

УДК 517.576

ПРО АБСЦИСУ ЗБІЖНОСТІ РЯДУ ДІРІХЛЕ

О.М. Мулява

O. Mulyava. *On the convergence abscissa of a Dirichlet series*, Matematychni Studii, 9(1998) 171–176.

It is established conditions of Dirichlet series under which the Valiron formula for the abscissa of absolutely convergence holds.

1. Нехай (λ_n) — зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел, а σ_z і σ_a — абсциса збіжності і абсциса абсолютної збіжності ряду Діріхле

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n), \quad s = \sigma + it. \quad (1)$$

Класична теорема Валірона [1, с.115] стверджує, що якщо $\tau_0 \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0$, то

$$\sigma_z = \sigma_a = \alpha_0 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}. \quad (2)$$

Тут ми покажемо, що умову $\tau_0 = 0$ в теоремі Валірона можна замінити умовою

$$\ln n = o(\ln |a_n|), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

і виясимо, наскільки ці обидві умови є необхідними для справедливості рівностей (2).

2. Для $\gamma > 0$ і $\delta \in \mathbb{R}$ позначимо

$$h(\gamma, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\gamma - 1) \ln |a_n| + \delta \lambda_n}{\ln n}. \quad (4)$$

і доведемо спочатку таку теорему.

Теорема 1. Для кожного ряду Діріхле (1) $\sigma_a \leq \sigma_z$ і $\sigma_a \leq \alpha_0$, а якщо $h(\gamma, \delta) > 1$, то $\sigma_a \geq \gamma \sigma_z - \delta$ і $\sigma_a \geq \gamma \alpha_0 - \delta$.

Доведення. Нерівність $\sigma_a \leq \sigma_z$ очевидна. Припустимо, що $\alpha_0 < +\infty$. Тоді для кожного $\alpha > \alpha_0$ існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$|a_{n_k}| \geq \exp(-\alpha \lambda_{n_k}),$$

тобто

$$|a_{n_k}| \exp(\sigma \lambda_{n_k}) \geq \exp\{(-\alpha + \sigma)\lambda_{n_k}\} \geq 1.$$

для всіх $\sigma \geq \alpha$. Звідси, завдяки довільності α , випливає, що ряд (1) розбіжний в кожній точці $s = \sigma > \alpha_0$, і отже, $\sigma_a \leq \alpha_0$. При $\alpha_0 = +\infty$ ця нерівність очевидна.

Якщо $\alpha_0 > -\infty$, то для кожного $\sigma < \gamma\alpha_0 - \delta$ маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n} = \alpha_0 > \frac{\sigma + \delta}{\gamma},$$

тобто

$$\ln |a_n| + \frac{\sigma + \delta}{\gamma} \lambda_n = \lambda_n \left(-\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{a_n} + \frac{\sigma + \delta}{\gamma} \right) < 0$$

для всіх досить великих n . Тому для таких n виконується

$$\begin{aligned} |a_n| \exp(\sigma \lambda_n) &= \exp\left\{ -((\gamma - 1) \ln |a_n| + \delta \lambda_n) + \gamma \left(\ln |a_n| + \frac{\sigma + \delta}{\gamma} \lambda_n \right) \right\} \leq \\ &\leq \exp\left\{ -\frac{(\gamma - 1) \ln |a_n| + \delta \lambda_n}{\ln n} \ln n \right\} < \exp\{-(h(\gamma, \delta) - \varepsilon) \ln n\} \end{aligned}$$

для кожного $\varepsilon \in (0, h(\gamma, \delta) - 1)$ і всіх $n \geq n_0(\varepsilon)$. Оскільки $h(\gamma, \delta) - \varepsilon > 1$, то звідси випливає, що ряд (1) абсолютно збіжний в точці $s = \sigma$, тобто $\sigma_a \geq \gamma\alpha_0 - \delta$. При $\alpha_0 = -\infty$ ця нерівність очевидна.

