УДК 681.518.52

О.П. Лобок[1], канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Б.М. Гончаренко[1], докт. техн. наук, проф.,
Л.Г. Віхрова[2], канд.техн. наук, проф.,
[1]Національний університет харчових технологій, м.Київ, Україна
[2]Центральноукраїнський національний технічний університет, м. Кропивницький, Україна

ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО МІНІМАКСНОГО ГРАНИЧНОГО КЕРУВАННЯ ОБ'ЄКТАМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Однією із важливих і складних задач точкового і рухомого керування є вибір оптимальної стратегії керування для систем, що функціонують в умовах невизначеності. Тут розв'зані задачі вибору оптимального розташування точкових регуляторів і пошуку оптимального закону переміщення рухомого джерела на границі прямокутної області для процесу теплоперенесення, що протікає в умовах неповної інформації.

Нехай процес теплоперенесення в однорідній тонкій прямокутній пластині описується функцією $\varphi(x,t)$, яка в області $Q_T = \Omega \times (0,T)$, де $\Omega = \{(x_1,x_2):\ 0<x_1<l_1,\ 0<x_2<l_2\}$, $l_1,l_2>0$, $T<\infty$, задовольняє рівняння

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} = a\Delta_x\varphi(x,t) + f_1(x,t), \quad (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

а на границі Q_T – ще й додаткові умови

$$\varphi(x,0) = f_0(x),\ x\in\Omega; \quad \varphi(x,t) = \sum_{i=1}^{N}\delta(x-v_i(t))u_i(t),\ (x,t)\in\Gamma\times(0,T). \tag{2}$$

Тут $\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – двовимірний оператор Лапласа; $a>0$ – коефіцієнт температуропровідності; Γ – границя прямокутної області Ω; $\delta(x-y)$ – дельта-функція Дірака; $t \to v_i(t)\in\Gamma$ – вимірні функції, що задають Рух граничних джерел; $u_i(t)\in L_2(0,T)$ – функції керування; $f_0(x)\in L_2(\Omega)$, $f_1(x,t)\in L_2(Q_T)$ – невідомі функції, що належать до області

$$S_t = \{(f_0,f_1):\ G(f_0;f_1(\tau),\ 0<\tau<t)\le 1\}, \quad t\in(0,T], \tag{3}$$

де $G(f_0;f_1(\tau),\ 0<\tau<t) = F_0\int_\Omega f_0^2(x)dx + F_1\int_0^t\int_\Omega f_1^2(x,\tau)dxd\tau$,

а F_0, F_1 – додатні постійні величини, що відображають внесок завад f_0 і $f_1(t)$ в сумарне збурення, що діє на систему (1),(2).

Під розв'язком крайової задачі (1),(2) розуміємо таку функцію $\varphi(x,t)\in L_2(Q_T)$, яка задовольняє наступну інтегральну тотожність

$$-\int_0^T\int_\Omega\varphi(x,t)\left(\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t} + a\Delta_x\eta(x,t)\right)dxdt = \int_\Omega f_0(x)\eta(x,0)dx + \int_0^T\int_\Omega f_1(x,t)\eta(x,t)dxdt -$$

$$-a\sum_{i=1}^{N}\int_0^T u_i(t)\left.\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial n}\right|_{x=v_i(t)} dt\ \ \forall\,\eta(x,t)\in\Phi, \tag{4}$$

де $\partial/\partial n$ – похідна по зовнішній нормалі $\vec{n}$ до границі Γ області Ω,

$\Phi = \{\eta(x,t):\ \eta(x,t)\in H^{3,1}(Q_T),\ \eta(x,T)=0,\ x\in\Omega;\ \eta(x,t)=0,\ (x,t)\in\Gamma\times(0,T)\}$,

$H^{3,1}(Q_T)$ – соболівський простір.

