ВІСНИК Університету «Україна»

Теоретичне та науково-методичне видання

№ 6, 2008

ПРО ГЕОМЕТРИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ

***О. І. Герасін**, канд. фіз.-мат. наук,*
доцент кафедри вищої математики Університету «Україна»

У цій роботі розглядаються задачі, що стосуються інтегральної геометрії й опуклого аналізу.

У класичній задачі Бюффона про голку вже неявно була впроваджена ідея введення мір у просторі прямих на площині. Нехай площина, розлінована сімейством паралельних прямих $[g]$, сусідні прямі сімейства розташовані на відстані d одна від одної. Голку v довжини $|v| < d$ «кидають» випадково на площину. Яка ймовірність p події, яка полягає у тому, що голка буде перетинатись із прямою сімейства l? Можна отримати еквівалентне формулювання, якщо голку і решітку поміняти ролями. Таким чином, ми приходимо до подвійної задачі про голки. Яка ймовірність p того, що випадкова пряма g, яка перетинає деяку область D, перетинає також голку v? Така задача має назву подвійною до класичної задачі Бюффона про голку. Досить докладно це питання розглянуто у книзі Кендалла, Морана [9]. Ясна річ, що розв'язання задачі Бюффона залежить від того, як проводиться експеримент, тобто від розподілу кінцевого розташування голки відносно решітки. Аналогічно розв'язок подвійної задачі залежить від розподілу Р випадкової прямої g. Різноманітні розподіли g уперше були розглянуті Бертраном з метою показати, що поняття «випадкової січної» допускає кілька інтерпретацій і тому породжує парадокси («парадокси Бертрана»).

Пізніше «природним розподілом» прямої g визначили міру, відносно якої конгруентні між собою геометричні події отримують рівні ймовірності. Потім було показано єдність диференціальних елементів, які інваріантні відносно групи всіх трансляцій і поворотів на площині (Пуанкаре, 1912) і просторі (Пойа, 1917).

А. Реньї (Reny, 1955) і Каащар (Caaszar, 1955) створили аксіоматичну теорію ймовірностей, яка була використана в задачах геометричної ймовірності. Теорія спирається на аксіоматику Колмогорова в комбінації з ідеєю умовних ймовірностей, властивості яких постулюються. Більш докладно див. [9].

Отже, тепер міра геометричних множин установлена, розв'язування окремих задач здійснюється без парадоксів або інших труднощів, що пов'язані з аксіоматизацією.

Важливий крок зробив 1891 р. Дж. Сільвестр [11] при спробі розв`язати задачу, яка стала відома пізніше як «задача Бюффона — Сильвестра»: на площині фіксовано n голок $v_1 \dots v_n$ у загальному положенні (тобто жодні три вершини голки не належать до однієї прямої). Ставиться питання: чому дорівнюють міри множини $\bigcup_1^n [v_i]$ і $\bigcap_i^n [v_i]$, де $[v]$ — сукупність прямих, що розділяють кінці v?

Сільвестр знайшов, що шукані інваріантні міри «виявляються діофантовими лінійними функціями сторін повної $2n$-кутної фігури, вершинами якої слугують n пар кінців голок». Повністю задачу було розв`язано Амбарцумяном [7]. Ним також була розв`язана задача, коли множину голок потрібно замінити набором опуклих множин. Для множин, що перебувають у загальному положенні, Амбарцумяном була знайдена формула [7], яка повністю описує ситуацію. Коли ж множини перебувають у незагальному положенні, виникають ситуації, які не охоплюються формулою Амбарцумяна.

Цим проблемам і присвячено роботу. Визначення основних понять, що використовуються тут, можна знайти у [1, 2, 3].

Під час досліджень, пов'язаних із цією роботою, виявилося, що природним апаратом для розв'язання задач, пов'язаних з інваріантними мірами, є $(n-1)$-опуклі множини, що їх запропонував у 1987 р. Зелінський.

Поняття опуклої множини традиційно визначали через відрізки прямих, що містяться у множині (внутрішнє визначення) або через напівпростори, які містять множину (зовнішнє визначення). У кожному випадку в основу покладали афінну (або лінійну) структуру над упорядкованим полем.

Множина $A \subset R^n$ називається $(n-1)$-опуклою, якщо через будь-яку точку $x \notin R^n \setminus A$ можна провести гіперплощину, яка не перетинає A [1].

