О СТРУКТУРЕ УРОВНЕЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ /Трохимчук Ю.Ю.,Сафонов В.М.,-Киев, 1993. - 6 с. -(Препр./АН Украины. Ин-т математики; 93.35)

Исследуется структура уровней функций двух переменных, обладающих $\mathcal{N}$ - свойством и дифференцируемых почти всюду.

Библиогр.: 5 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доцент С.В.Горленко

Утверждено к печати ученым советом
Института математики АН Украины

Пусть $Q = J^2 \equiv \{[0,1]\times[0,1]\}$ единичный квадрат в плоскости Будем рассматривать действительную функцию $u = f(x,y)$, которая обладает следующими свойствами:

1) почти всюду дифференцируема по x и по y,
2) обладает N -свойством на почти всех горизонтальных и вертикальных прямых $x, y = const$.

Назовём такую функцию $\mathcal{D}N$ -функцией.

Обозначим через E_t уровень функции f, соответствующий значению t, то есть множество тех точек из Q, где $f(z) = t$

Через $\chi(E) = \chi_1(E)$ мы обозначим линейную меру Хаусдорфа множества

Т е о р е м а I. Пусть f – непрерывная функция и G – множество тех точек, в которых f дифференцируема и $grad f = 0$ Пусть T – множество тех t на оси Ou, для которых $\chi(E_t \cap G) > 0$. Тогда $mes T = 0$

Легко убедиться, что доказательство теоремы I аналогично приведенному в [2]. В этой же работе доказана теорема о структуре компонент уровней для случая дифференцируемых функций. Оказывается, что эта же теорема справедлива и для $\mathcal{D}N$ -функции, что мы и покажем в этой статье.

Пусть f, определенная на Q, есть $\mathcal{D}N$ -функция. Будем говорить, что значение $y = y_0$ регулярно, если функция $f(x, y_0)$ /одного переменного/ почти всюду дифференцируема и обладает N -свойством ; аналогично для случая $x = x_0$.

Л е м м а. Обозначим через T_{y_0} множество таких t на оси Ou, что найдется точка $(x, y_0) \in E_t$, для которой выполнено одно из условий:

1. Частная производная f'_x не существует.
2. Частная производная f'_x существует и равна нулю.

Тогда, если значение y_0 регулярно, то $mes T_{y_0} = 0$

Такое же утверждение имеет место и для множеств T_{x_0}

определяемых аналогично.

Доказательство. Пусть значение y_0 регулярно. Тогда функция $f(x,y_0)$, как функция от x, дифференцируема почти всюду и обладает N - свойством. Обозначим через $\mathcal{Y}_{y_0}$ множество точек, где функция $f(x,y_0)$ не имеет производной : $mes\,\mathcal{Y}_{y_0}=0$. Функция $f(x,y_0)$ отобразит множество $\mathcal{Y}_{y_0}$ на множество $\tilde{T}_{y_0}$ оси Ou также меры нуль.

Пусть, далее, H_{y_0} -множество тех точек $x\in[0,1]$, в которых $f'_x(x,y_0)=\frac{df(x,y_0)}{dx}$ существует и обращается в нуль. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$.
Для произвольной точки $x\in H_{y_0}$ найдется $\delta_x=\delta(x)>0$ такое, что для всех $x'\in[x-\delta_x, x+\delta_x]$ имеем

(I) $\omega(f,x)<\varepsilon\,\delta_x$,

где $\omega(f,x)$ - колебание f на $[x-\delta_x, x+\delta_x]$.
Другими словами, H_{y_0} покрыто отрезками $[x-\delta_x, x+\delta_x]$ в смысле Витали. Найдется поэтому система $\{\sigma(x)\}=\{[x_k-\delta_{x_k}, x_k+\delta_{x_k}]\}$ непересекающихся отрезков , которая покрывает почти все множества H_{y_0}, т.е. $H_{y_0}=[\sigma(x)\cap H_{y_0}]\cup H'_{y_0}$, где $mes\,H'_{y_0}=0$.

