\,\mathrm{ch}\,\xi\sin\eta; \quad \varphi = \varphi \qquad (1)$$
$$(0 \leq \xi < \infty;\ 0 \leq \eta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

где параметр c определяет полуфокусные расстояния элли да; r, z, φ – цилиндрические координаты. В элли идальных координатах разрез расположен на поверхности S ($\xi \leq \xi_0$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$). Упругое пространство разо на две области: внутреннюю V_1 ($\xi \leq \xi_0$, $0 \leq \eta \leq \pi$) и внешнюю V_2 $\xi \geq \xi_0$, $0 \leq \eta \leq \pi$).

Уравнение равновесия Ламе [2] для однородной изотро ной среды

$$2\frac{m-1}{m-2}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0$$

в областях V_1 и V_2 будем решать методом, изложенным в работе [3]. Учитывая осесимметричные задачи, введем сл дующие функции:

$$\frac{cm}{2(m-2)}\,\mathrm{div}\,\vec{u} = \theta(\xi,\eta); \quad \frac{cm\,\mathrm{rot}\,\vec{u}}{4(m-1)} = \vec{e}_\varphi\,\omega(\xi,\eta), \qquad (3)$$

где $\vec{e}_\varphi$ – единичный вектор. Тогда уравнение Ламе в про циях на эллипсоидальные оси координат представим так:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\xi} - \frac{1}{\sin\eta}\frac{\partial(\sin\eta\,\omega)}{\partial\eta} = 0; \quad \frac{\partial\theta}{\partial\eta} + \frac{1}{\mathrm{ch}\,\xi}\frac{\partial\,\mathrm{ch}\,\xi\,\omega}{\partial\xi} = 0. \qquad (4)$$

ешение системы (4) находим методом разделения переменных [1]. истема уравнений (3) относительно цилиндрических проекций ектора перемещений имеет вид

$$\frac{\partial u_z}{\partial\xi} + \frac{1}{\sin\eta}\frac{\partial\sin\eta\,u_r}{\partial\eta} = 2\frac{m-2}{m}\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta\,\theta - 4\frac{m-1}{m}\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta\,\omega;$$
$$\frac{\partial u_z}{\partial\eta} - \frac{1}{\mathrm{ch}\,\xi}\frac{\partial\,\mathrm{ch}\,\xi\,u_r}{\partial\xi} = -2\frac{m-2}{m}\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta\,\theta - 4\frac{m-1}{m}\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta\,\omega. \qquad (5)$$

Частное решение неоднородной системы (5) представим через комбинации функций θ и ω:

$$\bar{u}_z = -4\frac{m-1}{m}\mathrm{sh}\,\xi\cos\eta\,\theta + \frac{3m-4}{m}\mathrm{ch}\,\xi\sin\eta\,\omega;$$
$$\bar{u}_r = \frac{3m-4}{m}\mathrm{ch}\,\xi\sin\eta\,\theta + 4\frac{m-1}{m}\mathrm{sh}\,\xi\cos\eta\,\omega.$$

Решение однородной системы запишем в виде бесконечных сумм от произведений функций Лежандра аргументов $i\,\mathrm{sh}\,\xi$ и $\cos\eta$. Использовав равенства

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)B_n P_n(i\,\mathrm{sh}\,\xi)P_n(\cos\eta)\cos\eta =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[B_{n-1}\,n\,P_{n-1}(i\,\mathrm{sh}\,\xi) + B_{n+1}(n+1)P_{n+1}(i\,\mathrm{sh}\,\xi)\right]P_n(\cos\eta), \qquad (7)$$

а также некоторые функциональные соотношения для функций Лежандра с соседними индексами, после ряда преобразований получим решения уравнения Ламе в области V_1 в виде

$$2G\,u_z^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[X_n^{(1)}P_n(i\,\mathrm{sh}\,\xi) + Y_n^{(1)}\alpha_{1n}\right]P_n(\cos\eta);$$
$$2G\,u_r^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[X_n^{(1)}P_n^1(i\,\mathrm{sh}\,\xi) + Y_n^{(1)}\alpha_{2n}\right]\frac{P_n^1(\cos\eta)}{n(n+1)}; \qquad (8)$$

