

В.С. ГУЦЬ, доктор технічних наук
О.А. КОВАЛЬ, кандидат технічних наук
Національний університет харчових технологій

МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ КОНСИСТЕНЦІЇ ХАРЧОВИХ ДИСПЕРСНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕНЕТРАЦІЇ

Наведено нову методику дослідження консистенції харчових дисперсних систем, в основі якої лежить гравітаційна пенетрація. Розглянуто варіант, коли індентор має форму голки. Отримано нові математичні моделі руху індентора, аналіз і оптимізація яких проведені з використанням методів символічної комп'ютерної математики "Merple". Адекватність теоретичних досліджень підтверджено експериментально.

Ключові слова: консистенція, моделювання структурно-механічних властивостей, пенетрація.

Представлена новая методика исследования консистенции пищевых дисперсных систем, в основе которой лежит гравитационная пенетрация. Рассмотрен вариант, когда индентор имеет форму иглы. Получены новые математические модели движения индентора, анализ и оптимизация которых проведены с использованием методов символической компьютерной математики "Merple". Адекватность теоретических исследований подтверждена экспериментально.

Ключевые слова: консистенция, моделирование структурно-механических свойств, пенетрация.

У харчовій технології у процесі виробництва, пакування, зберігання відбуваються зміни структурно-механічних властивостей сировини, напівфабрикатів, готових виробів. Знаючи характер цих змін, можна контролювати хід технологічного процесу, реалізуючи його в оптимальному режимі. Харчові дисперсні системи у вигляді сировини, напівпродуктів, готових виробів мають різні структуру, хімічний склад та фізичні властивості, котрі в сукупності визначають якість готової продукції, впливають на енергетичні характеристики процесів оброблення сировини, роботу технологічного обладнання.

Досить об'єктивно якість продукту можна характеризувати за його фізичним станом, що залежить від хімічного складу і визначається внутрішньою структурною будовою. Тому, до основних характеристик продукту відносять структурно-механічні. Механічний і фізичний вплив має місце практично в більшості технологічних процесів, коли робочі органи технологічного і пакувального обладнання контактують із продуктом або відбувається зміна температури, вологості, тиску та інших факторів технологічного процесу.

Для контролю структурно-механічних властивостей харчових продуктів широко використовують віскозиметри, адгезіометри, консистометри, пенетрометри та інші прилади. Вони можуть бути різні за конструкцією і бути основою контрольно-вимірювальних комплексів. Ефективна робота останніх досягається використанням досконалих вимірювальних приладів, математичних моделей і сучасної комп'ютерної техніки, потрібних для опрацювання достовірних результатів.

Прилади контролю структурно-механічних властивостей харчових продуктів поділяють на три групи.

До першої належать універсальні. Їх використовують для науково-дослідних цілей. Вони дають змогу визначати комплекс властивостей, з яких вибирають характеристику, чутливішу до конкретних технологічних умов або поширену в практиці. Ці прилади, в основному, стаціонарні, громіздкі, матеріаломісткі й дорогі. До них можна віднести такі, принцип роботи яких базується на вимірюванні зусиль різання, переміщення, деформування зразків досліджуваного продукту. Зусилля, потрібне для руйнування, різання, деформування, від спеціального робочого органа передається на тензобалку або інший аналогічний за призначенням датчик. У результаті деформування останнього змінюються характеристики сигналів у електронній системі вимірювань, які в подальшому підсилюються і подаються на показувальний чи реєструвальний прилад. Кінцевий результат, як правило, отримують в числовому чи графічному вигляді. До універсальних приладів можна віднести досліджувальну систему "Інстрон", віскозиметричні комплекси на базі капілярних або ротаційних віскозиметрів, структурометри з реєструвальною апаратурою і мікро-ЕОМ та інші. Універсальні прилади дають можливість багатофакторного всебічного дослідження.

До другої групи належать персональні вимірювальні прилади. Їх використовують для контролю структурно-механічних властивостей продукту в умовах виробництва. На практиці з їх допомогою найчастіше визначають консистенцію, під якою слід розуміти, передовсім, реологічні характеристики продукту. Персональні вимірювальні прилади дають можливість експрес-методом контролювати, як

правило, одну, вагомішу характеристику на конкретному технологічному етапі виробництва і тим самим впливати на його хід. Вони невеликі за розміром, спрощеної конструкції, з автономною системою живлення.

До третьої групи приладів належать стаціонарні, безперервно діючі або автоматичні. Вони призначені для безперервного контролю і регулювання технологічного процесу, мають оперативний зворотний зв'язок з системою керування, яка опрацьовує інформацію і впливає на хід технологічного процесу, роботу обладнання. Оперативним контролем ходу технологічного процесу досягається отримання продукту високої якості [1].

