

О.П. ЛОБОК, кандидат фізико-математичних наук
Б.М. ГОНЧАРЕНКО, доктор технічних наук
Національний університет харчових технологій

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ АСИМПТОТИЧНО СТІЙКИХ СПОСТЕРІГАЧІВ НЕПОВНОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ БАГАТОВИМІРНИХ ОБ'ЄКТІВ

В даній роботі розв'язується задача побудови оптимальних спостерігаючих пристроїв неповного порядку у розвиток попередніх робіт стосовно повного порядку. Критерієм оптимальності є функціонал похибок оцінювання вектора стану багатовимірних об'єктів керування. Спостерігачі представлені у вигляді деяких систем звичайних диференціальних рівнянь, порядок яких менший від порядку об'єкта керування.

Ключові слова: оцінка стану, оптимізація, спостерігач неповного порядку, принцип максимума Понтрягіна, метод множників Лагранжа.

В данной работе решается задача построения оптимальных наблюдающих устройств неполного порядка в развитие предыдущих работ, касавшихся полного порядка. Критерием оптимизации является функционал ошибок оценивания вектора состояния многомерного объекта управления. Эти наблюдатели представлены в виде некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений, порядок которых меньше порядка объекта управления.

Ключевые слова: оценка состояния, оптимизация, наблюдатель неполного порядка, принцип максимума Понтрягина, метод множителей Лагранжа.

Синтез спостерігаючих пристроїв є однією з важливих задач теорії оптимального керування, від якісного розв'язання якої залежить точність регулювання багатопараметричних об'єктів. Відомі підходи до розв'язання цієї задачі дозволяють будувати асимптотично стійкі спостерігачі повного та неповного порядку, матриці підсилення яких вибираються неоднозначно [1,5,6]. Зауважимо, що задача побудови редукованих, тобто пониженого порядку, спостерігаючих пристроїв розглядалась ще Люенбергером [6], який запропонував конструктивний підхід для їх побудови, причому характеристичні числа спостерігача, що визначають швидкість згасання похибки спостереження, можна було брати довільно. Ці спостерігачі на жаль не є оптимальними.

В даній роботі пропонується алгоритм синтезу оптимальних редукованих спостерігачів, які мінімізують функціонал похибок оцінювання вектора стану об'єкта при скінченному та нескінченному часі спостереження. Тобто, розглядається задача оптимального оцінювання частини невимірюваних координат (параметрів) вектора стану за умови, що інша частина координат доступна для вимірів.

Отже, нехай деякий узагальнений багатопараметричний динамічний об'єкт описується наступною системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), & t_0 < t \leq T, \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad (1)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ — n — вимірний вектор параметрів стану об'єкта, (тут і далі «Т» — операція транспонування вектора або матриці), A — матриця розмірності $n \times n$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ — m — вимірний вектор керування, B — матриця розмірності $n \times m$, що визначає канали керування, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$ — початковий вектор стану об'єкта, t_0 , T — початковий та кінцевий момент часу спостереження за параметрами об'єкта.

Допустимі спостереження за параметрами стану об'єкта опишемо наступною моделлю

$$y(t) = Cx(t), \quad t_0 < t \leq T, \quad (2)$$

де $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)^T$ — вектор результатів вимірів (спостереження) за деякими параметрами об'єкта, C — задана матриця спостереження розмірності $p \times n$, яка визначає множину вимірюваних параметрів або їх комбінацію.

Задача полягає в тому, щоб за результатами вимірів (2), відновити всі параметри об'єкта, тобто знайти оцінку $\hat{x}(t)$ вектора стану $x(t)$, яка з плином часу наближалась би до вектора $x(t)$, тобто з умови $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Для розв'язання цієї задачі можна використати спостерігачі повного порядку [1]. Але приймаючи до уваги те, що частина

параметрів або їх комбінацій вже відомі зі спостережень (2), доцільно будувати оптимальні редуковані спостерігачі, тобто неповного або пониженого порядку. Для цього розглянемо вектор розмірності $(n-p)$ невимірюваних координат або їх комбінацій, який позначимо через $r(t)$ і представимо у вигляді

$$r(t) = Dx(t), \quad (3)$$

де D — відома (задана) матриця, за допомогою якої можна сформувати вектор $r(t)$ невимірюваних координат вектора стану $x(t)$. Тоді одержимо

$$\begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} x, \text{ звідки } x = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} \text{ за припущення, що}$$

матриця $L = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}^{-1}$ існує.