Легко переконатись у тому, що замкнута або відкрита опукла множина є $(n-1)$-опуклою, а також, що кожна компонента $(n-1)$-опуклої множини — опукла.

У [4] доведена лема, яка відіграє важливу роль під час дослідження $(n-1)$-опуклих множин.

Лема 1. (Лема 2 [4]). Нехай $A \subset R^n$ — $(n-1)$-опукла множина. Тоді будь-які дві компоненти A утворюють $(n-1)$-опуклу множину.

Ця лема дає змогу звести дослідження $(n-1)$-опуклих множин, які складаються більш ніж із двох компонент, до дослідження $(n-1)$-опуклих множин, що складаються із двох компонент. Умова леми 1 необхідна, але недостатня для $(n-1)$-опуклості множини, яка складається з більш ніж із трьох компонент.

Означення 1. Нехай A — множина, що складається із двох непорожніх опуклих компонент A_1 і A_2, тоді для опуклої оболонки B множини A має місце рівність (див. у [2])

$$B = conv(A_1 \bigcup A_2) = \bigcup_{\substack{x_1 \in A_1 \\ x_2 \in A_2}} x_1 x_2.$$

Для кожного відрізка $x_1 x_2$ визначимо точки $s_1 \in Ä_1$ і, відповідно, найбільш близько розташовані до точок i. Визначимо множини S_i, $i=1, 2$ як сукупність точок, побудованих для всіляких відрізків $x_1 x_2$. Очевидно, $S_1 \subset \partial A_1$ та $S_2 \subset \partial A_2$.

У [3] викладено властивості множин S_i, $i = 1, 2$ для $(n-1)$-опуклих множин.

Теорема 1 (*Теорема 2* [3]). Нехай $A \subset R^n$ $(n-1)$-опукла множина, що складається із двох непорожніх опуклих компонент A_1 і A_2. Якщо A_2 — обмежене опукле тіло, то множина $\partial A_2 / S_2$ не порожня і замикання множини S_2 гомеоморфно кулі D^{n-1}.

Для множин, що не є $(n-1)$-опуклими, це неправильно.

Теорема 2. Нехай $A \subset R^n$ $(n-1)$-опукла множина, що складається із двох непорожніх компонент — обмежених опуклих тіл A_1 і A_2. Тоді точки замикання множин S_i, $i = 1, 2$, не можуть бути точками гладкості (див. [2] с. 101).

Критерій $(n-1)$-опуклості для множини, що складається із двох непорожніх компонент — обмежених опуклих тіл A_1 і A_2, надано у [3].

Теорема 3. (*Теорема 5* [3]). Замкнена множина $A \subset R^n$, яка складається із двох опуклих тіл — компонент A_1 і A_2, і в яких через кожну межову точку проходить хоча б одна гіперплощина, що опорна до цієї компоненти та не перетинає іншу компоненту, завжди є $(n-1)$-опуклою множиною.

Міра множини гіперплощин, інваріантна відносно групи всіх рухів R^n, визначається як інтеграл по множині від диференціальної форми [6, (12.40)]:

$$dL_{n-1} = d\rho \wedge \mathrm{d}u_{n-1}, \qquad (1)$$

де ρ — відстань від початку O до гіперплощини L_{n-1}. Щільність dL_{n-1} є елементом об'єму du_{n-1} одиничної сфери $\partial S^{n-1}(0)$ у кінці вектора e_n, перпендикулярного до L_{n-1} і який проходить через 0 (нуль).

Скалярний добуток $de_i e_j = \omega_{ij}$ дорівнює елементу дуги на одиничній сфері, що описує кінець вектора e_i у напрямку e_j [6, с. 168]:

$$\mathrm{d}u_{n-1} = \omega_{21} \wedge \omega_{31} \wedge \ldots \wedge \omega_{n1}.$$

Для площини диференціальна форма (1) має вигляд $d\rho \wedge d\varphi$ і є щільністю для множини прямих [6].