У процесі контролю вимірювані параметри, як правило, зводять до однієї загальноприйнятої характеристики, якою може бути граничне напруження зсуву (статичне і динамічне), ефективна, пластична, динамічна в'язкості, модуль пружності, період релаксації, міцність адгезії, ефективний коефіцієнт зовнішнього тертя та в деяких випадках інші.

Більшість приладів для дослідження структурно-механічних характеристик методом пенетрації побудовані за принципом вимірювання: зусиль при заданій глибині занурення індентора у продукт; глибини занурення індентора у продукт при постійному зусиллі; одночасних глибини занурення і зусилля, яке витрачається на занурення індентора.

Для оцінки консистенції продуктів з незручною структурою (м'ясо, риба, твердий сир) доцільно використовувати прилади, принцип роботи яких базується на використанні голчастого або конічного індентора.

Сучасні конструкції пенетрометрів дають змогу протягом кількох хвилин визначити комплекс структурно-механічних характеристик: величину пенетрації, напруження зсуву, граничне напруження зсуву. За величиною цих характеристик визначають консистенцію продукту.

Прилади, в основу яких покладено метод пенетрації, залежно від призначення поділяють на пенетрометри, пластометри, консистометри, структурометри.

На рис. 1 показано один із найпростіших за конструкцією портативний пенетрометр із голчастим індентором.

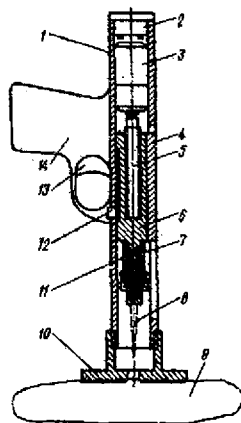


Рис. 1. Схема голчастого пенетрометра для вимірювання консистенції продукту

Розглянемо процес пенетрації на прикладі роботи пенетрометра з голчастим індентором, який складається з таких елементів: корпус 1, на якому закріплено індикатор 2 та мікрровимикач 12; рукоятка 14 з пусковим важелем 13; рифлений диск 10 з отвором. Всередині корпусу 1 знаходяться механізм переміщення площадки 6, який складається із реверсивного електродвигуна 3 з редуктором і гвинтом 5. На гвинті встановлена напрямна рейка 4. Площадка 6 з'єднана з датчиком 7 реєстрації зусилля занурення.

Пенетрометр працює таким чином. При досягненні контакту рифленої опори 10 з продуктом 9 натискається пусковий важіль 13. Електродвигун 3 через редуктор і гвинт 5 приводить у поступальний рух із постійною швидкістю площадку 6 із датчиком 7, на штоці якого встановлено індентор 8. Відстань між досліджуванним продуктом 9 та індентором 8 можна регулювати. При контакті індентора з продуктом 9 з'являються сили, що перешкоджають вторгненню, які компенсуються силами пружності пружини 11, що міститься в датчику 7.

Реєстрація показань здійснюється за індикатором 2, градуйованим в одиницях величини занурення індентора 8 з урахуванням деформації пружини 11. Рух індентора обмежується кінцевим вимикачем 12.

Основними недоліками приладу є те, що він дорогий, живиться від електромережі, дає значну розбіжність результатів через використання пружини і нерівномірності ручного натискання рифленим диском на об'єкт дослідження.

На рис. 2 показано універсальний пенетрометр, який дає змогу проводити дослідження з різними інденторами при змінних зусиллях і швидкостях його занурення у досліджуваний продукт. Прилад стаціонарний і використовується в умовах лабораторії, що значно зменшує можливості застосування його для проведення досліджень в умовах виробничого процесу. Існує безліч різноманітних конструкцій пенетрометрів, більшість з яких — спеціального функціонального призначення. Їх використовують для дослідження відповідного класу дисперсних систем.

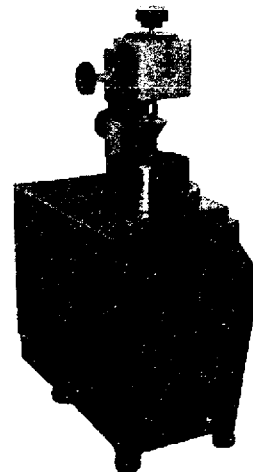


Рис. 2. Універсальний пенетрометр

При дослідженні консистенції харчових дисперсних систем найпоширеніші такі емпіричні залежності.

Коли досліджуються пластично-в'язкі матеріали з незруйнованою структурою, у разі використання конічного індентора граничне напруження зсуву, Па, розраховують з рівняння [1]

$$Q_0 = K \frac{m}{h^2}, \quad (1)$$

де K — константа конуса, яка залежить від кута при його вершині, Па м²/кг; m — маса конуса за виключенням сили тертя і опору пружини індикатора, якщо це передбачено його конструкцією, кг; h — глибина занурення конуса, м.