Позначимо через $L = [L_1 : L_2]$, де L_1, L_2 — блочні прямокутні матриці розмірностей відповідно $n \times p$ та $n \times (n-p)$. Тоді будемо мати

$$x = L \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} = [L_1 : L_2] \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} = L_1 y + L_2 r.$$

Використовуючи останнє співвідношення, а також рівняння (1)-(3), знайдемо рівняння для вектора $r(t)$

$$\frac{dr(t)}{dt} = DAL_1 y(t) + DAL_2 r(t) + DBu(t). \quad (4)$$

Щоб визначити вектор спостереження для системи (4), продиференціюємо рівняння спостереження (2)

$$\frac{dy(t)}{dt} = C \frac{dx(t)}{dt} = CAL_1 y(t) + CAL_2 r(t) + CBu(t). \quad (5)$$

Якщо ввести позначення

$$y_r(t) = \frac{dy(t)}{dt} - CAL_1 y(t) - CBu(t), \quad Cr = CAL_2, \quad (6)$$

то з (5) одержимо

$$y_r(t) = C_r r(t). \quad (7)$$

Спостерігач для вектора $r(t)$ можна побудувати за аналогією з математичною моделлю (4), (7) цього вектора, тобто у вигляді спостерігача повного порядку виду

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{r}(t)}{dt} = DAL_2 \tilde{r}(t) + DAL_1 y(t) + DBu(t) + K(y_r(t) - C_r \tilde{r}(t)), \\ \tilde{r}(t_0) = \tilde{r}^0, \end{cases}$$

де K — матриця підсилення спостерігача розмірності $(n-p) \times p$, $\tilde{r}^0$ — заданий початковий стан спостерігача.

Враховуючи (6), останнє рівняння можна представити у вигляді

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{r}(t)}{dt} = (D-KC)AL_2 \tilde{r}(t) + (D-KC)AL_1 y(t) + (D-KC)Bu(t) + K \frac{dy(t)}{dt}, \\ \tilde{r}(t_0) = \tilde{r}^0. \end{cases}$$

Щоб уникнути необхідності диференціювання в правій частині останнього рівняння вектора спостереження $y(t)$, зробимо заміну змінних

$z(t) = \tilde{r}(t) - Ky(t)$, після чого одержимо рівняння для $z(t)$

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} = (D-KC)AL_2 z(t) + (D-KC)A(L_1 + L_2 K)y(t) + (D-KC)Bu(t), \\ z(t_0) = \tilde{r}^0 - Ky(t_0). \end{cases} \quad (8)$$

Таким чином, оцінка вектора $r(t)$ має вид

$$\tilde{r}(t) = z(t) + Ky(t), \quad (9)$$

де $z(t)$ — є розв'язком рівняння (8), а оцінка вектора стану об'єкта $x(t)$ буде визначатись за формулою

$$\hat{x}(t) = L_1 y(t) + L_2 \tilde{r}(t). \quad (10)$$

Використовуючи співвідношення (4), (9) та (8), знайдемо рівняння, якому задовольняє динамічна похибка оцінювання невимірюваних параметрів вектора стану об'єкта $e(t) = r(t) - \tilde{r}(t)$

$$\begin{cases} \frac{de(t)}{dt} = (D-KC)AL_2 e(t), \\ e(t_0) = e^0, \end{cases} \quad (11)$$

де $e^0 = r(t_0) - \tilde{r}(t_0) = Dx(t_0) - \tilde{r}(t_0) = Dx^0 - \tilde{r}^0$.

Матрицю підсилення K зазвичай шукають з умови забезпечення асимптотичної стійкості рівняння похибки оцінювання спостерігача (11). Асимптотична стійкість системи диференціальних рівнянь (11) може бути забезпечена при виборі такої матриці K , при якій матриця $(D-KC)AL_2$ буде мати власні значення з від'ємними дійсними частинами [5,6]. Деякі підходи для визначення матриці K розглянуті в роботах [1,3,5,6].

Для побудови оптимального редукованого спостерігача використаємо наступний критерій — інтегральну квадратичну похибку оцінювання вектора стану $x(t)$

$$I_1(K) = \int_{t_0}^T (x(t) - \hat{x}(t))^T P_1(t) (x(t) - \hat{x}(t)) dt + (x(T) - \hat{x}(T))^T Q_1 (x(T) - \hat{x}(T)) \quad (12)$$

або функціонал похибки оцінювання вектора невимірюваних параметрів $r(t)$

$$I_2(K) = \int_{t_0}^T (r(t) - \tilde{r}(t))^T P_2(t) (r(t) - \tilde{r}(t)) dt + (r(T) - \tilde{r}(T))^T Q_2 (r(T) - \tilde{r}(T)), \quad (13)$$

де $P_i(t), Q_i, i=1,2$ — задані симетричні додатно визначені вагові матриці відповідних розмірностей.

