

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

**ПРИКЛАДНАЯ
МАТЕМАТИКА
И МЕХАНИКА**

Том 45

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

6

МОСКВА • 1981

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТОЙ КОЛЕБАНИЙ ОРТОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ И ЕЕ КОНЕЧНО-МЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Медведев Н. Г.

Изучаются вопросы оптимизации в задачах о колебании ортотропных оболочек вращения переменной толщины, когда управлениями являются толщина и радиус кривизны образующей оболочки при ограничениях на основную собственную частоту колебаний, толщину, внутренний объем и другие параметры. Доказывается существование решения рассматриваемой задачи и возможность ее аппроксимации последовательностью конечно-мерных задач.

Некоторые вопросы оптимального управления в задачах о колебании пластин переменной толщины, когда управлением служит толщина, рассмотрены в работах [1—4].

1. Основные предположения. Пусть Ω — прямоугольная область в R^2 : $\Omega = \{(\varphi, z) \mid 0 < \varphi < 2\pi, 0 < z < L\}$; $H_0 = W_{2,0}^1(\Omega) \times W_{2,0}^1(\Omega) \times W_{2,0}^2(\Omega)$ — прямое произведение пространств Соболева С. Л. [5], периодических по φ с периодом 2π функций: $H_0 = \{\omega = (u, v, w) \mid u, v \in W_{2,0}^1(\Omega), w \in W_{2,0}^2(\Omega)\} (W_{2,0}^1(\Omega))$ — подпространство в пространстве $W_2^1(\Omega)$ с нормой пространства $W_2^1(\Omega)$.

Обозначим через H замыкание в норме

$$(1.1) \quad \|\omega\|_H^2 = \|u\|_{W_{2,0}^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{W_{2,0}^1(\Omega)}^2 + \|w\|_{W_{2,0}^2(\Omega)}^2$$

множества бесконечно дифференцируемых в полосе $0 < z < L$, $-\infty < \varphi < \infty$ периодических по φ функций $\omega \in H_0$, удовлетворяющих граничным условиям решаемой задачи [6].

Введем в рассмотрение множество

$$(1.2) \quad U = \{t = (h, r) \mid h \in C(\bar{\Omega}), r \in C^3[0, L], e_1 \leq h \leq e_2, e_3 \leq r \leq e_4\}$$

где e_i — положительные постоянные, которое снабжаем топологией, порожденной произведением сильных топологий пространств $C(\bar{\Omega})$ и $C^3[0, L]$.

Определим далее на $H \times H$ семейства билинейных симметричных форм $a_t(\omega', \omega'')$ и $b_t(\omega', \omega'')$, зависящих от параметра $t \in U$:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} a_t(\omega', \omega'') = & \int_{\Omega} \{D_1 [E_1 \varepsilon_1' \varepsilon_1'' + \nu_2 E_1 (\varepsilon_1' \varepsilon_2'' + \varepsilon_1'' \varepsilon_2') + E_2 \varepsilon_2' \varepsilon_2'' + \\ & + (1 - \nu_1 \nu_2) G \varepsilon_3' \varepsilon_3''] + D_2 [E_1 \varepsilon_4' \varepsilon_4'' + \nu_2 E_1 (\varepsilon_4' \varepsilon_5'' + \varepsilon_4'' \varepsilon_5') + \\ & + E_2 \varepsilon_5' \varepsilon_5'' + 4(1 - \nu_1 \nu_2) G \varepsilon_6' \varepsilon_6'']\} A_1^2 r d\Omega \\ b_t(\omega', \omega'') = & \int_{\Omega} \rho h (u' u'' + v' v'' + w' w'') A_1^2 r d\Omega; \quad \rho = \text{const} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1.4) \quad \varepsilon_1(\omega, r) &= \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2(\omega, r) = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{r'}{A_1^2 r} u - \frac{w}{R_2} \\
\varepsilon_3(\omega, r) &= \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{r'}{A_1^2 r} v, \\
\varepsilon_4(\omega, r) &= -\frac{1}{A_1^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{A_1^2} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{R_1} \right) \\
\varepsilon_5(\omega, r) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{v}{R_2} \right) - \frac{r'}{A_1^2 r} \left(\frac{1}{A_1^2} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{R_1} \right), \\
\varepsilon_6(\omega, r) &= -\frac{1}{A_1^2 r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial z} - \frac{r'}{r} \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{1}{R_1 r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \\
&\quad - \frac{1}{R_2 A_1^2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{r'}{r} v \right) \\
r' &= \frac{dr}{dz}, \quad A_1^2 = (1 + r'^2)^{1/2}, \quad R_1 = \left(\frac{d^2 r}{dz^2} \right)^{-1} A_1^6, \quad R_2 = -r A_1^2 \\
D_1(h) &= \frac{h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad D_2(h) = \frac{h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}
\end{aligned}$$