Константу конуса розраховують з рівняння

$$K = \frac{g}{\pi} \cos^2(\alpha/2) \operatorname{ctg}(\alpha/2). \quad (2)$$

Для інженерних розрахунків константу конуса для різних кутів приймають відповідно:

α , град	30	40	45	60	90
K	9,4	5,2	4,1	2,1	0,67

Для м'ясних продуктів кращий результат можна отримати, використовуючи для визначення константи конуса рівняння [2]

$$K = 0,687 \operatorname{ctg}^2 \alpha. \quad (3)$$

Коли досліджують пластичні матеріали і h змінюється у межах від 7,5 до 20 мм, рекомендується використати оцінку залежності [3]

$$K = h \operatorname{tg}(\alpha/4). \quad (4)$$

У спеціальній літературі для різних харчових дисперсних систем, коли беруться до уваги процеси зсуву і зминання шарів матеріалу при зануренні конуса, наведено також рівняння

$$K = 0,52 \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) / \pi. \quad (5)$$

Якщо відсутній плин і має місце тільки деформація для конуса з кутом $\alpha = 120^\circ$ і більше

$$K = \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right). \quad (6)$$

У разі, коли вимірювання проводять в обмеженому об'ємі і біля конуса відбувається зсув матеріалу уздовж його поверхні та пластична деформація шарів матеріалу, при вимірюванні граничного напруження зсуву для визначення константи конуса рекомендовано використовувати рівняння [3]

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} = & \pi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \left\{ \left[\alpha - 2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} + 1 \right)^2 \ln \left[\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{(\sin \frac{\alpha}{2} + 1)} \right] + \right. \\ & + \left[1 - \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4} \right) \right] (2 \sin \frac{\alpha}{2} + 1)^2 \times \\ & \times \ln \left[\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{(2 \sin \frac{\alpha}{2} + 1)} \right] + \left[\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4} \right) - \right. \\ & - \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \ln \left[\frac{2}{(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 1)} \right] + \\ & \left. \left. + \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4} \right) \left[\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) - (2 \sin \frac{\alpha}{2} + 1) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для великих кутів конуса $\alpha + 90^\circ$ вираз (7) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} = & \pi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \left\{ 1 + \alpha - 2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} + 1 \right)^2 \ln \left[\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{(\sin \frac{\alpha}{2} + 1)} \right] + \right. \\ & + \left[1 - \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4} \right) \right] (2 \sin \frac{\alpha}{2} + 1)^2 \times \\ & \times \ln \left[\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{(2 \sin \frac{\alpha}{2} + 1)} \right] - \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4} \right) \left(\frac{3}{2} + 2 \sin \alpha \right) \}. \end{aligned} \quad (8)$$

У разі, коли зразок знаходиться у кюветі або іншій місткості, тобто коли рухливість шарів при деформуванні обмежена, для одержання достовірних значень граничної напруги зсуву треба враховувати вплив крайового ефекту, який залежить від співвідношення $\left(\frac{D}{d} \right)$ діаметра місткості до діаметра основи конуса, зануреного в продукт. При $\frac{D}{d} > 5$ вплив крайового ефекту відсутній. При розрахунку константи конуса, якщо $\frac{D}{d} < 5$, слід врахувати таку поправку:

$$\frac{1}{K_1} = 1 + \frac{4htg \frac{\alpha}{2}}{D^3}. \quad (9)$$

де K_1 — поправка при розрахунку граничного напруження зсуву.

Для отримання значень граничного напруження зсуву, незалежного від кута конуса, при $\frac{D}{d} > 5$ використовують поправку

$$K_2 = \frac{0,83}{1,7} - \sin \alpha. \quad (10)$$

При дослідженнях на конічному пенетрометрі дисперсних систем, аналогічних ковбасному фаршу, доцільно враховувати похибку, пов'язану зі зміною площі контакту конуса з матеріалом у зв'язку з порушенням однорідності маси під конусом. Якщо враховувати зміну сили тертя, тоді треба додати до основного рівняння (1) ще один поправковий коефіцієнт [1]

$$K_3 = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{9 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + 4}}{3 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) + 1}. \quad (11)$$

Враховавши, виходячи з умов дослідження, всі поправкові коефіцієнти, остаточне основне рівняння (1) для розрахунку граничного напруження зсуву, (Па), буде мати такий вигляд:

$$Q_0 = K_1 K_2 K_3 K \frac{m}{h^2}. \quad (12)$$

У кожному конкретному варіанті треба визначати доцільність використання поправок K_1 , K_2 , K_3 .

Аналіз даних експериментальних досліджень на конічному пенетрометрі структурно-механічних властивостей різних харчових дисперсних систем дає змогу провести таку класифікацію матеріалів за консистенцією.