Неважко показати, що ці функціонали можна представити у вигляді

$$I(K) = \int_{t_0}^T e^T(t) P(t) e(t) dt + e^T(T) Q e(T), \quad (14)$$

де $e(t)$ — розв'язок рівняння (11), матриці $P(t) = P_1(t)$, $Q = Q_1$ розмірності $n \times n$ — для критерія (12), матриці $P(t) = L_2^T P_2(t) L_2$, $Q = L_2^T Q_2 L_2$ розмірності $(n-p) \times (n-p)$ — для критерія (13).

Таким чином, приходимо до задачі знаходження оптимальної матриці підсилення K_{opt} спостерігача (9), (8), з умови

$$I(K_{opt}) = \min_K I(K) \quad (15)$$

на розв'язках рівняння (11).

Спостерігаючий пристрій (9), (8) з матрицею $K=K_{opt}$ будемо називати оптимальним, якщо матриця підсилення K вибирається з умови (15).

Використовуючи результати роботи [3], можна критерій (14) представити у вигляді

$$I(K) = (e^0)^T H(t_0) e^0, \quad (16)$$

де $H(t)$ — симетрична додатно визначена матриця, яка є розв'язком наступного матричного диференціального рівняння

$$\begin{cases} \frac{dH(t)}{dt} = -L_2^T A^T (D - KC)^T H(t) - H(t) (D - KC) A L_2 - P(t), \\ H(T) = Q. \end{cases} \quad (17)$$

Таким чином, початкова задача синтезу оптимального редукованого спостерігача зводиться до задачі оптимального вибору матриці K з умови мінімізації критерію (16) на розв'язках рівняння (17). Аналіз цієї задачі показує, що $I(K) \rightarrow 0$ при $K \rightarrow \infty$, тобто ця задача є некоректною. У зв'язку з цим, модифікуємо критерій (16), а саме, доповнимо його доданком, який буде відігравати роль обмеження на матрицю K , тобто розглянемо критерій

$$I(K) = (e^0)^T H(t_0) e^0 + \int_{t_0}^T \text{tr} [K^T(t) G(t) K(t)] dt, \quad (18)$$

де $\text{tr}[\dots]$ — слід матриці, тобто сума її діагональних елементів [2], $G(t)$ — задана вагова матриця.

Використовуючи матричний варіант принципу максимуму Понтрягіна [4] і техніку матричного диференціювання [2], одержимо розв'язок оптимізаційної задачі (17), (18) у вигляді

$$K_{opt} = G^{-1} H \Lambda (C A L_2)^T, \quad (19)$$

де симетричні додатно визначені матриці H та Λ є розв'язками наступної системи спряжених матричних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} = -\Psi^T H - H \Psi - P, & H(T) = Q, \\ \frac{d\Lambda}{dt} = \Psi \Lambda + \Lambda \Psi^T, & \Lambda(t_0) = e^0 (e^0)^T, \end{cases} \quad (20)$$

в якій матриця $\Psi = (D - G^{-1} H \Lambda (C A L_2)^T C) A L_2$.

Зауваження. Якщо в якості вагової матриці G покласти $G=H$, то $K_{opt} = \Lambda (C A L_2)^T$, де $\Lambda = \Lambda(t)$ — розв'язок матричного диференціального рівняння типу Ріккати

$$\begin{cases} \frac{d\Lambda(t)}{dt} = (D A L_2) \Lambda(t) + \Lambda(t) (D A L_2)^T - \Lambda(t) (C A L_2)^T (C A L_2) \Lambda(t), \\ \Lambda(t_0) = e^0 (e^0)^T. \end{cases} \quad (21)$$

Можна показати [3], що розв'язок останнього рівняння (21) можна представити у вигляді, $\Lambda = l(t) l^T(t)$ де $l(t)$ задовольняє наступній векторній системі звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dl(t)}{dt} = \left(D - \frac{1}{2} l(t) l^T(t) (C A L_2)^T C \right) A L_2 l(t), \\ l(t_0) = e^0. \end{cases} \quad (22)$$

Розглянемо тепер випадок нескінченного часу спостереження, тобто коли $T \rightarrow \infty$ і вагова матриця $Q=0$. Можна показати, що $H(t) \equiv H = \text{const}$, причому H задовольняє наступному матричному алгебраїчному рівнянню

$$L_2^T A^T (D - KC)^T H + H (D - KC) A L_2 + P = 0, \quad (23)$$

а критерій (14) набуває вигляду

$$I(K) = (e^0)^T H e^0. \quad (24)$$

Оптимізаційна задача з критерієм (24) та з обмеженнями (23) також є некоректною. Тому розглянемо такий критерій якості оцінювання вектора стану об'єкта

$$I(K) = (e^0)^T H e^0 + \text{tr} [K^T G K], \quad (25)$$

який обмежує нескінченне зростання коефіцієнтів матриці підсилення K , де G — відома вагова матриця.

