

Б.М. ГОНЧАРЕНКО, доктор технічних наук
О.П. ЛОБОК, кандидат фізико-математичних наук
 Національний університет харчових технологій

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ РЕГУЛЯТОРІВ ДЛЯ ДИНАМІЧНОГО ОБ'ЄКТА ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглянуті задачі аналітичного конструювання оптимальних регуляторів для об'єкта другого порядку на скінченному часовому проміжку з заданими детермінованими збуреннями при інтегральному квадратичному критерії якості. Досліджена залежність критерію якості від його вагових множників та від параметрів моделі об'єкта.

Ключові слова: оптимальний регулятор, зворотний зв'язок, лінійна динамічна система, принцип максимуму Понтрягіна, функція Гамільтона, інтегральний квадратичний функціонал, матричне рівняння типу Ріккати.

Рассмотрены задачи аналитического конструирования оптимальных регуляторов для объекта второго порядка на конечном временном промежутке с заданными детерминированными возмущениями при интегральном квадратичном критерии качества. Исследована зависимость критерия качества от его весовых множителей и от параметров модели объекта.

Ключевые слова: оптимальный регулятор, обратная связь, линейная динамическая система, принцип максимума Понтрягина, функция Гамильтона, интегральный квадратичный функционал, матричное уравнение типа Риккати.

Більшість технологічних об'єктів керування в харчовій промисловості є аперіодичними і статичними. Відомий і досліджений розв'язок задачі оптимізації керування за його якістю для статичних об'єктів першого порядку без запізнювання. Поширена апроксимація динамічних властивостей об'єкта керування послідовним з'єднанням ланки чистого запізнювання та аперіодичної (першого порядку) ланки вимагає нелінійного апарату оптимізації керування такими об'єктами та виключає аналітичне конструювання оптимальних регуляторів для них. Апроксимація динамічних властивостей реальних об'єктів аперіодичною ланкою другого порядку, в якій реальне транспортне запізнювання об'єкта замінюється на перехідне в ланці, дозволяє, залишаючись в рамках лінійної теорії, здійснити аналітичне конструювання (синтез) оптимальних регуляторів, тобто знайти вирази керувальних сигналів (керувань), які забезпечують відповідність встановленим критеріям якості керування та враховують відхилення параметру стану, збурення та вплив параметрів моделі об'єкта керування.

Розглянемо деякий лінійний об'єкт керування, модель якого може бути представлена диференціальним рівнянням стану другого порядку виду

$$T_2 \ddot{x}(t) + T_1 \dot{x}(t) + \alpha x(t) + \beta = ku(t), \quad t_0 < t \leq T_k \quad (1)$$

з заданими початковими умовами

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0,$$

де $x(t)$ — деякий параметр стану об'єкта; $u(t)$ — функція керування (керувальне діяння на об'єкт); T_2, T_1, α, k — задані коефіцієнти моделі об'єкта, зокрема T_2, T_1 — сталі часу об'єкта за умови $\alpha = 1$; t_0, T_k —

відповідно початковий та кінцевий моменти часу керування об'єктом; $(x_0, \dot{x}_0)$ — відомий початковий стан об'єкта, β — детерміноване збурення об'єкта.

Розглянемо також квадратичний функціонал за умови додатності його членів — інтегральний критерій якості керування об'єктом, який враховує відхилення стану об'єкта від бажаного (перша складова), швидкість його зміни (друга складова), керувальне діяння (третья складова) та стан об'єкта в момент часу T_k закінчення керування (четверта та п'ята складові критерію)

$$I(u) = \int_{t_0}^{T_k} (p_1(x(t) - g_1)^2 + p_2(\dot{x}(t) - g_2)^2 + r u^2(t)) dt + q_1(x(T_k) - h_1)^2 + q_2(\dot{x}(T_k) - h_2)^2, \quad (2)$$

де (g_1, g_2) — бажаний (номінальний) стан об'єкта на протязі періоду керування, а (h_1, h_2) — бажаний стан в кінцевий момент часу; $p_1, p_2, q_1, q_2 \geq 0, r > 0$, — задані вагові множники, які визначаються, наприклад, шляхом експертних оцінок.