Задача вибору оптимальної стратегії мінімаксного керування полягає в тому, щоб знайти вектор-функції $v^*(t) = \left[v_1^*(t), v_2^*(t),\dots,v_N^*(t)\right]^T$ і $u^*(t) = \left[u_1^*(t),u_2^*(t),\dots,u_N^*(t)\right]^T$ за умови

$$I(u^*,v^*) = \inf_v \inf_u I(u,v). \tag{5}$$

Оптимальне керування $u^*(t)$ оптимізаційної задачі (1), (2), що задовольняє необхідні умови оптимальності має вигляд

$$u_i^*(t) = \int\limits_{\Omega} R_i^*(x,t)\varphi(x,t)dx\,, \quad R_i^*(x,t) = ad_i^{-1}\alpha^{-1}(t)g(x,t)h(v_i(t),t)\,, \tag{6}$$

де $\alpha(t) = 1 + a^2\sum\limits_{k=1}^{N} d_k^{-1}\int\limits_t^T h^2(v_k(\tau),\tau)d\tau\,,$

$$\begin{bmatrix} g(x,t) \\ h(x,t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} s_i e^{\lambda_i(t-T)} \begin{bmatrix} \omega_i(x) \\ r_i(x) \end{bmatrix}, \quad s_i = \int\limits_{\Omega} S(x)\omega_i(x)dx\,. \tag{7}$$

Даний алгоритм був програмнореалізаваний на алгоритмічній мові Fortran 90 при таких початкових даних: $l_1 = 2.0$, $l_2 = 1.0$, $T = 2.0$, $F_0 = 0.25$, $F_1 = 2.0$, $d_i = 1.0$, $i = 1,2,...,N$, $S(x) = 1.0$, $\varepsilon = 0.001$, $\rho_0 = 0.8$, число регуляторів $N = 5$, за значення коефіцієнта теплопровідності a було взято 0.4, що відповідає коефіцієнту теплопровідності мідної пластини. Розмірність всіх величин задана в системі [метр, час, град. С^o, ккал.].

В табл 1. дано початкове розташування $z^0 = \left[z_1^0, z_2^0, ..., z_N^0\right]^T$ точкових граничних регуляторів. Значення функції $J(z)$ при такому розташуванні керувань дорівнює $J(z^0) = 0.975632$. Оптимальне розташування регуляторів $z^* = \left[z_1^*, z_2^*, ..., z_N^*\right]^T$, отримане за іншим алгоритмом , подано в табл. 2, причому $J(z^*) = 0.571874$.

Таблиця 1.

k	z_{1k}^0	z_{2k}^0
1	2.0	0.0
2	1.0	0.0
3	0.0	0.0
4	0.0	0.5
5	0.0	1.0

Таблиця 2.

k	z_{1k}^*	z_{2k}^*
1	1.349	0.0
2	1.0	0.0
3	0.651	0.0
4	0.0	0.5
5	0.651	1.0

На рис.1 зображені графіки оптимальних точкових керувань що оптимально розташовані на границі Γ області Ω в точках $z_i^* \in \Gamma,\ i = 1,2,...,N$.

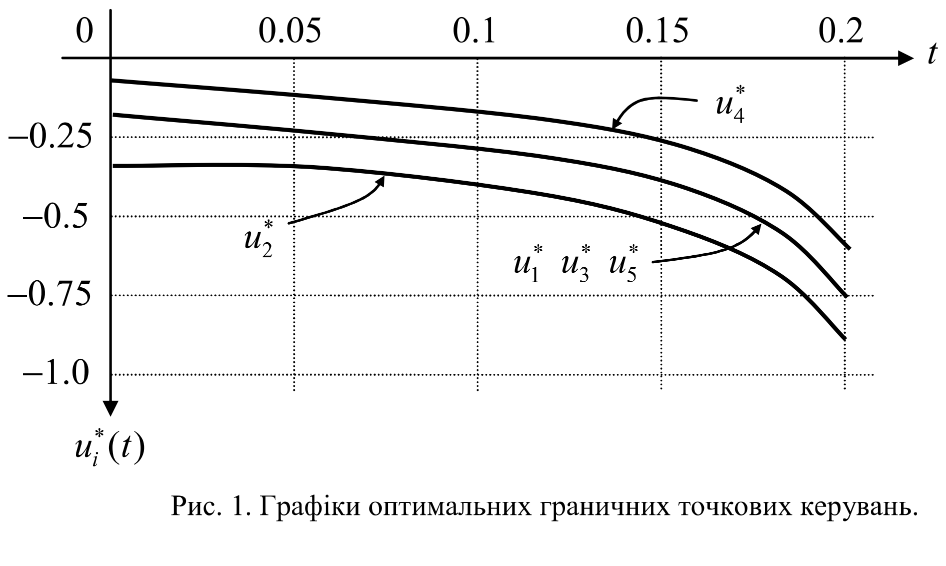

Рис. 1. Графіки оптимальних граничних точкових керувань.