Оптимізаційна задача (25), (23) відноситься до класу задач нелінійного програмування з обмеженнями-рівностями. Використовуючи для її розв'язання метод множників Лагранжа, необхідні та достатні умови екстремуму функцій багатьох змінних і матричний апарат диференціювання [2], одержимо шукану оптимальну матрицю підсилення спостерігача K у вигляді $K_{opt} = G^{-1} H \Lambda (C A L_2)^T$, де матриці H і Λ є розв'язками наступної системи матричних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} \Psi^T H + H \Psi + P = 0, \\ \Psi \Lambda + \Lambda \Psi^T + e^0 (e^0)^T = 0, \end{cases} \quad (26)$$

в якій $\Psi = (D - G^{-1} H \Lambda (C A L_2)^T C) A L_2$.

Зауваження. Якщо покласти $G=H$, то $K_{opt} = \Lambda (C A L_2)^T$, де Λ — симетрична додатно визначена матриця — розв'язок матричного алгебраїчного рівняння типу Ріккати виду

$$(D A L_2) \Lambda + \Lambda (D A L_2)^T - \Lambda (C A L_2)^T (C A L_2) \Lambda + e^0 (e^0)^T = 0. \quad (20)$$

За допомогою математичного пакету MatLab проводилась числова реалізація побудованих оптимальних спостерігачів неповного порядку та обчислювальні експерименти з ними при наступних даних:

$$A = \begin{pmatrix} 0.6431 & 1.9466 & 5.5803 \\ -1.4277 & -1.2137 & -7.6787 \\ -1.7138 & 4.8931 & 0.1606 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T, \quad x^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1.5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{r}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, тобто невимірюваними є компоненти $x_2(t)$ та $x_3(t)$ вектора стану $x(t)$, $P = \text{diag}(1, 1)$ —

одичинна матриця, $Q = \text{diag}(0, 0)$ — нульова матриця, $u(t) = 0, 2$, $t_0 = 0$, $T = 10$, $y(t) = x_1(t)$, тобто спостерігається тільки перший параметр об'єкта (а інші параметри — недосяжні для вимірів).

Обчислення проводились для скінченного та нескінченного часу спостереження. Для скінченного часу

спостереження одержали таке мінімальне значення критерію (18) $I_{\min}=0,5037$ при оптимальній вектор-функції підсилення спостерігача K_{opt} , графіки компонент якого зображені на рис. 1.

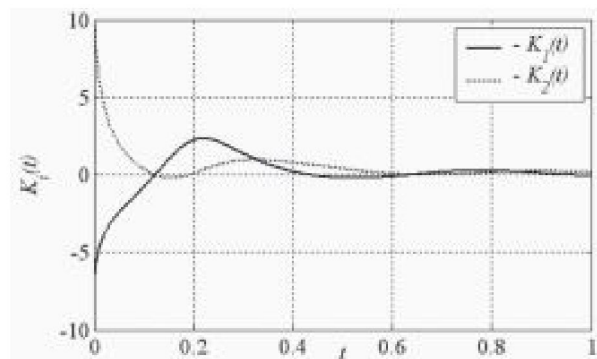
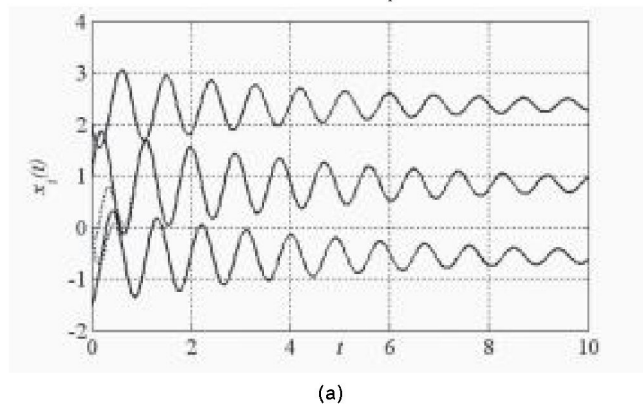
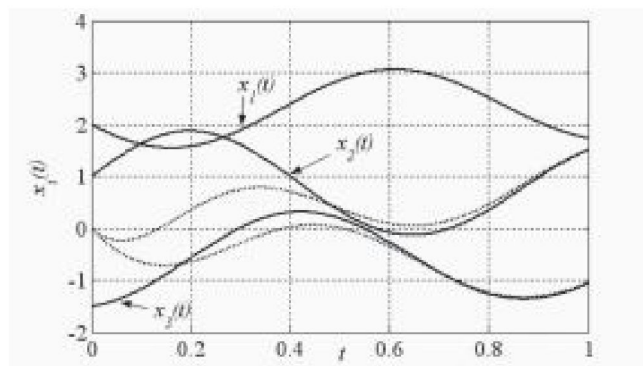