В роботі пропонується розв'язання задачі знаходження оптимального керування $u^0(t)$, при якому критерій (2) досягає свого мінімального значення на розв'язках рівняння (1), тобто $I(u^0) = \min I(u)$. Зауважимо, що для спрощення розв'язання задачі обмеження не накладені ні на стан об'єкта, ні на функцію керування, а в реальних об'єктах можуть мати місце. Для розв'язання задачі перепишемо рівняння (1) в канонічній векторно-матричній формі після заміни змінних $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t)$, і позначення

$$a = -\frac{T_1}{T_2}, \quad b = -\frac{\alpha}{T_2}, \quad c = -\frac{\beta}{T_2}, \quad d = \frac{k}{T_2}.$$

Тоді рівняння (1) набуває вигляду наступної системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = ax_2(t) + bx_1(t) + c + du(t) \end{cases}$$

або — в векторно-матричній формі

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f, \\ x(t_0) = x^0 \end{cases} \quad (3)$$

де

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}, x^0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Враховуючи позначення (4), критерій (2) перепишемо у вигляді

$$I(u) = \int_{t_0}^{T_k} ((x(t) - g)^T P(x(t) - g) + ru^2(t))dt + (x(T_k) - h)^T Q(x(T_k) - h), \quad (5)$$

де

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$$

«Т» у степені — операція транспонування.

Для розв'язання задачі оптимального керування (3), (5) використаємо принцип максимуму Понтрягіна [1, 2, 5], у відповідності до якого складемо функцію Гамільтона виду

$H(u, x, \lambda) = -((x - g)^T P(x - g) + ru^2) + \lambda^T (Ax + Bu + f)$, де $\lambda = \lambda(t)$ — вектор-функція, що задовольняє наступній спряженій системі рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{\partial H(u, x, \lambda)}{\partial x}, \\ \lambda(T_k) = -\frac{\partial}{\partial x(T_k)} ((x(T_k) - h)^T Q(x(T_k) - h)) \end{cases} \quad (6)$$

та узагальнює відхилення поточного стану об'єкта від бажаного в процесі керування.

Оптимальне керування знаходиться за умови максимізації функції Гамільтона $H(u, x, \lambda)$ по u , тобто за умови $H(u, x, \lambda) \rightarrow \max$. Використовуючи для розв'язання останньої задачі необхідну умову екстремуму, одержимо оптимальне керування у вигляді

$$u^0 = \frac{1}{2r} B^T \lambda. \quad (7)$$

Приймаючи його до уваги, а також системи спряжених рівнянь (3) та (6), можна показати, що спряжена вектор-функція λ набуває вигляду

$$\lambda = -2Sx + 2m$$

де $S = S(t) = S^T(t) > 0$ — симетрична додатковизначена матриця, яка задовільняє диференціальне матричне рівняння типу Ріккати виду

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A^T S - SA + \frac{1}{r} SBB^T S - P, \\ S(T_k) = Q, \end{cases} \quad (8)$$

$m = m(t)$ — є розв'язок наступної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = A^T m + \frac{1}{r} SBB^T m + Sf - Pg, \\ m(T_k) = Qh, \end{cases} \quad (9)$$

що враховує збурення об'єкта керування.

При цьому оптимальне керування представляється у вигляді зворотного зв'язку від стану об'єкта x :

$$u^0 = -\frac{1}{r} B^T Sx + \frac{1}{r} B^T m, \quad (10)$$

що за формою наближено відповідає типовому П-закону регулювання, але представлене в матричній формі.