$$X_n^{(1)} = A_n - (2n+1)B_{n-1}\; i\,sh^2\xi\,; \quad Y_n^{(1)} = i\,(B_{n-1} - B_{n+1})\,;$$

$$\alpha_{1n} = sh\,\xi\, ch\,\xi\, P_n^1 + \left[(n+1)ch^2\xi - 2\,\frac{m-1}{m}\right]P_n\,; \quad \alpha_{2n} = n(n+1)\,sh$$

$$\times ch\,\xi\, P_n + \left[n\,ch^2\xi + 2\,\frac{m-1}{m}\right] P_n^1\,; \quad P_n^{\kappa} = P_n^{\kappa}(i\,sh\,\xi),$$

где A_n, B_n – бесконечные последовательности неизвестных коэффициентов; G – модуль сдвига материала. Проекции векто усилий F_n на произвольной поверхности S с заданной норм n определим из равенства [2] :

$$2G\left\{\vec{n}\,\frac{div\,\vec{u}}{m-2} + (\vec{n}\,grad)\vec{u} + \frac{1}{2}\,\vec{n}\times rot\,\vec{u}\right\}_S = \vec{F}_n\;. \quad (9)$$

Рассматривая (9) на поверхности $\xi = const$ с нормалью $\vec{n} = \vec{e}_\xi$ а затем проектируя (9) на оси Oz, Or, получаем:

$$h Z_n^{(1)} = 2G\left\{2\,\frac{m-1}{m}(ch\,\xi\cos\eta\,\theta - sh\,\xi\,\sin\eta\,\omega) - \frac{1}{\sin\eta}\,\frac{\partial(\sin\eta\, u_r}{\partial\eta}\right.$$

$$h R_n^{(1)} = 2G\left\{2\,\frac{m-1}{m}(sh\,\xi\sin\eta\,\theta + ch\,\xi\cos\eta\,\omega) - th\,\xi\, u_r + \frac{\partial u_z}{\partial\eta}\right\};$$

$$h = c\sqrt{ch^2\xi - \sin^2\eta}\;. \quad (10)$$

После подстановки формул (8) в (10) приходим к равенствам:

$$h Z_n^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[X_n^{(1)}\beta_{1n} + Y_n^{(1)}\beta_{2n}\right] P_n(\cos\eta)\,;$$

$$h R_n^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[X_n^{(1)}\beta_{3n} + Y_n^{(1)}\beta_{4n}\right]\frac{P_n^1(\cos\eta)}{n(n+1)}\,; \quad (II)$$

$$\beta_{1n} = P_n^1\,; \; \beta_{2n} = n\,ch\,\xi\left[(n+1)\,sh\,\xi\, P_n + ch\,\xi\, P_n^1\right]; \; \beta_{3n} = n(n+1)\,P_n -$$

$$- th\,\xi\, P_n^1\,; \; \beta_{4n} = n(n+1)(n\,ch^2\xi + 1)\,P_n + (n^2\, sh\,\xi\, ch\,\xi -$$

$$- 2\,\frac{m-1}{m}\,th\,\xi)\,P_n^1\,; \qquad P_n^{\kappa} = P_n^{\kappa}(i\,sh\,\xi)\;. \quad (I2)$$

Выражения для проекции векторов перемещений и усилий в области V_2 получим из (8), (II) путем взаимной замены функций Лежандра первого рода $P_n^{\kappa}(i\,sh\,\xi)$ функциями Лежандра второго рода $Q_n^{\kappa}(i\,sh\,\xi)$, неизвестных коэффициентов A_n, B_n – коэффициентами C_n, D_n, неизвестных $X_n^{(1)}$, $Y_n^{(1)}$ – выражениями $X_n^{(2)}$, $Y_n^{(2)}$. При проектировании равенства (9) на оси Oz, Or необходимо учесть направление внешней нормали.