Сенсорна оцінка консистенції продукту за величиною граничного напруження зсуву при використанні конічного індентора подана нижче:

Оцінка консистенції матеріалу	Граничне напруження зсуву, $Q_0 \cdot 10^{-2}, \text{Па}$
Дуже м'який, не тримає форму, трохи плинний	Менше 50
Дуже м'який, але не текучий	50—100
М'який, мажучий	100—200
Пластичний, легко деформується	200—800
В міру твердий, трохи пластичний, здатний до деформування	800—1000
Твердий, мало здатний до деформування	1000—1500
Дуже твердий	Більше 1500

На рис. 3 показано залежність граничного напруження зсуву при різних відношеннях D/d , де D — діаметр місткості, в якій знаходиться досліджуваний продукт; d — діаметр основи конуса.

З графіка видно, що існують харчові продукти, для яких відношення D/d практично не впливає на граничне напруження зсуву, і навпаки — продукти, дуже чутливі до умов проведення досліджень у замкнутому об'ємі.

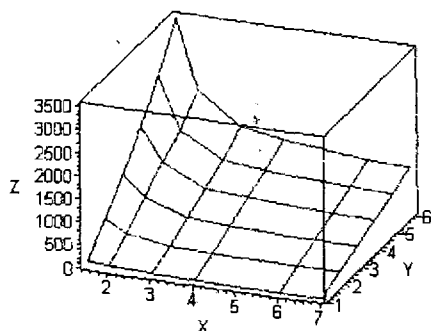


Рис. 3. Графік впливу відношення D/d (x) на граничне напруження зсуву z для модельних матеріалів різної консистенції y

Аналіз результатів дослідження пенетрацією структурно-механічних властивостей різних за консистенцією харчових дисперсних систем показав, що більшість наведених в літературі математичних моделей має емпіричний характер. Практично всі характеристики консистенції продукту знаходять з рівнянь апроксимації або регресії функцій, в які входять коефіцієнти, що характеризують зв'язок граничного напруження зсуву з багатьма конструктивними і технологічними факторами виробничого процесу. Функціональні залежності можуть бути використані для конкретних продуктів при заданих умовах дослідження. Отримані результати залежать від багатьох

суб'єктивних причин, які не враховують при проведенні досліджень і мають потану відтворюваність навіть при використанні однотипних приладів. Перелічені недоліки мають місце, передовсім, з причин відсутності обґрунтованої теорії, яка дає змогу отримувати якісні моделі процесу пенетрації. Виходячи з потреби теоретичного обґрунтування процесу пенетрації, запропоновано метод побудови математичних моделей на основі диференціальних рівнянь руху інденторів різної форми.

Розглянемо варіант, коли індентор має форму голки. У момент торкання досліджуваного зразка в загальному вигляді диференціальне рівняння його руху буде мати такий вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + F_{\text{тр}} + P_{\text{пр}} = P_n, \quad (13)$$

де m — маса індентора, m ; x — занурення, m ; $F_{\text{тр}}$ — сила опору, яка виникає в результаті тертя і адгезії, H ; $P_{\text{пр}}$ — сила проникнення, H ; P_n — сила навантаження індентора, H .

На рис. 4 показано сили, які діють на голчастий індентор при навантаженні його пружиною: a — змінне навантаження індентора $P_n \neq \text{const}$; b — постійне навантаження індентора $P_n = \text{const}$.

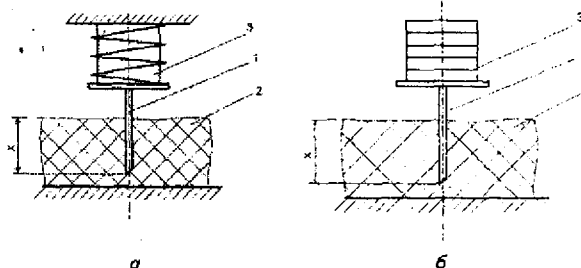


Рис. 4. Принципова схема пенетрації

Для в'язкопружних харчових дисперсних систем (рис. 5) сила $F_{\text{тр}}$ залежить від фізичної і хімічної взаємодії поверхні індентора з продуктом. Її визначають з рівняння, запропонованого Б. Дерягінін:

$$F_{\text{тр}} = f(N + S_0 P_0), \quad (14)$$

де f — коефіцієнт тертя; N — нормальна сила стискування, H ; S_0 — поверхня контакту, m^2 ; P_0 — тиск молекулярного притягання, Па .

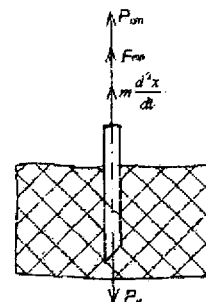


Рис. 5. Сили, які діють на голчастий індентор

На силу тертя впливає не тільки величина нормального тиску, а й інші фактори, такі як швидкість ковзання, температура, вологість продукту.

Якщо індентор-голка має малий діаметр і міцність адгезії F_{ad} визначена за умови тангенційного ковзання [4], тоді рівняння (14) можна спростити:

$$F_{npr} = S_0 F_{ad}. \quad (15)$$

Величина сили P_n навантаження залежить від конструкції пенетрометра. На рис. 6 наведено найпоширеніші варіанти зміни P_n .