Після ряду векторно-матричних перетворень критерій якості (5) при оптимальному керуванні u^0 можна представити у вигляді

$$I(u^0) = \int_{t_0}^{T_k} \left(g^T P g - \frac{1}{r} m^T B B^T m - 2m^T f \right) dt + x^T(t_0) S(t_0) x(t_0) - 2x^T(t_0) m(t_0) + h^T Q h \quad (11)$$

Вираз (11) на відміну від (5) не залежить від стану об'єкта x і отже, його можна обчислити та проаналізувати ще до початку процесу керування.

З використанням математичного пакету MatLab проводився аналіз перехідних процесів об'єкта (1) (рис. 1) при оптимальному за відхиленням керуванні $u^0(t)$ (10). За характером перехідного процесу з наявною статичною похибкою підтверджено наближеність оптимального керування до П-закону регулювання, але на відміну від нього при керуванні спроектованим матричним регулятором (10) враховується (за дією) і швидкість зміни параметру стану об'єкта.

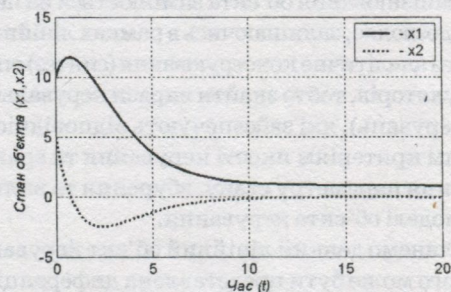


Рис. 1. Графіки перехідних процесів $x_1(t) = x(t)$ та $x_2(t) = \dot{x}(t)$

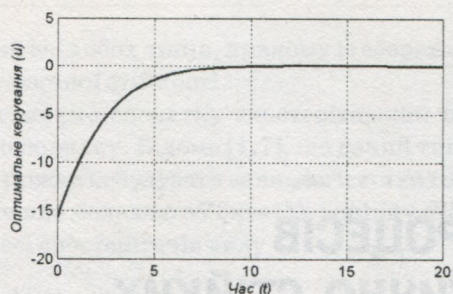
Дослідження оптимального керування $u^0(t)$ (10), наприклад, при наступних вихідних даних:

$$T_2 = 60, T_1 = 506, \alpha = 1, \beta = 1, k = 20, t_0 = 0,$$

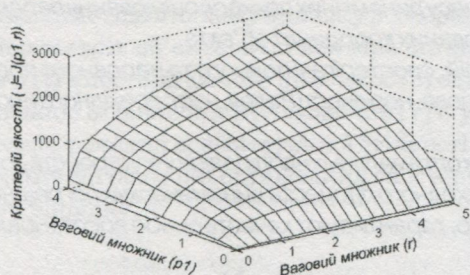
$$T = 20, x_0 = 10, \dot{x}_0 = 5, p_1 = 2, p_2 = 1, r = 1,5,$$

$$q_1 = 1, q_2 = 1, g_1 = 1, g_2 = 0, h_1 = 1, h_2 = 0$$

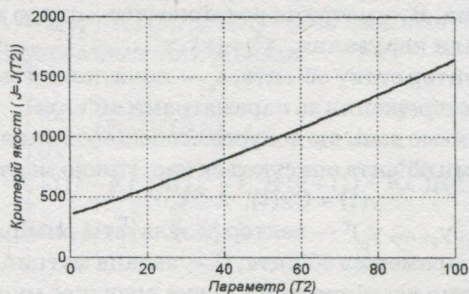
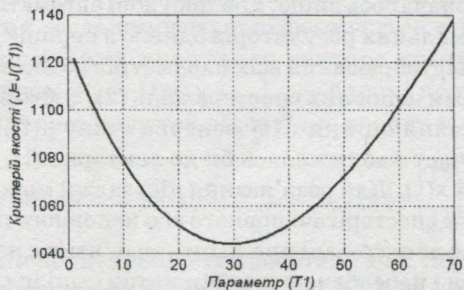
теж підтвердило пропорційний характер керування (рис. 2).