Нехай, нарешті, $\sigma_a > -\infty$ і $\eta \in (-\infty, \sigma_a)$. Оскільки ряд (1) збіжний в точці η , то існує $M > 0$ таке, що для всіх $n \geq 0$

$$|a_n| \exp(\eta \lambda_n) \leq M,$$

тобто

$$\begin{aligned} |a_n| \exp\{(\gamma\eta - \delta)\lambda_n\} &= (|a_n| \exp\{\eta \lambda_n\})^\gamma |a_n|^{1-\gamma} \exp\{-\delta \lambda_n\} \leq \\ &\leq M^\gamma \exp\left\{ -\frac{(\gamma - 1) \ln |a_n| + \delta \lambda_n}{\ln n} \ln n \right\} < \exp\{-(h(\gamma, \delta) - \varepsilon) \ln n\} \end{aligned}$$

для кожного $\varepsilon \in (0, h(\gamma, \delta) - 1)$ і всіх $n \geq n_0(\varepsilon)$. Звідси, як вище, випливає, що $\sigma_a \geq \gamma\eta - \delta$, а завдяки довільності η , $\sigma_a \geq \gamma\sigma_a - \delta$. При $\sigma_a = -\infty$ ця нерівність очевидна. Теорему 1 повністю доведено.

Наслідок 1. Для кожного ряду Діріхле (1) $\sigma_a \leq \sigma_a \leq \sigma_a + \tau_0$ і $\sigma_a \leq \alpha_0 \leq \sigma_a + \tau_0$.

Справді, візьмемо в теоремі 1 $\gamma = 1$ і $\delta = \tau_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тоді

$$h(\gamma, \delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\tau_0 + \varepsilon)\lambda_n}{\ln n} = \frac{\tau_0 + \varepsilon}{\tau_0} > 1$$

і, отже, справедливі оцінки $\sigma_a \geq \alpha_0 - \tau_0 - \varepsilon$ і $\sigma_a \geq \sigma_a - \tau_0 - \varepsilon$, тобто, завдяки довільності ε , маємо $\sigma_a \geq \alpha_0 - \tau_0$ і $\sigma_a \geq \sigma_a - \tau_0$.

Приклад ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(s \ln n)$, для якого $\tau_0 = 1$, $\alpha_0 = \sigma_a = 0$, $\sigma_a = -1$, вказує на точність наведених в наслідку 1 оцінок.

Наслідок 2. Якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{\ln n} = h_0 > 0,$$

то $\sigma_a \geq \alpha_0(h_0 + 1)/h_0$ і $\sigma_a \geq \sigma_s(h_0 + 1)/h_0$.

Справді, якщо візьмемо в теоремі 1 $\delta = 0$ і $\gamma = 1 + \varepsilon + 1/h_0$, то

$$h(\delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{h_0} + \varepsilon \right) \frac{\ln |a_n|}{\ln n} \geq 1 + \varepsilon h_0 > 1,$$

і отже, $\sigma_a \geq (1 + \varepsilon + 1/h_0)\sigma_s$ і $\sigma_a \geq (1 + \varepsilon + 1/h_0)\alpha_0$, звідки, завдяки довільності ε , отримуємо потрібні нерівності.

Приклад ряду $1 + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n n \exp(s \ln n)$ вказує на точність отриманих у наслідку 2 оцінок. Тут $h_0 = 1$, $\alpha_0 = \sigma_s = -1$, а $\sigma_a = -2$.

Наслідок 3. Якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(1/|a_n|)} = h_0 \in [0, 1),$$

то $\sigma_a \geq \sigma_s(1 - h_0)$ і $\sigma_a \geq \alpha_0(1 - h_0)$.

Справді, якщо в теоремі 1 візьмемо $\delta = 0$ і $\gamma = 1 - h_0 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1 - h_0$, то

$$h(\gamma, \delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(h_0 + \varepsilon) \ln(1/|a_n|)}{\ln n} = \frac{h_0 + \varepsilon}{h_0} > 1$$

і отже, $\sigma_a \geq \sigma_s(1 - h_0 - \varepsilon)$ і $\sigma_a \geq \alpha_0(1 - h_0 - \varepsilon)$, звідки, завдяки довільності ε , отримуємо потрібні нерівності.

Приклад ряду

$$1 + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \exp(s \ln n)$$

вказує на точність вказаних у наслідку 3 оцінок. Тут $h_0 = 1/2$, $\alpha_0 = \sigma_s = 2$, а $\sigma_a = 1$.