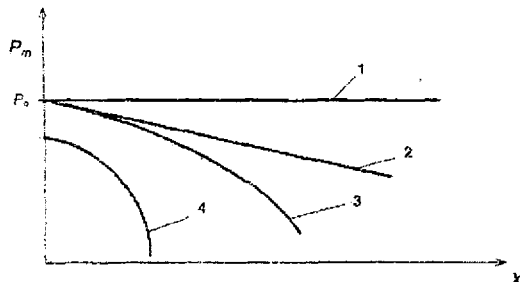


Рис. 6. Графіки можливих змін глибини x занурення від сили P_n навантаження індентора:
1 — $P_n = P_0 = \text{const}$; 2 — $P_n = P_0 - c_{e1}x$;
3 — $P_n = P_0 - c_{e2}x^2$; 4 — $P_n = P_0 - c_{e3}e^{x(t)}$

У варіанті 1 маємо індентор, який постійною силою — своєю вагою — тисне на зразок. Тоді $P_n = mg$. У варіантах 2—4 тиснути на індентор може пружний механізм або інший за конструкцією пристрій, наприклад гідравлічний або електричний. Тоді $P_n \neq \text{const}$.

При заглибленні індентора у зразок поверхня контакту S змінюється. Для голчастого індентора циліндричної форми матимемо

$$S_0 = \pi D_0 x(t), \quad (16)$$

де D_0 — діаметр голки, м.

Враховавши наведене, для першого варіанта, коли $P_n = P_0 = \text{const}$, диференціальне рівняння руху набуде вигляду

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \pi D_0 x(t) F_{ad} + P_{npr} - P_0 = 0. \quad (17)$$

В подальшому для запису і розв'язання диференціальних рівнянь будемо використовувати методи символної комп'ютерної математики "Maple".

Коли занурення індентора відбувається під дією власної ваги, тоді $P_0 = mg$ і

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \pi D_0 x(t) F_{ad} + P_{npr} = mg. \quad (18)$$

Відповідно для другого - четвертого варіантів маємо такі рівняння:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \pi D_0 x(t) F_{ad} + P_{npr} = P_0 - c_{e2}x(t); \quad (19)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \pi D_0 x(t) F_{ad} + P_{npr} = P_0 - c_{e3}x^2(t); \quad (20)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \pi D_0 x(t) F_{ad} + P_{npr} = P_0 - c_{e4}e^{x(t)}; \quad (21)$$

Отримаємо розв'язок рівнянь (18)—(21) у загальному вигляді (запис рівнянь виконано в системі символної комп'ютерної математики "Maple").

> eg1:=dsolve({yr1});

$$\begin{aligned} eg1 := \left\{ x(t) = \right. & \left(-P_{npr} + massa_1 g + \right. \\ & + \sin \left(\frac{\sqrt{F_{ad}} \sqrt{\pi} \sqrt{D_0} t}{\sqrt{massa_1}} \right) - C1 F_{ad} \pi D_0 \\ & + \cos \left(\frac{\sqrt{F_{ad}} \sqrt{\pi} \sqrt{D_0} t}{\sqrt{massa_1}} \right) - \\ & \left. \left. - C2 F_{ad} \pi D_0 \right) / (F_{ad} \pi D_0) \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

> eg2:=dsolve({yr2});

$$\begin{aligned} eg2 := \left\{ x(t) = \right. & \left(-P_{npr} + P_0 + \right. \\ & + \sin \left(\frac{\sqrt{F_{ad} \pi D_0 + C_{e2} t}}{\sqrt{massa_1}} \right) - C1 F_{ad} \pi D_0 \\ & + \sin \left(\frac{\sqrt{F_{ad} \pi D_0 + C_{e2} t}}{\sqrt{massa_1}} \right) - C1 C_{e2} + \\ & + \cos \left(\frac{\sqrt{F_{ad} \pi D_0 + C_{e2} t}}{\sqrt{massa_1}} \right) - C2 F_{ad} \pi D_0 \\ & + \cos \left(\frac{\sqrt{F_{ad} \pi D_0 + C_{e2} t}}{\sqrt{massa_1}} \right) - C2 C_{e2} \left. \right) / \\ & \left. / (F_{ad} \pi D_0 + C_{e2}) \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