Рис. 1. Графіки компонент оптимального вектора підсилення редукованого спостерігача при скінченому часі спостереження

Для нескінченного часу спостереження мінімальне значення критерію (25) дорівнює $I_{\min}=1,0747$ і одержане при оптимальному векторі підсилення спостерігаючого пристрою $K_{\text{opt}}=(0,9401; 1,0459)^T$.



(а)



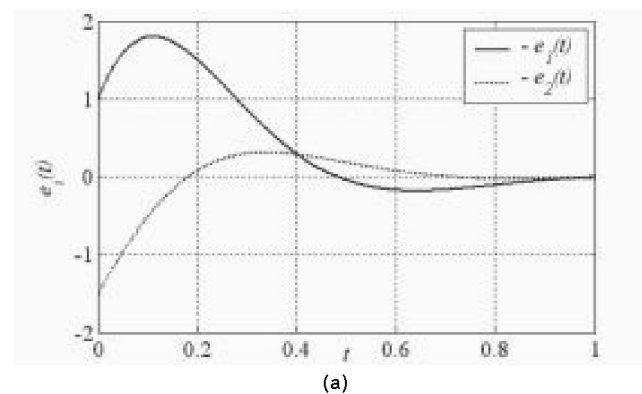
(б)

Рис. 2. Графіки параметрів стану об'єкта (суцільна лінія) та їх оцінки (пунктирна лінія) на всьому (а) та на початковому (б) часовому проміжку при нескінченому часі спостереження

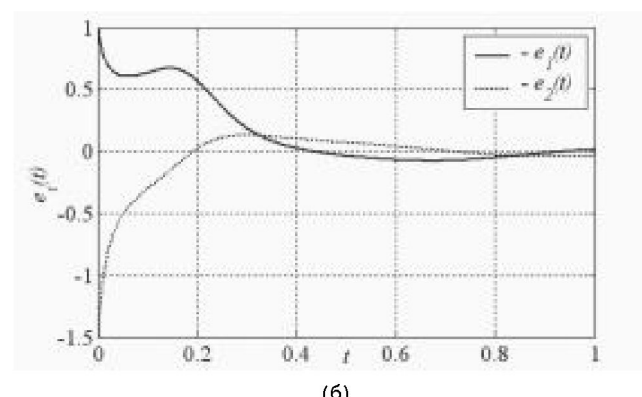
Нижче наведені графіки компонентів вектору стану $x(t)$, їх оцінки $\hat{x}(t)$ (Рис. 2) та динамічні похибки $e(t)$ оцінювання вектору стану (Рис. 3) при скінченому та нескінченому часі спостереження.

Обчислювальні експерименти показали суттєву перевагу оптимальних редукованих спостерігачів при скінченому часі спостереження у порівнянні з

редукованими спостерігачами при нескінченому часі спостереження.



(а)



(б)

Рис. 3. Графіки динамічних похибок оцінювання параметрів стану для нескінченного (а) та скінченного (б) часу спостереження

Висновки. Побудовані оптимальні редуковані спостерігачі (особливо із скінченим часом спостереження) дозволяють забезпечити швидке згасання динамічної похибки оцінювання вектору стану об'єкта і можуть бути використані для побудови регуляторів, які в свою чергу забезпечують бажані якісні показники перехідних процесів параметрів об'єкта керування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. — М.: Высшая школа, 1989. — 263 с.
2. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров. — М.: Статистика, 1979. — 349 с.
3. Гончаренко Б.М., Лобок О.П. Синтез оптимальных спостерігачів повного порядку для багатовимірних об'єктів. — К.: НУХТ, Харч. пром-сть, 2008.
4. Кириченко Н.Ф. Введение в теорию стабилизации движения. — К.: Выща школа, 1978. — 184 с.
5. Рей У. Методы управления технологическими процессами. — М.: Мир, 1983. — 368 с.
6. Тютюнник А.Г. Оптимальні і адаптивні системи автоматичного керування. — Житомир.: ЖІТІ, 1998. — 512 с.

Одержана редколлегиею 07.06.08 р.