<u>Приведение задачи к системе парных уравнений.</u> Бесконечные последовательности неизвестных коэффициентов внешней и внутренней задачи будем находить из следующих условий:

$$Z_n^{(1)} = -Z_n^{(2)} = f_1(\eta)\,; \quad R_n^{(1)} = -R_n^{(2)} = f_2(\eta)$$
$$(\xi = \xi_0\,, \; 0 \le \eta < \eta_0)\,; \quad (I3)$$

$$Z_n^{(1)} = -Z_n^{(2)}\,; \; R_n^{(1)} = -R_n^{(2)}\,; \; u_z^{(1)} = u_z^{(2)}\,; \; u_r^{(1)} = u_r^{(2)}$$
$$(\xi = \xi_0\,, \; \eta_0 \le \eta \le \pi)\,. \quad (I4)$$

Условия (I4) соответствуют требованию непрерывности полей напряжений и перемещений на поверхности эллипсоида ($\xi = \xi_0$) вне разреза ($\eta \geqslant \eta_0$), а $f_\kappa(\eta)$ – известные функции, перенесенные на поверхность разреза согласно принципу Бюкнера [4] . Записывая проекции векторов усилий в областях V_1, V_2 в виде равенства (II) и удовлетворяя условию непрерывности полей напряжений на всей поверхности $\xi = \xi_0$, а затем используя свойство ортогональности функций Лежандра на промежутке $[0,\pi]$, приходим к системе алгебраических уравнений относительно $X_n^{(1)}$, $Y_n^{(1)}$, $X_n^{(2)}$, $Y_n^{(2)}$. Реша эту систему, например, относительно $X_n^{(2)}$, $Y_n^{(2)}$, получа

$$X_n^{(2)}=\frac{1}{\Delta_n}[X_n^{(1)}U_{11}+Y_n^{(1)}U_{12}];\quad Y_n^{(2)}=\frac{1}{\Delta_n}[X_n^{(1)}U_{21}+Y_n^{(1)}U_{22}], \quad (\text{I}$$

где $\Delta_n=-n(n+1)ch\,\xi_0[n(n+1)\,sh\,\xi_0(Q_n)^2-sh\,\xi_0(Q_n^1)^2-$

$$-ch\,\xi_0 Q_n Q_n^1]-2\frac{m-1}{m}th\,\xi_0(Q_n^1)^2;\quad Q_n^K=Q_n^K(i\,sh\,\xi_0);$$

$$U_{11}=n(n+1)ch\,\xi_0[sh\,\xi_0 P_n^1 Q_n^1+(n+1)ch\,\xi_0 P_n^1 Q_n-n\,ch\,\xi_0 P$$

$$-n(n+1)sh\,\xi_0 P_n Q_n]-2\frac{m-1}{m}th\,\xi_0 P_n^1 Q_n^1;\quad P_n^K=P_n^K(ish$$

$$U_{12}=-in(n+1)ch\,\xi_0[n(n+1)+2\frac{m-1}{m}th^2\xi_0];\quad U_{21}=in(n+1)ch$$

Выражения для U_{22} находим из U_{11} путем взаимной за ны функций P_n^K и Q_n^K. Заметим, что определитель системы ни при каких действительных $\xi>0$ в нуль не обращается.

Если учесть соотношения (I5) и представить цилиндричес проекции вектора перемещений в области V_2 в виде рядов по функциям Лежандра с неизвестными коэффициентами $X_n^{(1)}$, $Y_n^{(1)}$ а затем удовлетворить условиям (I3),(I4), то придем к следую взаимосвязной системе парных уравнений относительно $X_n^{(1)}$, Y_n

$$\sum_{n=0}^{\infty}[X_n^{(1)}\beta_{1n}+Y_n^{(1)}\beta_{2n}]P_n(\cos\eta)=h_0 f_1(\eta)\quad(0\leq\eta\leq\eta_0);$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[X_n^{(1)}\beta_{3n}+Y_n^{(1)}\beta_{4n}]\frac{P_n^1(\cos\eta)}{n(n+1)}=h_0 f_2(\eta);\qquad (\text{I6})$$

$$\frac{i}{ch\,\xi_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Delta_n}[X_n^{(1)}C_{11}+Y_n^{(1)}C_{12}]P_n(\cos\eta)=0\quad(\eta_0\leq\eta\leq\pi);$$

$$\frac{i}{ch\,\xi_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\Delta_n}[X_n^{(1)}C_{21}+Y_n^{(1)}C_{22}]\frac{P_n^1(\cos\eta)}{n(n+1)}=0,$$