Обозначим через $\hat{T}_{y_0}$ образ множества $[\sigma(x)\cap H_{y_0}]$ при отображении f: $\hat{T}_{y_0}=f([\sigma(x)\cap H_{y_0}])$. Учитывая, что $\sum_k\delta_{x_k}\le 1$, суммируем (I) по k

(2) $\sum_k \omega(f,x_k)\le\varepsilon$

Но левая часть неравенства (2) не меньше, чем мера образа покрытия множества H_{y_0} системой $\sigma(x)$. Значит, $mes\,\hat{T}_{y_0}\le\varepsilon$. Из произвольности ε следует, что $mes\,\hat{T}_{y_0}=0$.

Из всего предыдущего следует, что мера множества T_{y_0}, которое является объединением множеств $\tilde{T}_{y_0}$, $\hat{T}_{y_0}$, $f(H'_{y_0})$, равна нулю : $mes\,T_{y_0}=0$.
Аналогичное доказательство имеет место для множества T_{x_0}.

Обозначим через $W_1(t)\subset E_t$ множество точек, для которых выполнено одно из условий леммы относительно переменной y, аналогично определим множество $W_2(t)\subset E_t$, заменив y на x.

Следующая теорема даст нам возможность привести характеристику компонент для почти всех уровней $\mathcal{D}N$-функций.

Т е о р е м а 2. Пусть f есть функция, заданная на Q и m, и M – ее инфимум и супремум.

Тогда множество T^* тех $t \in [m,M]$, для которых проекция $W_1(t)$ на ось Ox, а также проекция $W_2(t)$ на ось Oy имеют меру нуль, является множеством полной меры на $[m,M]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Рассмотрим систему ℓ_c прямых $x=c$, параллельных оси Oy. Пусть T_c – множество таких уровней t, что пересечение $E_t \cap \ell$ содержит точку, в котрой выполнено условие I или 2. По лемме множество T_c имеет меру нуль для почти любого c.

Пусть P – множество точек (x_0, t_0) в плоскости (x,u) таких, что пересечение $E_t \cap \ell_c$ содержит точку, в которой выполнено условие I и 2.

Воспользуемся отображением $\varphi(x,y) = x + i f(x,y)$; при этом плоскость xOy мы рассматриваем как комплексную плоскость. Это отображение представляет собой проекцию поверхности, определяемой функцией f на плоскость (x,u). Нетрудно показать, что отображение φ обладает плоским N –свойством.

В самом деле, легко видеть, что произвольное замкнутое множество $P \subset Q$ меры нуль отображается в замкнутое множество плоскости (x,u) также меры нуль; действительно, это следует из того, что почти каждое сечение P замкнуто и меры нуль, и на почти каждом сечении f обладает N-свойством. Отсюда следует, что почти каждое сечение замкнутого множества $\varphi(P)$ имеет меру нуль, и $\varphi(P)$ –меры нуль. Используя рассуждения Лузина, приведенные в [3], нетрудно теперь показать, что образ каждого множества меры нуль в Q при отображении φ имеет меру нуль в плоскости (x,u).

Так как указанное выше множество P имеет меру нуль, то при отображении φ оно отображается на плоскость (x,u) во множество меры нуль. Следовательно, отрезок $[m,M]$ содержит множество T_1 полной меры такое, что каждая прямая $u=t_0$ пересекается с P по множеству меры нуль.

Рассматривая систему ℓ_c прямых $y=c$, параллельных оси Ox, приходим к множеству T_2, также полной меры на $[m, M]$. Множество $T^* = T_1 \cap T_2$ и будет удовлетворять условиям теоремы.

Теперь мы покажем, что у $\mathcal{DN}$- функции двух переменных почти все компоненты уровня локально связаны.