> eg3:=dsolve({yr3});

$$\begin{aligned} eg3 := \left[\left[\right. & x(t) = \text{RootOf} \left(- \int^x \right. \\ & \frac{3 \, massa_1}{\sqrt{-3 \, massa_1 (3 F_{ad} \pi D_0 - a^2 + 6 \, a P_{npr} -} } \\ & \left. \left. - 6 \, a P_0 + 2 \, a^3 C_{e3} - 3 \, C1 \, massa_1 \right) \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. d_a + t + _C2 \right\}, x(t) = \text{RootOf} \left(- \int^z \frac{3 \text{ massa}_1}{\sqrt{-3 \text{ massa}_1 (3 F_{ad} \pi D_0 a^2 + 6 a P_{nrn} - \right.} \\
 & \left. \frac{3 \text{ massa}_1}{-6 a P_0 + 2 a^3 C_{e3} - 3 _C1 \text{ massa}_1)} d \right. \\
 & \left. \left. \left. a + t + _C2 \right\} \right) \right) \\
 & > \text{eg4} := \text{dsolve}(\{\text{yr4}\}); \\
 & \text{eg4} := \left[\left[x(t) = \text{RootOf} \left(- \int^z \frac{\text{ massa}_1}{\sqrt{-\text{ massa}_1 (F_{ad} \pi D_0 a^2 + 2 a P_{nrn} - 2 a P_0 + \right.} \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\text{ massa}_1}{+ 2 C_{e4} e^{-a} - _C1 \text{ massa}_1)} d_a \right. \right. \\
 & \left. \left. + t + _C2 \right) \right], x(t) = \text{RootOf} \left(- \int^z \frac{\text{ massa}_1}{\sqrt{-\text{ massa}_1 (F_{ad} \pi D_0 a^2 + 2 a P_{nrn} - 2 a P_0 + \right.} \right. \\
 & \left. \left. \frac{\text{ massa}_1}{+ 2 C_{e4} e^{-a} - _C1 \text{ massa}_1)} d_a \right. \right. \\
 & \left. \left. + t + _C2 \right) \right] \right] \quad (24)
 \end{aligned}$$

Аналіз отриманих залежностей свідчить, що для рівнянь (20) і (21) треба отримувати розв'язок у числовому вигляді або ж у вигляді ряду. Приймаючи почат-

кові умови, коли при $t = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0$, зробивши при-
воєння $\text{ics} := x(0) = 0, D(x(0)) = 0$ маємо розв'язки від-
повідно для всіх чотирьох варіантів.

Для першого

$> \text{eg11} := \text{dsolve}(\{\text{yr1}, \text{ics}\}, x(t));$

$\text{eg11} := x(t) =$

$$\begin{aligned}
 & \cos \left(\frac{\sqrt{F_{ad}} \sqrt{\pi} \sqrt{D_0} t}{\sqrt{\text{ massa}_1}} \right) (-P_{nrn} + \text{ massa}_1 g) \\
 & = - \frac{F_{ad} \pi D_0}{F_{ad} \pi D_0} + \\
 & + \frac{-P_{nrn} + \text{ massa}_1 g}{F_{ad} \pi D_0} \quad (26)
 \end{aligned}$$

другого

$> \text{eg22} := \text{dsolve}(\{\text{yr2}, \text{ics}\}, x(t));$

$$\begin{aligned}
 & \cos \left(\frac{\sqrt{F_{ad} \pi D_0 + C_{e2}} t}{\sqrt{\text{ massa}_1}} \right) (P_{nrn} - P_0) \\
 & \text{eg22} := x(t) = \frac{F_{ad} \pi D_0 + C_{e2}}{F_{ad} \pi D_0 + C_{e2}} + \\
 & + \frac{-P_{nrn} + P_0}{F_{ad} \pi D_0 + C_{e2}}; \quad (27)
 \end{aligned}$$

третього

$> \text{eg33} := \text{dsolve}(\{\text{yr3}, \text{ics}\}, x(t), \text{series});$

$$\begin{aligned}
 & \text{eg33} := x(t) = - \frac{1}{2} \frac{P_{nrn} - P_0}{\text{ massa}_1} t^2 + \\
 & + \frac{1}{24} \frac{F_{ad} \pi D_0 (P_{nrn} - P_0)}{\text{ massa}_1^2} t^4 - \\
 & - \frac{1}{720} \frac{(P_{nrn} - P_0) (F_{ad}^2 \pi^2 D_0^2 + 6 C_{e3} P_{nrn} - 6 C_{e3} P_0)}{\text{ massa}_1^3} t^6 + \\
 & + \frac{1}{40320} \frac{F_{ad} \pi D_0 (P_{nrn} - P_0) (F_{ad}^2 \pi^2 D_0^2 +}{\text{ massa}_1^4} \\
 & + \frac{36 C_{e3} P_{nrn} - 36 C_{e3} P_0)}{\text{ massa}_1^4} t^8 + O(t^{10}) \quad (28)
 \end{aligned}$$