где $C_{11}=n(n+1)Q_n-th\,\xi_0 Q_n^1$; $C_{21}=-n(n+1)Q_n^1$;

$$C_{12}=2\frac{m-1}{m}th\,\xi_0 Q_n^1-(n+1)^2 sh\,\xi_0\,ch\,\xi_0 Q_n^1+n(n+1)[n\,ch^2\xi_0+sh^2\xi_0]Q_n;$$

$$C_{22}=n(n+1)^2 ch\,\xi_0[n\,sh\,\xi_0 Q_n-ch\,\xi_0 Q_n^1];\quad Q_n^K=Q_n^K(i\,sh\,\xi_0);$$

$$h_0=c\sqrt{ch^2\xi_0-\sin^2\eta}.$$

Выражения $\beta_{Kn}(\xi_0)$ определяются равенствами (I2).

Решение взаимосвязной системы парных уравнений. Взаимосвязную систему парных уравнений (I6) будем решать, опираясь на приведенные ниже разрывные суммы и абелевые интегральные представления для полиномов [I] и функций Лежандра [5], [6]:

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\eta)\sin\alpha_n t=\frac{H(t-\eta)}{\sqrt{2\cos\eta-2\cos t}};\quad \alpha_n=n+1/2;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n P_n^1(\cos\eta)}{n(n+1)}\cos\alpha_n t=-\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\,ctg\frac{\eta}{2}+\frac{\sin t\,H(t-\eta)}{\sin\eta\sqrt{2\cos\eta-2\cos t}};\qquad (17)$$

$$P_n(\cos\eta)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\eta}\frac{\cos\alpha_n x\,dx}{\sqrt{2\cos x-2\cos\eta}};$$

$$\frac{\alpha_n P_n^1(\cos\eta)}{n(n+1)}=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\eta}\frac{\sin x\,\sin\alpha_n x\,dx}{\sin\eta\sqrt{2\cos x-2\cos\eta}},$$

где $H(t-\eta)$ – функция Хевисайда.

Согласно методу, изложенному в работах [5], [7], введем интегральные операторы от двух вспомогательных функций:

$$\frac{i}{ch\,\xi_0}\frac{1}{\Delta_n}[X_n^{(1)}C_{11}+Y_n^{(1)}C_{12}]=\int_0^{\eta_0}\varphi(t)\sin\alpha_n t\,dt=I_n^{(1)};$$

$$\frac{i}{ch\,\xi_0}\frac{1}{\Delta_n}[X_n^{(1)}C_{21}+Y_n^{(1)}C_{22}]=\alpha_n\int_0^{\eta_0}\psi(t)\cos\alpha_n t\,dt=I_n^{(2)},\qquad (\text{I8})$$

где $\varphi(t)$ и $\Psi(t)$ – непрерывные функции вместе со с
ми производными на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \eta_0$. Если подчинить ф
цию $\Psi(t)$ интегральному условию

$$\int_0^{\eta_0} \Psi(t) \cos\frac{t}{2}\, dt = 0, \qquad (I$$

то на основании разрывных сумм (I7) интегральные операторы $I_n^{(1)}$, $I_n^{(2)}$ удовлетворяют тождественно последним двум ур
нениям системы (I6).

Решая систему (I8) относительно $X_n^{(1)}$, $Y_n^{(1)}$ и входя
полученными соотношениями в первые два уравнения системы (I
получаем следующие равенства:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [m_{11} I_n^{(1)} + m_{12} I_n^{(2)}] P_n(\cos\eta) = h_0 f_1(\eta); \quad (0 \leqslant \eta < \eta_0);$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} [m_{21} I_n^{(1)} + m_{22} I_n^{(2)}] \frac{\alpha_n P_n^1(\cos\eta)}{n(n+1)} = h_0 f_2(\eta),$$