Використовуючи наслідки 1-3, тепер доведемо наступну теорему.

Теорема 2. Нехай або $\tau_0 = 0$, або $\ln n = o(\ln |a_n|)$, $n \rightarrow \infty$. Тоді $\sigma_s = \sigma_a = \alpha_0$.

Доведення. Якщо $\tau_0 = 0$, то висновок теореми випливає з наслідку 1. Якщо ж $\ln n = o(\ln |a_n|)$, $n \rightarrow \infty$, то або 1) $\ln |a_n| / \ln n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), або 2) $\ln |1/a_n| / \ln n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), або $\{a_n\} = \{a'_n\} \cup \{a''_n\}$, де $\{a'_n\}$ задовольняє вказану умову 1), а $\{a''_n\}$ задовольняє умову 2). В перших двох випадках справедливість теореми випливає з наслідків 2 і 3. У третьому випадку запишемо ряд (1) у вигляді суми

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n e^{s\lambda'_n} + \sum_{n=1}^{\infty} a''_n e^{s\lambda''_n}, \quad (5)$$

де показники λ'_n і λ''_n відповідають коефіцієнтам a'_n і a''_n . За наслідками 2 і 3

$$\sigma'_s = \sigma'_a = \alpha'_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda'_n} \ln \frac{1}{a'_n}, \quad \sigma''_s = \sigma''_a = \alpha''_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda''_n} \ln \frac{1}{a''_n},$$

де σ'_3, σ'_a і σ''_3, σ''_a — абсциси збіжності та абсолютної збіжності відповідних рядів з (5). Зауважимо також, що, оскільки $\sigma'_3 \leq 0$ і $\sigma''_3 \geq 0$, то $\sigma_a = \min\{\sigma'_a, \sigma''_a\}$ і $\sigma_3 = \min\{\sigma'_3, \sigma''_3\}$. Звідси випливає, що $\sigma_3 = \sigma_a$, а $\alpha_0 \leq \min\{\alpha'_0, \alpha''_0\} = \min\{\sigma'_a, \sigma''_a\} = \sigma_a \leq \alpha_0$, і $\sigma_3 \leq \min\{\sigma'_a, \sigma''_a\} = \sigma_a \leq \sigma_3$. Теорему 2 повністю доведено.

3. Вияснимо тепер, наскільки умови $\tau_0 = 0$ і $\ln n = o(\ln |a_n|)$, $n \rightarrow \infty$, є необхідними для справедливості рівності $\sigma_a = \alpha_0$. Почнемо з умови $\tau_0 = 0$. Для зростаючої до $+\infty$ послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$ невід'ємних чисел через $D(\Lambda)$ позначимо клас рядів Діріхле (1) з заданою послідовністю Λ показників.

Теорема 3. Для того, щоб для кожного ряду Діріхле з $D(\Lambda)$ виконувалась рівність $\sigma_a = \alpha_0$, необхідно і досить, щоб $\tau_0 = 0$.

Доведення. Достатність умови $\tau_0 = 0$ випливає з наслідку 1. Для доведення її необхідності нам буде потрібне наступне доведене в [2] твердження: з кожної послідовності Λ , для якої

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} > \tau > 0, \quad (6)$$

можна виділити підпослідовність $\Lambda^* = (\lambda_k^*)$ таку, що

$$\ln k \leq \tau \lambda_k^* + 1 \quad (7)$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$ і

$$\ln k_j \geq \tau \lambda_{k_j}^* \quad (8)$$

для деякої зростаючої послідовності (k_j) натуральних чисел.