четвертого

$> \text{eg44} := \text{dsolve}(\{\text{yr4}, \text{ics}\}, x(t), \text{series});$

$$\begin{aligned}
 & \text{eg44} := x(t) = - \frac{1}{2} \frac{P_{nrn} - P_0 + C_{e4}}{\text{ massa}_1} t^2 + \\
 & + \frac{1}{24} \frac{(P_{nrn} - P_0 + C_{e4}) (F_{ad} \pi D_0 + C_{e4})}{\text{ massa}_1^2} t^4 -
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{720} \frac{(P_{nrn} - P_0 + C_{e4}) (F_{ad}^2 \pi^2 D_0^2 + 2 F_{ad} \pi D_0 C_{e4} + 4 C_{e4}^2 + 3 C_{e4} P_{nrn} - 3 C_{e4} P_0)}{massa_1^3} +$$

$$+ \frac{1}{40320} (P_{nrn} - P_0 + C_{e4}) (F_{ad}^3 \pi^3 D_0^3 + 3 F_{ad}^2 \pi^2 D_0^2 C_{e4} + 21 F_{ad} \pi D_0 C_{e4}^2 + 34 C_{e4}^3 + 18 C_{e4} P_{nrn} F_{ad} \pi D_0 + 48 C_{e4}^2 P_{nrn} - 18 C_{e4} P_0 F_{ad} \pi D_0 - 48 C_{e4}^2 P_0 + 15 C_{e4} P_{nrn}^2 - 30 C_{e4} P_{nrn} P_0 + 15 C_{e4} P_0^2) / massa_1^4 t^8 + O(t^{10}). \quad (29)$$

Отримані математичні моделі (26)–(29) описують механізм занурення індентора за умови, коли його початкова швидкість дорівнює нулю, тобто занурення індентора починається, коли він торкається поверхні зразка. Це не завжди відповідає реальним умовам досліджень, прив'язаних до конкретних конструкцій приладів.

Розглянемо поширеніший варіант, коли в момент торкання індентором поверхні зразка його швидкість була більше нуля:

$$\frac{dx}{dt} > 0 \Rightarrow D(x)(0) = V_{ox},$$

Тоді диференціальні рівняння руху відповідно запишемо:

для першого варіанта

> eg111:=dsolve({yr1,x(0)=0,D(x)(0)=Vox},x(t));

$$eg111 := x(t) = \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{F_{ad}} \sqrt{\pi} \sqrt{D_0} t}{\sqrt{massa_1}}\right) Vox \sqrt{massa_1}}{\sqrt{F_{ad}} \sqrt{\pi} \sqrt{D_0}} - \frac{\cos\left(\frac{\sqrt{F_{ad}} \sqrt{\pi} \sqrt{D_0} t}{\sqrt{massa_1}}\right) (-P_{nrn} + massa_1 g)}{F_{ad} \pi D_0} + \frac{-P_{nrn} + massa_1 g}{F_{ad} \pi D_0}; \quad (30)$$

другого

> eg222:=dsolve({yr2,x(0)=0,D(x)(0)=Vox},x(t));

$$eg222 := x(t) = \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{F_{ad} \pi D_0 + C_{e2}} t}{\sqrt{massa_1}}\right) Vox \sqrt{massa_1}}{\sqrt{F_{ad} \pi D_0 + C_{e2}}}$$

$$+ \frac{\cos\left(\frac{\sqrt{F_{ad} \pi D_0 + C_{e2}} t}{\sqrt{massa_1}}\right) (P_{nrn} - P_0)}{F_{ad} \pi D_0 + C_{e2}} + \frac{-P_{nrn} + P_0}{F_{ad} \pi D_0 + C_{e2}}; \quad (31)$$

третього

> eg333:=dsolve({yr3,x(0)=0,D(x)(0)=Vox},x(t),series);

$$eg333 := x(t) = Vox t - \frac{1}{2} \frac{P_{nrn} - P_0}{massa_1} t^2 - \frac{1}{6} \frac{Vox F_{ad} \pi D_0}{massa_1} t^3 - \frac{1}{24} \frac{-F_{ad} \pi D_0 P_{nrn} + F_{ad} \pi D_0 P_0 + 2 C_{e3} Vox^2 massa_1}{massa_1^2} t^4 + \frac{1}{120} \frac{Vox (F_{ad}^2 \pi^2 D_0^2 + 6 C_{e3} P_{nrn} - 6 C_{e3} P_0)}{massa_1^2} t^5 + O(t^6); \quad (32)$$

четвертого

> eg444:=dsolve({yr4,x(0)=0,D(x)(0)=Vox},x(t),series);

$$eg444 := x(t) = Vox t - \frac{1}{2} \frac{P_{nrn} - P_0 + C_{e4}}{massa_1} t^2 - \frac{1}{6} \frac{Vox (F_{ad} \pi D_0 + C_{e4})}{massa_1} t^3 + \frac{1}{24} \frac{F_{ad} \pi D_0 P_{nrn}}{massa_1} t^4 + \frac{1}{120} \frac{Vox (F_{ad}^2 \pi^2 D_0^2 + 2 F_{ad} \pi D_0 C_{e4} + 4 C_{e4}^2 + 3 C_{e4} P_{nrn} - 3 C_{e4} P_0 - C_{e4} Vox^2 mas.}{massa_1^2} t^5 + O(t^6). \quad (33)$$

Розглянемо випадок практичного застосування отриманих математичних моделей. У разі, коли маємо голчастий індентор (рис. 7), який з висоти h падає на досліджуваний продукт, швидкість його руху в момент торкання поверхні буде

$$V_{ox} = \sqrt{2gh}. \quad (34)$$

Підставивши потрібні для розрахунку дані в рівняння (30) і провівши обчислення отримаємо для м'ясної сировини (найдовший м'яз спини), яка знаходиться у посолі, графічну залежність відносної характеристики опору проникнення індентора $\Phi = \frac{P_{nrn}}{P_{nrk}}$ від тривалості t витримки м'яса у розсолі (рис. 8), де P_{nrk} — сила проникнення індентора у довільний час соління.