Міра множини всіх гіперплощин, які перетинають опуклу множину $K \subset R^n$

$$\mu^{n-1}(K) = k(n) \int_{\partial B_1(0)} \left(\int_{\partial B_1(0) \cap A(v_1)_1} \ldots \right.$$
$$\ldots \left(\int_{\partial B_1(0) \cap A_1(v_1) \cap \ldots \cap A(v_{v-1})} V_{n-v}\left(\rho_{v_1 v_2 \ldots v_v}(K)\right) d\sigma_v \right) \ldots$$
$$\left. \ldots d\sigma_2 \right) d\sigma_1,$$

де $v = 1, \ldots, n$, $\rho_{v_1 v_2 \ldots v_v}$ — ортогональна проекція множини K у напрямку підпростору, натягнутого на ортонормовані вектори $v_1 \ldots v_v$, що містять початок 0 (нуль) афінного підпростору $A(v_1) \cap A(v_2) \cap \ldots \cap A(v_v)$, $d\sigma_1$ — елемент площі сфери $dB_1(0)$, $d\sigma_v$ — елемент площі сфери $dB_1(0) \cap A(v_1) \cap A(v_2) \cap \ldots \cap A(v_v)$.

$$\mathrm{k(n)} = \frac{1}{\mathrm{n(n-1)\ldots(n-v+1)}\omega_{\mathrm{n-1}}\omega_{\mathrm{n-2}}\ldots\omega_{\mathrm{n-v}}},$$

де ω_n — n-вимірний об'єм n-вимірної кулі [2].

Особливий випадок площини у просторі R^3.

Нехай μ^2 σ-скінченна міра у просторі площин, інваріантна відносно групи всіх трансляцій і поворотів у R^3. Із [9] відомо, що:

$$\mu^2(K) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} l(\rho_{\vartheta\varphi}K)\sin\vartheta d\varphi d\vartheta,$$

де $K \subset R^3$ — компактна опукла множина, $\mu^2(K)$ — міра площин, які перетинають множину K (формули для деяких опуклих множин можна знайти в [6]; $l(\rho_{\upsilon\varphi}K)$ — довжина ортогональної проекції K на пряму, що проходить через (0,0,0) у напрямку $(\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi)$.

Для многогранника $M \subset R^3$ є інша формула:

$$\mu^2(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}(\pi - \alpha_i)l_i,$$

де l_i — довжина i-го ребра, α_i — двогранний кут між гранями, які утворюють (i-те) ребро.

Мінковським визначено суму опуклих множин $A \oplus$ у [2].

Означення 2. Нехай A і B — непусті опуклі множини у R^n, радіус-вектори точок $a \in A$ і $b \in B$ співвіднесені до початку координат О. Тоді (залежну від вибору О) множину

$$A \oplus B = \{ z R^n \mid z = a + b, a \in A, b \in B\}$$

називатимемо сумою $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$.

Позначимо через K^s множину, симетричну опуклій множині K відносно центра ваги множини K.

Означення 3. Нехай $B \subset R^n$ — множина, що складається із двох обмежених опуклих тіл B_1 і B_2, 0_1 і 0_2 — центри ваги тіл B_1 і B_2 відповідно і нехай $B_2^N = t(B_2 \otimes B_1^s)$ (i = 1, 2), де t — трансляція множин $B_2 \otimes B_1^s$, при якій центр тяжіння його збігається із центром тяжіння множини B_2. Позначимо чере B_2^D (i = 1, 2) множину $conv(0 \cup B_2^N)$, а $\mu^{n-1}(> B_1, B_2 <)$ — міру гіперплощин, що розділяють множини B_i (i = 1, 2) [8].

Далі маємо узагальнення формули Крофтона.

Теорема 4. Нехай $B \subset R^n$ — множина, що складається із двох обмежених опуклих тіл B_1 і B_2. Тоді міра множини всіх гіперплощин, що розділяють тіла B_1 і B_2,

$$\mu^{n-1}(> B_1, B_2 <) = \mu^{n-1}(B_2^D) - \mu^{n-1}(B_2^N).$$

Доказ надано [8].