Отже, припустимо, що $\tau_0 > 0$, і виберемо $0 < \tau < \tau_0$. Тоді існує підпослідовність Λ^* послідовності Λ , для якої виконуються нерівності (7) і (8). Покладемо $a_n = 0$, якщо $\lambda_n \neq \lambda_k^*$, і $a_n = \exp\{-\alpha_0 \lambda_k^*\}$, якщо $\lambda_n = \lambda_k^*$, тобто розглянемо ряд Діріхле

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-\alpha_0 \lambda_k^* + s \lambda_k^*\} \quad (9)$$

Можемо вважати, що послідовність (k_j) зростає настільки швидко, що $\lambda_{m_j}^* > \lambda_{k_{j-1}}^*$, де $m_j = [\frac{1}{2} k_j]$. Нехай $\sigma^* = \alpha_0 - \tau$. Тоді, завдяки (8), маємо

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_{m_j}^* \leq \lambda_k^* \leq \lambda_{k_j}^*} \exp\{-\alpha_0 \lambda_k^* + \sigma^* \lambda_k^*\} &= \sum_{\lambda_{m_j}^* \leq \lambda_k^* \leq \lambda_{k_j}^*} \exp\{-\tau \lambda_k^*\} \geq \\ &\geq \frac{1}{2} k_j \exp\{-\tau \lambda_{k_j}^*\} = \frac{1}{2} \exp\{\ln k_j - \tau \lambda_{k_j}^*\} \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Тому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-\alpha_0 \lambda_k^* + \sigma^* \lambda_k^*\} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\lambda_{m_j}^* \leq \lambda_k^* \leq \lambda_{k_j}^*} \exp\{-\alpha_0 \lambda_k^* + \sigma^* \lambda_k^*\} = +\infty.$$

Звідси випливає, що для ряду (9) $\sigma_a \leq \sigma^* = \alpha_0 - \tau$, тобто існує ряд Діріхле з класу $D(\Lambda)$, для якого рівність $\sigma_a = \alpha_0$ не виконується. Теорему 3 доведено.

З умовою $\ln n = o(\ln |a_n|)$, $n \rightarrow \infty$, ситуація дещо складніша. Ми розглядатимемо тільки випадки $\ln |a_n| / \ln n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$) і $\ln |1/a_n| / \ln n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$). Оскільки абсциса абсолютної збіжності ряду (1) співпадає з абсцисою збіжності додатного ряду

$$|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \exp(\sigma \lambda_n),$$

то можемо вважати, що коефіцієнти ряду (1) додатні і, якщо $\sigma < \sigma_a$, можемо впорядкувати члени ряду за неспаданням чи незростанням коефіцієнтів. Будемо додатково вимагати, щоб коефіцієнти були або зростаючими до $+\infty$, або спадними до 0. Тоді послідовність (λ_n) не обов'язково повинна бути зростаючою.

Іншими словами, нехай $A_1 = (a_n)$ — зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел, $a_1 > 1$, а $D^*(A_1)$ — клас рядів Діріхле (1) з заданими коефіцієнтами. Аналогічно, нехай $A_2 = (a_n)$ — спадна до 0 послідовність додатних чисел, $a_1 < 1$, а $D^*(A_2)$ — клас рядів Діріхле (1) з такими коефіцієнтами.

Теорема 4. Для того, щоб для кожного ряду Діріхле з $D^*(A_1)$ виконувалась рівність $\sigma_a = \alpha_0$, необхідно і досить, щоб $\ln n = o(\ln a_n)$, $n \rightarrow \infty$.

Доведення. Достатність умови $\ln n = o(\ln a_n)$, $n \rightarrow \infty$, випливає з наслідку 2. Припустимо тепер, що ця умова не виконується, тобто

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln a_n} > \tau > 0.$$

Тоді існує підпослідовність $A_1^* = (a_k^*)$, для якої справджуються нерівності (7) і (8) з $\ln a_k^*$ замість λ_k^* . Зауважимо, що оскільки $a_n > 1$, то $\alpha_0 \leq 0$. Виберемо $\alpha < 0$, і покладемо $\lambda_n = \ln^2 a_n$, якщо $a_n \neq a_k^*$, і $\lambda_n = \frac{1}{|\alpha|} \ln a_k^*$, якщо $a_n = a_k^*$. Для ряду Діріхле з такими показниками маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln a_n}{\ln^2 a_n} = 0,$$

якщо $a_n \neq a_k^*$, і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-|\alpha| \ln a_k^*}{\ln a_k^*} = \alpha < 0,$$

якщо $a_n = a_k^*$. Звідси випливає, що $\alpha_0 = \alpha$.