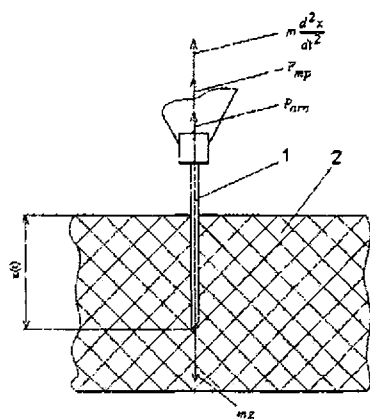
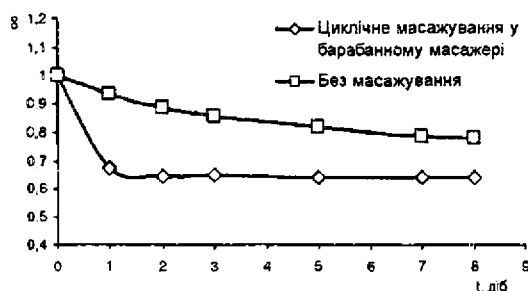


Рис. 7. Голчастий індентор

Рис. 8. Графік залежності відносної характеристики опору проникнення індентора ϕ від тривалості t витримки м'яса у розсолі

За величиною ϕ судять про ступінь визрівання м'яса.

Експериментально-аналітичними дослідженнями встановлено, що для $h \approx 100$ мм

$$\frac{P_{прк}}{P_{плз}} \approx \frac{x_k(t)}{x_n(t)}, \quad (35)$$

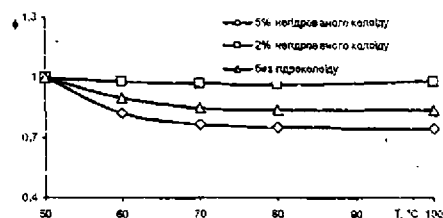
$x_k(t)$ — занурення індентора у продукт після його технологічного оброблення (у будь-який час), мм;
 $x_n(t)$ — занурення індентора у продукт до початку його технологічного оброблення, мм.

Враховавши попередній вираз, можна вважати

$$\phi = \frac{x_k(t)}{x_n(t)} \quad (36)$$

і використовувати відносну характеристику опору проникнення індентора характеристику консистенції продукту.

На рис. 9 показано залежність характеристики опору проникнення індентора ϕ від температури для зразків з різним вмістом гідроколоїду — камеді рожкового дерева у желейній начинці, яку виготовляють за традиційною технологією. Традиційні желейні начинки не мають необхідних для отримання якісних кондитерських виробів високих термостабільних властивостей. Відповідно до вимог стандарту термостабільні начинки, які застосовують у виробництві борошняних кондитерських виробів, мають зберігати форму навіть при інтенсивній температурній дії, бути стійкими до запекання і розплавлення.

Рис. 9. Графік залежності характеристики опору ϕ проникнення індентора у зразки желейних начинок з різним вмістом гідроколоїду від температури T

Аналіз отриманих залежностей показує, що гідроколоїд — камедь рожкового дерева впливає на термостабільність желейних начинок, збільшуючи її.

Висновки. Проведені експериментальні дослідження підтверджують можливість і доцільність використання запропонованої методики дослідження консистенції продукту методом гравітаційної пенетрації при проведенні наукових досліджень і у практичній діяльності у виробництві різних видів харчових продуктів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Косой В.Д., Малышева А.Д., Юдина С.Б. Инженерная реология в производстве колбас. — М.: Колос, 2005. — 264 с.
2. Карпычев В.А., Косой В.Д., Горбатов А.В. Теоретическое обоснование метода пенетрации // Мясная индустрия СССР. — 1985, № 12. — С. 32—34.
3. Реометрия пищевого сырья и продуктов: Справочник / Под ред. Ю.А. Мачихина. — М.: Агропромиздат, 1990. — 271 с.
4. Гуць В.С., Коваль О.А. Визначення міцності адгезії // Матеріали IX міжнародної наукової технічної конференції "Нові технології та технічні рішення в харчовій та переробній промисловості". — К.: НУХТ, 2005. — С. 122.

Одержана редколегією 22.06.06 р.