где

$$m_{11} = -i\,\mathrm{ch}\,\xi_0 [\mathrm{ch}^2 \xi_0 P_n^1 Q_n^1 - n(n+1)\mathrm{sh}\,\xi_0\,\mathrm{ch}\,\xi_0 (P_n Q_n^1 + P_n^1 Q_n)$$
$$m_{12} = -i\alpha_n \mathrm{ch}\,\xi_0 \Big\{\Big[2\frac{m-1}{m}\,\frac{\mathrm{th}\,\xi_0}{n(n+1)} - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\mathrm{sh}\,\xi_0\,\mathrm{ch}\,\xi_0\Big] P_n^1 Q_n^1$$
$$+ \mathrm{sh}^2 \xi_0 (P_n Q_n^1 + P_n^1 Q_n) - n(n+1)\mathrm{sh}\,\xi_0\,\mathrm{ch}\,\xi_0\, P_n Q_n\Big\};$$
$$m_{21} = -i\alpha_n^{-1} \mathrm{ch}\,\xi_0 \Big\{n(n+1)\mathrm{sh}^2 \xi_0 (P_n Q_n^1 + P_n^1 Q_n) - \qquad (2$$
$$-n^2(n+1)^2 \mathrm{sh}\,\xi_0\,\mathrm{ch}\,\xi_0 P_n Q_n + \Big[2\frac{m-1}{m}\mathrm{th}\,\xi_0 - (n^2+n+1)\mathrm{sh}\,\xi_0\,\mathrm{ch}\,\xi_0\Big] P_n Q$$
$$m_{22} = -i\,\mathrm{ch}\,\xi_0 \Big\{2\frac{m-1}{m}\mathrm{th}\,\xi_0 \Big[(P_n Q_n^1 + P_n^1 Q_n) - \frac{2\,\mathrm{th}\,\xi_0}{n(n+1)} P_n^1 Q_n^1\Big] +$$

$$+ \frac{2n^2+2n+1}{n(n+1)}\mathrm{sh}^2 \xi_0 P_n^1 Q_n^1 + n(n+1)(\mathrm{sh}^2 \xi_0 - 1) P_n Q_n -$$
$$-[n(n+1)\mathrm{sh}\,\xi_0\,\mathrm{ch}\,\xi_0 + \mathrm{th}\,\xi_0\,\mathrm{sh}^2 \xi_0](P_n Q_n^1 + P_n^1 Q_n)\Big\}.$$

Если воспользоваться интегральными представлениями функций Лежандра (I7) и в (20) поменять порядки суммирования и интегрирования, то придем к системе интегральных уравнений Абеля:

$$\int_0^{\eta} \frac{dx}{\sqrt{2\cos x - 2\cos\eta}} \Big\{\int_0^{\eta_0} [M_{11}(x,t)\varphi(t) + M_{12}(x,t)\Psi(t)]\,dt\Big\} = h_0 f_1(\eta); \qquad (22)$$
$$\int_0^{\eta} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{2\cos x - 2\cos\eta}} \Big\{\int_0^{\eta_0} [M_{21}(x,t)\varphi(t) + M_{22}(x,t)\Psi(t)]\,dt\Big\} = -h_0 \sin\eta\, f_2(\eta);$$

$$M_{11}(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} m_{11} \cos\alpha_n x\, \sin\alpha_n t;$$
$$M_{12}(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} m_{12} \cos\alpha_n x\, \cos\alpha_n t; \qquad (23)$$
$$M_{21}(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} m_{21} \sin\alpha_n x\, \sin\alpha_n t;$$
$$M_{22}(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} m_{22} \sin\alpha_n x\, \cos\alpha_n t.$$

Суммирование рядов M_{21}, M_{22} начинаем с нуля, что оправдано условием (I9), а также тем, что $m_{21}|_{n=0} = 0$. Асимптотическое поведение выражений m_{nk} при достаточно больших n исследуем на основании асимптотических формул для попарных произведений функций Лежандра первого и второго рода при $n \gg 1$:

$$P_n(i\,\mathrm{sh}\,\xi)\, Q_n(i\,\mathrm{sh}\,\xi) \approx \frac{-i}{2\alpha_n \mathrm{ch}\,\xi}\Big[1 + \frac{t^2-1}{8\alpha_n^2} + \frac{(t^2-1)(27t^2-11)}{128\alpha_n^4}\Big].$$

$$P_n^1(i\,sh\,\xi)\,Q_n(i\,sh\,\xi)\approx\frac{-i}{2ch\,\xi}\left[1-\frac{t}{2\alpha_n}-\frac{3t(t^2-1)}{16\alpha_n^3}-\frac{3t(t^2-1)(45t^2-29)}{256\alpha_n^5}\right.$$