Оцінимо тепер знизу цю частину ряду, яка відповідає рівностям $a_n = a_k^*$, тобто розглянемо ряд Діріхле

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \exp \left\{ \frac{\sigma}{|\alpha|} \ln a_k^* \right\}. \quad (10)$$

Можемо вважати, що послідовність (k_j) зростає настільки швидко, що $a_{m_j}^* > a_{k_{j-1}}^*$, де m_j визначене, як при доведенні теореми 3. Нехай $\sigma^* = \alpha(1 + \tau)$. Тоді, завдяки (8), маємо

$$\begin{aligned} \sum_{a_{m_j}^* \leq a_k^* \leq a_{k_j}^*} a_k^* \exp \left\{ \frac{\sigma^*}{|\alpha|} \ln a_k^* \right\} &= \sum_{a_{m_j}^* \leq a_k^* \leq a_{k_j}^*} \exp \{-\tau \ln a_k^*\} \geq \\ &\geq \frac{1}{2} k_j \exp \{-\tau \ln a_{k_j}^*\} = \frac{1}{2} \exp \{\ln k_j - \tau \ln a_{k_j}^*\} \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Звідси, як при доведенні теореми 3, отримуємо, що для ряду (10) $\sigma_a \leq \alpha_0(1 + \tau)$, тобто існує ряд Діріхле з класу $D^*(A_1)$, для якого рівність $\sigma_a = \alpha_0$ не виконується. Теорему 4 доведено.

Теорема 5. Для того, щоб для кожного ряду Діріхле з $D^*(A_2)$ виконувалась рівність $\sigma_a = \alpha_0$, необхідно і досить, щоб $\ln n = o(\ln \frac{1}{a_n})$, $n \rightarrow \infty$.

Доведення. Достатність умови $\ln n = o(\ln \frac{1}{a_n})$, $n \rightarrow \infty$, випливає з наслідку 3. Припустимо тепер, що ця умова не виконується, тобто

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(1/a_n)} > \tau \in (0, 1).$$

Тоді існує підпослідовність $A_2^* = (a_k^*)$, для якої справджуються нерівності (7) і (8) з $\ln \frac{1}{a_k^*}$ замість λ_k^* . Оскільки $a_n < 1$, то $\alpha_0 \geq 0$. Виберемо $\alpha > 0$, і покладемо $\lambda_n = \sqrt{\ln \frac{1}{a_n}}$, якщо $a_n \neq a_k^*$, і $\lambda_n = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{a_k^*}$, якщо $a_n = a_k^*$. Для ряду з такими показниками, як при доведенні теореми 4, неважко показати, що $\alpha_0 = \alpha$, а для тієї частини ряду, яка відповідає рівностям $a_n = a_k^*$, тобто для ряду Діріхле

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \exp\left\{\frac{\sigma}{|\alpha|} \ln a_k^*\right\}. \quad (11)$$

при $\sigma^* = \alpha(1 - \tau)$, як вище, тепер маємо

$$\sum_{a_{m_j}^* \geq a_k^* \geq a_{k_j}^*} a_k^* \exp\left\{\frac{\sigma^*}{\alpha} \ln \frac{1}{a_k^*}\right\} = \sum_{a_{m_j}^* \leq a_k^* \leq a_{k_j}^*} \exp\left\{-\tau \ln \frac{1}{a_k^*}\right\} \geq \frac{1}{2} k_j \exp\left\{-\tau \ln \frac{1}{a_{k_j}^*}\right\} \geq \frac{1}{2}.$$

Звідси, як вище, отримуємо, що для ряду (11) $\sigma_a \leq \alpha_0(1 - \tau)$, тобто існує ряд Діріхле з класу $D^*(A_2)$, для якого рівність $\sigma_a = \alpha_0$ не виконується. Теорему 5 доведено.

Автор щиро дякує проф. О.Б. Скасківу за цінні зауваження.

ЛІТЕРАТУРА

1. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976. — 536с.
2. Шеремета М.Н. О поведении максимума модуля целого ряда Дирихле вне исключительного множества // Матем. заметки. — 1995. — Т.56, №2. — С.283–296.

Дрогобицький державний педінститут

Надійшло 1.09.97