Рис. 2. Графік функції оптимального керування $u^0(t)$

На рис. 3 наведено графік залежності оптимального значення критерію якості $I(u^0)$ (11) від його вагових множників, що характеризують поточне відхилення параметру стану.

Рис. 3. Залежність значення критерію якості (11) від вагових множників p_1 та r

На рис. 4,5 наведені графіки залежності оптимального значення критерію якості $I(u^0)$ від параметрів моделі об'єкта (1) — сталих часу T_1, T_2 . Очевидний екстремальний вплив сталої часу T_1 при першій похідній параметру стану $x(t)$ в той час, як стала часу T_2 при другій похідній має лінійний вплив.

Рис. 4. Залежність значення критерію якості (11) від параметра моделі T_2 Рис. 5. Залежність значення критерію якості (11) від параметра моделі T_1

Вплив параметра моделі k — коефіцієнта передачі каналу керування представлено на рис. 6. Очевидне поліпшення якості керування для об'єктів з великим значенням k .

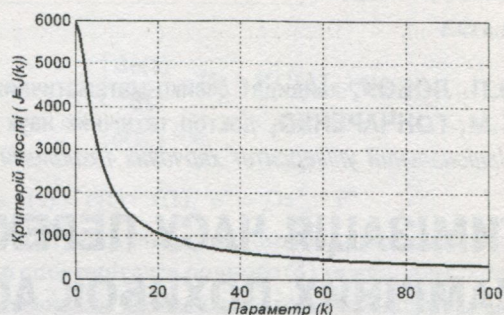
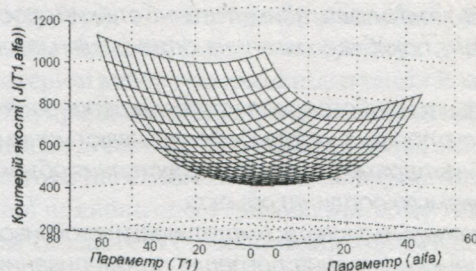
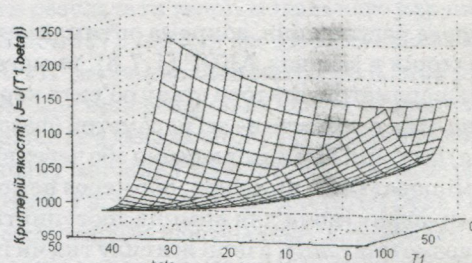


Рис. 6. Залежність значення критерію якості (11) від параметра моделі

Рис. 7 та рис. 8 демонструють чутливість критерію якості (11) до змін параметрів моделі об'єкта керування (α, T_1) та збурення β . Наявність такої чутливості свідчить про недостатню робастність синтезованого регулятора.

Рис. 7. Залежність значення критерію якості (11) від параметрів моделі T_1 та α Рис. 8. Залежність значення критерію якості (11) від параметрів моделі T_1 та β

Висновок. Аналітично синтезований оптимальний векторно-матричний регулятор дозволяє ефективно керувати об'єктом з метою підтримки його параметрів стану на заданому (номінальному) рівні за законом, наближеним до стандартного ПІ-закону. До недоліку регулятора можна віднести чутливість стану об'єкта та значення критерію якості до параметрів моделі об'єкта, що може свідчити про недостатню робастність одержаного оптимального регулятора.

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. — М.: Высшая школа, 1989. — 263 с.
2. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. — М.: Высшая школа, 1989. — 447 с.
3. Кириченко Н.Ф. Введение в теорию стабилизации движения. — К.: Выща школа, 1978. — 184 с.
4. Рей У. Методы управления технологическими процессами. — М.: Мир, 1983. — 368 с.
5. Тютюнник А.Г. Оптимальні і адаптивні системи автоматичного керування. — Житомир.: ЖІТІ, 1998. — 512 с.

Одержана редколегією 18.03.08 р.