$$P_n^1(i\,sh\,\xi)\,Q_n^1(i\,sh\,\xi)\approx\frac{\alpha_n i}{2ch\,\xi}\left[1+\frac{1-3t^2}{8\alpha_n^2}-\frac{9(t^2-1)(5t^2-1)}{128\alpha_n^4}\right];$$

$$P_n(i\,sh\,\xi)\,Q_n^1(i\,sh\,\xi)\approx\frac{i}{2ch\,\xi}\left[1+\frac{t}{2\alpha_n}+\frac{3t(t^2-1)}{16\alpha_n^3}+\frac{3t(t^2-1)(45}{256\alpha_n}\right.$$

Эти приближенные равенства получе. из следующих представ-
ний функций Лежандра [I] , [8]:

$$P_n^m(z)=\frac{\Gamma(n+m+1)}{\sqrt{2\pi}(z^2-1)^{1/4}\Gamma(n+3/2)}\Big\{(z+\sqrt{z^2-1})^{n+1/2}F\Big(\frac{1}{2}+m;\frac{1}{2}-m;$$

$$\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2\sqrt{z^2-1}}\Big)+i\,e^{-im\pi}(z-\sqrt{z^2-1})^{n+1/2}F\Big(\frac{1}{2}+m;\frac{1}{2}-m;n+\frac{3}{2};\frac{-z+\sqrt{z^2}}{2\sqrt{z^2}}$$

$$Q_n^m(z)=e^{im\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(z^2-1)^{-1/4}(z-\sqrt{z^2-1})^{n+1/2}\,\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+3/2)}\times$$

$$\times F\Big(\frac{1}{2}+m;\ \frac{1}{2}-m;\ n+\frac{3}{2};\ \frac{-z+\sqrt{z^2-1}}{2\sqrt{z^2-1}}\Big),$$

где F – гипергеометрическая функция; $\Gamma(x)$– гамма-функ
Заметим, что характерной особенностью приближенных равенст
является представление правых частей не по степени n, а
степеням $n+1/2$, вследствие чего они компактны и уд
для аналитического анализа рядов (23). Из соотношений (21)
(24) находим асимптотическое поведение выражений m_{yk}
достаточно больших $n>>1$:

$$m_{11}\approx\alpha_n/2+a_{11}\alpha_n^{-1}+a_{12}\alpha_n^{-3}=\bar m_{11};\qquad ($$

$$m_{12}\approx a+a_{13}\alpha_n^{-2}=\bar m_{12};\quad m_{21}\approx a+a_{21}\alpha_n^{-2}=\bar m_{21};$$

$$m_{22}\approx\alpha_n/2+a_{22}\alpha_n^{-1}+a_{23}\alpha_n^{-3}=\bar m_{22},$$

где

$$a_{11}=\frac{1}{16}(1+3t_o^2);\quad a_{12}=\frac{9}{256}(15t_o^4-6t_o^2-1);\quad a=\frac{m-4}{4m};$$

$$a_{13}=\frac{3t_o}{32}\Big(\frac{3m-4}{m}-\frac{9m-4}{m}t_o^2\Big);\quad a_{21}=\frac{t_o}{32}\Big[\frac{7m-4}{m}-\frac{3(9m-4)}{m}t_o^2\Big];$$

$$a_{22}=\frac{1}{16}\Big(\frac{3m+16}{m}t_o^2-3\Big);\quad a_{23}=\frac{3}{256}\Big[\frac{205m-96}{m}t_o^4-6\frac{23m-16}{m}t_o^2+5\Big];$$

$$t_o=th\,\xi_o.$$

Из анализа (23) следует, что ряды M_{yk} расходятся в классе обычных функций и сходятся в классе обобщенных функций [9]. Если воспользоваться рядами такого типа [I0]:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^{-1}\cos\alpha_n t\sin\alpha_n x=\frac{\pi}{2}H(x-t),\qquad(26)$$

а также их производными в классе обобщенных функций [9] , то суммы (23) можно представить в виде

$$\begin{aligned}M_{11}(x,t)&=\frac{1}{2}\delta_t'(t-x)+K_{11}(x,t);\\M_{12}(x,t)&=a\delta(t-x)+K_{12}(x,t);\\M_{21}(x,t)&=a\delta(t-x)-K_{21}(x,t);\\M_{22}(x,t)&=\frac{1}{2}\delta_t'(t-x)-K_{22}'(x,t),\end{aligned}\qquad(27)$$