Наслідок 1

Позначимо через B^c опуклу оболонку тіл B_1 і B_2, $BC = conv(B_1 \cup B_2)$. Після цього маємо:

а) міра множини всіх гіперплощин, що перетинають хоча б одне з тіл B_1 і B_2,

$$\mu^{n-1}(B^c) - (\mu^{n-1}(B_2^D) - \mu^{n-1}(B_2^N));$$

б) міра множини всіх гіперплощин, що перетинають тіло B_1 і не перетинають тіло B_2,

$$\mu^{n-1}(B^c) - (\mu^{n-1}(B_2^D) - \mu^{n-1}(B_2^N)) - \mu^2(B_2);$$

міра множини всіх гіперплощін, що перетинають тіло B_2 і не перетинають B_1,

$$\mu^{n-1}(B^c) - (\mu^{n-1}(B_2^D) - \mu^{n-1}(B_2^N)) - \mu^2(B_1);$$

в) міра множини всіх гіперплощин, що перетинають тіла B_1 і B_2,

$$\mu^2(B_1) + \mu^2(B_2) + \mu^{n-1}(B_2^D) - \\ - \mu^{n-1}(B_2^N) - \mu^{n-1}(B^c).$$

У термінах геометричних імовірностей ці результати можуть бути сформульовані таким чином. Нехай B_1 і B_2 — дві обмежені опуклі множини простору R^n. Якщо $H \subset R^n$ — випадково вибрана гіперплощина, що перетинає опуклу оболонку множини $B_1 \cup B_2$, то:

а) ймовірність того, що гіперплощина H перетинає хоча б одне з тіл B_1 і B_2,

$$P(H \cap B_1 \cup B_2 \neq \varnothing) = \\ = 1 - (\mu^{n-1}(B_2^D) - \mu^{n-1}(B_2^N))/\mu^{n-1}(B^c);$$

б) імовірність того, що гіперплощина H перетинає тіло B_1 і не перетинає тіла B_2,

$$P(H \cap B_1 \neq \varnothing, H \cap B_2 \neq \varnothing) = \\ = \mu^{n-1}(B^c) - (\mu^{n-1}(B^D{}_2) - \mu^{n-1}(B^N{}_2)) - \mu^{n-1}(B_2)/\mu^{n-1}(B^c);$$

й аналогічно

$$P(H \cap B_1 \neq \varnothing, H \cap B_2 \neq \varnothing) = \\ = \mu^{n-1}(B^c) - (\mu^{n-1}(B^D{}_2) - \mu^{n-1}(B^N{}_2)) - \mu^{n-1}(B_1)/\mu^{n-1}(B^c);$$

в) імовірність того, що гіперплощина H, перетинає тіла B_1 і B_2,

$$P(H \cap B_1 \cap B_2 \neq \varnothing) = \\ = (\mu^{n-1}(B_1) + \mu^{n-1}(B_2) - (\mu^{n-1}(B_2^D) - \\ - \mu^{n-1}(B_2^N) - \mu^{n-1}(B^c))/\mu^{n-1}(B^c);$$

г) ймовірність того, що гіперплощина H розділяє тіла B_1 і B_2,

$$P(H \cap B_2 \neq \varnothing, H \cap B_1 \neq \varnothing) = \\ = (\mu^{n-1}(B_2^D) - \mu^{n-1}(B_2^N))/\mu^{n-1}(B^c).$$

У [6, с. 194–197] вказано інтеграли середньої кривизни М(К) деяких опуклих множин. Існує таке співвідношення між інтегралами середньої кривизни та мірою множини всіх гіперплощин, що перетинають множину K:

$$\mu^2(\mathrm{K}) = \frac{\mathrm{M}(\mathrm{K})}{2\pi}.$$

Маємо наступні $\mu^2(K)$ опуклих множин $K \subset R^3$.

Приклад 1.

а) для кулі радіусом R:

$$\mu^2(K) = 2R;$$

б) для куба з довжиною ребра $\boldsymbol{a}$:

$$\mu^2(K) = 3a/2;$$

в) для прямого паралелепіпеда з довжиною ребер a_1, a_2, a_3:

$$\mu^2(K) = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2};$$

г) для конуса обернення з висотою h, з радіусом основи R:

$$\mu^2(K) = \frac{\pi R + h - R\operatorname{arctg}(h/R)}{2};$$

д) для півкулі:

$$\mu^2(K) = R(1 + \frac{\pi}{4});$$

е) для циліндра обернення з висотою h, з радіусом основи R:

$$\mu^2(K) = \frac{h + \pi R}{2};$$

ж) для плоскої опуклої множини K з периметром P, яку розглядаємо як опуклу множину в R^3:

$$\mu^2(K) = \frac{P}{4}.$$

Випадок кола з радіусом R:

$$\mu^2(K) = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2}.$$

Нехай нам дана в R^3 множина, що складається із двох обмежених опуклих множин. Розрахуємо міру множини всіх гіперплощин, що розділяють ці множини.