Т е о р е м а 3. Пусть f есть $\mathcal{DN}$- функция, заданная на Q и T^*-множество, определенное в формулировке теоремы 2. Тогда для каждого $t \in T^*$ все компоненты уровня E_t локально связаны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть K - некоторая E_t компонента, не локально связана. Тогда K содержит континуум конденсации K', т.е. существует сходящаяся последовательность подконтинуумов K_n, $K_n \cap K_m = \phi, (m \neq n), d(K_n) \geq \delta_0 > 0, \lim_{n\to\infty} K_n = K'$

Возьмем две точки z_1 и z_2, принадлежащие K'. По крайней мере, две из координат z_1, z_2 различны; пусть, для определенности $Re\, z_1 = x_1 < x_2 = Re\, z_2$. Тогда для любой прямой ℓ_{x_0} $(x = x_0, x_1 < x_0 < x_2)$ существует последовательность $(x_0, y_n) \in K_n$, сходящихся к точке $(x_0, y_0) \in K'$. Поэтому частное производное число по y функции во всех точках конденсации равно нулю, и производная функции f по y либо не существует, либо существует и равна производному числу, т.е. нулю.

Но часть континуума K', находящаяся между точками z_1 и z_2, проектируется на множество оси Ox, содержащее полный отрезок $[x_1, x_2]$.

Это противоречит утверждению теоремы 2.

В дальнейшем воспользуемся результатами, изложенными в работах П.С.Урысона о локально связанных континуумах. Из них следует следующее утверждение:
Ограниченный локально связанный континуум, не являющийся простой дугой или гомеоморфом окружности, содержит точки ветвления.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству основной теоремы.

Т е о р е м а 4. Пусть f есть $\mathcal{DN}$-функция и $T^* \subset [m, M]$ множество, определенное в теореме 2. Тогда, при $t \in T^*$ все уровни E_t содержат лишь следующие компоненты :

1) гомеоморфы окружностей;
2) простые дуги /с концами на границе/;
3) точки.

При этом для каждого $t \in T^*$ множество одноточечных компонент проектируется на оси Ox и Oy во множество меры нуль.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z = x + iy$ - одноточечная компонента уровня E_t. Тогда в z либо обе частные производные обращаются в нуль, либо не существуют. Согласно теореме 2, множество всех таких z для любого уровня E_t проектируется на оси Ox и Oy во множества меры нуль. Далее, согласно теореме 3 выделим множество $\tilde{T}$ уровней на оси Ou, для которых любая компонента локально связана. Известно, что система непересекающихся континуумов на плоскости, содержащих точки ветвления, не более чем счетна. Обозначим через N - множество уровней, которые имеют точки ветвления. Пусть $T^* = \tilde{T} \setminus N$. Тогда, используя утверждение Урысона, заключаем, что для всех $t \in T^*$ уровни E_t содержат в качестве компонент лишь гомеоморфы окружностей, простые дуги и одноточечные компоненты.

Частным случаем $\mathcal{DN}$-функции являются функции, удовлетворяющие условию Липшица.
Для липшицевых функций имеет место
С л е д с т в и е. Пусть $f \in Lip$ определена на G. Тогда почти все уровни E_t состоят из компонент, которые являются
1) гомеоморфами окружностей;
2) простыми дугами, либо;
3) точками.
Для почти каждого уровня E_t множество одноточечных компонент проектируется на каждую прямую / в плоскости xOy / во множество меры нуль.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Федерер Г. Геометрическая теория меры.- М.: Наука, I987. - 760 с.

2. Кронрод С.А. О функциях двух переменных // Успехи мат. наук.- 5, № I.- С. 24-I34.

3. Лузин Н.Н. Интеграл и тригонометрический ряд. - М.; Л.:Гостехиздат, I95I. -550 с.

4. Урысон П.С. Труды по топологии и другим областям математики: В 2 т. - М.: Гостехиздат, I95I.- Т.2. - 99Iс.

5. Сакс С. Теория интеграла. - М.: Изд.иностр.лит., I949. - 494 с.

Научное издание

ТРОХИМЧУК Юрий Юрьевич

САФОНОВ Владимир Михайлович

О СТРУКТУРЕ УРОВНЕЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Редактор Н.И.Коваленко

Подп.в печ. 22.06.95 Формат 60х84/16 Бумага тип. Офс.печать.
Усл.печ.л. 0,7. Усл. кр.-отт. 0,7. Уч.-изд.л. 0,3.
Тираж 70 экз. Зак. 321

Подготовлено и отпечатано в институте математики АН Украины
252601 , Киев - 4 , ГСП , ул.Терещенковская , 3