где

$$K_{11}(x,t)=a_{11}H(t-x)+\pi a_{12}t-\frac{a_{12}}{2}\begin{cases}x^2+t^2 & t>x\\2xt & t<x\end{cases}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(m_{11}-\bar m_{11})\cos\alpha_n x\sin\alpha_n t;$$

$$K_{12}(x,t)=\pi a_{13}-a_{13}\begin{cases}t & t>x\\x & t<x\end{cases}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(m_{12}-\bar m_{12})\cos\alpha_n x\cos\alpha_n t;$$

$$K_{21}(x,t)=a_{21}\begin{cases}x & t>x\\t & t<x\end{cases}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(m_{21}-\bar m_{21})\sin\alpha_n x\sin\alpha_n t;$$

$$K_{22}(x,t)=a_{22}H(x-t)-\pi a_{23}x+\frac{1}{2}a_{23}\begin{cases}x^2+t^2 & x>t\\2xt & x<t\end{cases}-$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(m_{22}-\bar{m}_{22})\sin\alpha_n x \sin\alpha_n t \, .$$

Заметим, что коэффициенты в суммах (28) убывают с ростом n как $O(n^{-4})$ или $O(n^{-5})$.

Решаем уравнения Абеля (22) согласно формулам обращения

$$\int_0^{\eta}\frac{g(x)\,dx}{\sqrt{2\cos x-2\cos\eta}}=f(\eta)\,;\quad g(x)=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^{x}\frac{\sin\eta\, f(\eta)\,d\eta}{\sqrt{2\cos x-2\cos\eta}}$$

После этого, учитывая интегралы от обобщенных функций [9],

$$\int_a^b f(x)\frac{\partial^n}{\partial t^n}\delta(x-t)\,dx=(-1)^n\frac{d^n}{dt^n}f(t)\quad(a<t<b),$$

приходим к следующей системе интегродифференциальных уравнен

$$\frac{1}{2}\varphi'(x)+a\psi(x)+\int_0^{\eta_0}[K_{11}(x,t)\varphi(t)\cdot K_{12}(x,t)\psi(t)]\,dt=g_1(x);$$

$$\frac{1}{2}\psi'(x)-a\varphi(x)+\int_0^{\eta_0}[K_{21}(x,t)\varphi(t)+K_{22}(x,t)\psi(t)]\,dt=g_2(x),$$

где

$$g_1(x)=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^{x}\frac{h_0 f_1(\eta)\sin\eta\,d\eta}{\sqrt{2\cos\eta-2\cos x}}\,;$$

$$g_2(x)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}\int_0^{x}\frac{h_0 f_2(\eta)\sin^2\eta\,d\eta}{\sqrt{2\cos\eta-2\cos x}}\,.$$

Замыкают систему интегродифференциальных уравнений (31) усло

$$\int_0^{\eta_0}\psi(t)\cos\frac{t}{2}\,dt=0\qquad\varphi(0)=0\,.$$

Локальное поле напряжений и перемещений вблизи граничной окру ности эллипсоидального разреза, хотя и можно проанализироват методом, изложенным в работе [5], все же требует отдельного следования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций.- М.: 1952. - 476 с.
2. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. - М.: Гостехиздат, 1955. - 491 с.
3. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. - К.: Наук. думка, 1979.- 264 с.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука, 1966. - 707 с.
5. Мартыненко М.А., Улитко А.Ф. Напряженное состояние вблизи сферического разреза в неограниченной упругой среде. - Прикладная механика, 1978, 14, № 9, с. 15-23.
6. Мартыненко М.А. Решение парных уравнений по полиномам Лежандра первого порядка. - Математическая физика, 1979, № 25, с. 106-109.
7. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. - Л.: Наука, 1977. - 220 с.
8. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. - М.: 1963. - 358 с.
9. Гельфанд И.М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. - М.: Физматгиз, 1958. - 439 с.
10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Ч.1. - М.: Наука, 1981. - 800 с.