Приклад 2.

Множини C_1 і C_2 — два кола із радіусом R, що створені паралельним зсувом:

$$C_1 = \{(x,y,z) : x = 0;\ y^2 + z^2 = R^2\};$$

$$C_2 = \{(x,y,z) : x = h;\ y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Далі, згідно з теоремою 1, маємо:

$$C_2^N = \{(x, y, z) : x = h;\ y^2 + z^2 = (2R)^2\};$$

$$\mu^2(C_2^N) = \frac{4\pi R}{4} = \pi R,$$

де C_2^D — конус із вершиною в точці (0, 0, 0) і з основою — колом C_2^N, з радіусом $2R$.

Приклад 3.

Множини B_1 і B_2 — два квадрати, що створені паралельним зсувом:

$$B_1 = \{(x, y, z) : x = 0;$$
$$-\frac{a}{2} \le y \le \frac{a}{2}a;\ -\frac{a}{2} \le z \le \frac{a}{2}\};$$
$$B_2 = \{(x, y, z) : x = h;$$
$$-\frac{a}{2} \le y \le \frac{a}{2}a;\ -\frac{a}{2} \le z \le \frac{a}{2}\}.$$

Згідно з теоремою 1 маємо:

$$B_2^N \{(x, y, z) : x = h;\ -a \le y \le a;$$
$$-a \le z \le a\},$$

де B_2^D — піраміда з вершиною у точці (0, 0, 0) і основою — квадратом B_2^N зі стороною $2a$. Бокові ребра піраміди мають довжину

$$|L| = \sqrt{2a^2 + h^2}.$$

$$\mu^2(B_2^D) = \frac{1}{\pi}\left(\arccos\left(\frac{a^2}{a^2 + 4h^2}\right)\cdot\sqrt{2a^2 + h^2} + \right.$$
$$\left. + 2a\left(\pi - arctg\left(\frac{h}{a}\right)\right)\right);$$

$$\mu^2(>B_1, B_2<) = \mu^2(B_2^D) - \mu^2(B_2^N) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\arccos\left(\frac{a^2}{a^2 + h^2}\right)\cdot\sqrt{2a^2 + h^2} + \right.$$
$$\left. + 2a\left(\pi - arctg\left(\frac{h}{a}\right)\right)\right) - 2a.$$

Основним результатом цієї роботи є теорема 5.

Теорема 5. Нехай тіла B_1 і B_2 — дві півкулі, радіусом R, симетрично розташовані на відстані h. Тоді:

а) міра множини всіх площин, що розділяють ці множини,

$$\mu^2(>B_1, B_2<) = \frac{h - 2Rarctg(h/2R)}{2};$$

б) міра множини всіх площин, що перетинають множину $conv(B_1 \cup B_2)$,

$$\mu^2(conv(B_1 \bigcup B_2)) = \frac{h + 4R}{2}.$$

Доведення:

$$B_1 = \{(x, y, z) : 0 \le x \le R,\ -R \le y \le R,$$
$$-R \le z \le R,\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$
$$B_2 = \{(x, y, z) : h \le x \le h + R,$$
$$-R \le y \le R,\ -R \le z \le R,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$
$$B_2^N = \{(x, y, z) : h \le x \le h + 2R,$$
$$-2R \le y \le 2R,\ -2R \le z \le 2R,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = (2R)^2\}.$$

Приклад 1 (д) дає можливість обчислити

$$\mu^2(B_2^N)=2R\left(1+\frac{\pi}{4}\right).$$

Розглянемо уважно тіла B_1 і B_2. Згідно з теоремою 3 вони є 2-опуклою множиною. Множини S_i, де $i=1$, 2, це два кола — тіла C_1 і C_2 з радіусом R (приклад 2).

$$\mu^2(>B_1,B_2<)=\frac{h-2R\operatorname{arctg}(h/2R)}{2}.$$

B_2^D — фігура, що створена об'єднанням конуса з вершиною у точці (0, 0, 0) з основою кола (приклад 2), з радіусом $2R$ і тілом цього прикладу, тобто півкулею радіуса $2R$. Але множина площин, що розділяють B_1 і B_2, повністю збігається із множиною площин, що розділяють C_1 і C_2 прикладу 2. Це і є доказом пункта ***а*** теореми 4.

Далі розглянемо множину $conv(B_1\cup B_2)$. Вона складається із циліндра обернення з висотою h, радіусом основи R (див. приклад 1, в) та двох півкуль радіуса R, що «приклеєні» до основ циліндра. Використаємо властивості мір

$$\mu^2=(A_1\cup A_2)=\mu^2(A_1)+\mu^2(A_2)-\mu^2(A_1\cap A_2).$$

Звідси маємо

$$\mu^2=conv(B_1\cup B_2)=\frac{h+\pi R}{2}+R(1+\frac{\pi}{4})-\frac{\pi R}{2}+$$

$$+R(1+\frac{\pi}{4})-\frac{\pi R}{2};$$

$$\mu^2=(conv(B_1\cup B_2)=\frac{h+4R}{2}.$$

Доведення закінчено.

Наслідок 2: Нехай тіла B_1 і B_2 — дві півкулі радіуса R, симетрично розташовані на відстані h. Тоді:

а) ймовірність того, що гіперплощина H, яка розділяє тіла B_1 і B_2,

$$P(H\cap B_2=\varnothing,\ H\cap B_1=\varnothing)=\frac{h-2R\operatorname{arctg}(h/2R)}{h+4R};$$

б) ймовірність того, що гіперплощина H перетинає тіло B_1 і не перетинає тіла B_2,

$$P(H\cap B_1=\varnothing,\ H\cap B_2=\varnothing)=$$

$$=\frac{4R-\pi R+4R\operatorname{arctg}(h/2R)}{h+4R};$$

в) ймовірність того, що гіперплощина H перетинає тіла B_1 і B_2 одночасно,

$$P(H\cap B_1\cap B_2=\varnothing)=\frac{\pi R-2R\operatorname{arctg}(h/2R)}{h+4R}.$$

Література

1. *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. — К. : Наук. думка, 1993. — 264 с.

2. *Лехтвейс К.* Выпуклые множества. — М. : Наука, 1965. — 336 с.

3. *Герасин А. И.* Об (n – 1)-выпуклых множествах // Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии: сб. Науч. тр. — К. : Ин-т математики АН УССР, 1988. — С. 8–14.

4. *Герасин А. И.* Обозримость (n – 1)-выпуклых множеств / Комплексный анализ, алгебра и топология : сб. науч. тр. — К. : Ин-т математики АН УССР, 1990. — С. 20–28.

5. *Герасин А. И.* Об инвариантных мерах. — Л., 1994. — 6 с. — (Препринт АН Украины. Ин-т математики).

6. *Сантало Л.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности. — М. : Наука,1983. — 360 с.

7. *Амбарцумян Р. И., Мекке Л., Штоян Л.* Введение в стохастическую геометрию. — М. : Наука, 1989. — 400 с.

8. *Герасин А. И.* О мерах на (n – 1)-выпуклых множествах. — К.,1984. — 28 с. — (Препринт АН Украины. Ин-т математики: 94.1)

9. *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. — М. : Наука, 1972. — 192 с.

10. *Матерон Ж.* Случайные множества и интегральная геометрия. — М. : Мир, 1978. — 320 с.

11. *Silvestr J. J.* On a funicular solution of Buffon's «Problem of the needle» in its most general form // Acta Math. — 1890. — N 14. — P. 185–205.

12. *Gerasin A. I.* The Solution to the Buffon — Silvester Problem in R^n . Bogolubov readings 2007. Zhitomir–Kiev (19 august – september 2007). Program and abstracts. — 2007. — P. 26.

Ключові слова: задача Бюффона — Сильвестра, інваріантні міри, (n – 1)-опуклі множини, геометричні ймовірності, формула Крофтона, міра гіперплощин.

Key words: Buffon — Silvestr problem, invariant measure, (n – 1)-convex body, geometrical probability, Crofton formula, measure of hyperplanes.

В работе рассматриваются задачи, связанные с интегральной геометрией и выпуклым анализом. Обобщается формула Крофтона на многомерный случай. Подробно рассматривается вариант трехмерного пространства. Делаются расчеты формул для некоторых конкретных примеров множеств.

In this paper presented problems related to integral geometry and convex analysis. The generalization Crofton formula for three-dimensional space is considered in detail. The formulas for some convex sets was calculated.