Здесь ε_i' , ε_i'' — компоненты деформации оболочки вращения [7], порожденные смещениями срединной поверхности ω' , $\omega'' \in H$ и зависящие от радиуса образующей $r(z) \in C^3[0, L]$, коэффициенты D_1 и D_2 зависят от толщины оболочки $h(z, \varphi) \in C(\bar{\Omega})$, E_i , ν_i , G — соответственно модули упругости, коэффициенты Пуассона и модуль сдвига, причем $E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1$, L — длина оболочки, ρ — плотность материала оболочки.

Вводим следующие допущения:

- 1) E_i , ν_i , G — положительные постоянные, причем $|\nu_i| < 1$, $i = 1, 2$;
- 2) при любых $t \in U$, $\omega \in H$ из условий $\varepsilon_i(\omega, r) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) следует, что $\omega = 0$.

Допущение 1 справедливо для ортотропных материалов, а допущение 2 — для случая, когда оболочка не имеет жестких смещений, т. е. закреплена так, что из равенства нулю деформаций следует равенство нулю перемещений (подробнее см. [6]).

Аналогично тому, как это сделано в [6], можно показать, что при выполнении допущений 1, 2 форма $a_t(\omega', \omega'')$ порождает в H скалярное произведение и норму, эквивалентную норме (1.1), т. е. справедливы неравенства

$$(1.5) \quad m_{1t} \|\omega\|_{H^2}^2 \leq a_t(\omega, \omega) \leq M_{1t} \|\omega\|_{H^2}^2, \quad \forall \omega \in H, \quad \forall t \in U$$

где m_{1t} , M_{1t} — положительные постоянные, зависящие от t .

Очевидно также, что форма $b_t(\omega', \omega'')$ порождает в H скалярное произведение и норму, эквивалентную норме пространства $H_b = (L_2(\Omega))^3$:

$$(1.6) \quad m_2 \|\omega\|_{H_b}^2 \leq b_t(\omega, \omega) \leq M_2 \|\omega\|_{H_b}^2, \quad \forall \omega \in H, \quad \forall t \in U;$$

$$m_2, M_2 = \text{const} > 0$$

2. Задача о собственных частотах и формах колебаний оболочки. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$(2.1) \quad a_t(\omega, \omega') = \lambda b_t(\omega, \omega'), \quad \forall \omega' \in H$$

С учетом соотношений (1.5) и компактности вложения

$$W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega) \times W_2^2(\Omega) \rightarrow (L_2(\Omega))^3$$

из известных результатов [8] получаем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть выполнены допущения 1, 2. Тогда для любых $t \in U$ спектральная задача (2.1) имеет последовательность ненулевых решений $\omega_k \in H$, отвечающих последовательности собственных значений λ_k , таких, что $a_t(\omega_k, \omega) = \lambda_k b_t(\omega_k, \omega)$, $\forall \omega \in H$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, при этом

$$(2.2) \quad \lambda_k = \inf \left\{ \frac{a_t(\omega, \omega)}{b_t(\omega, \omega)} \mid \omega \in H, \omega \neq 0, b_t(\omega, \omega_i) = 0, 1 \leq i \leq k-1 \right\}$$

Задача (2.1) связана с определением собственных частот и форм колебаний ортотропных оболочек вращения переменной толщины, удовлетворяющих некоторым условиям закрепления, обеспечивающих выполнение допущения 2 [6].

3. Бесконечномерная задача оптимального управления. Очевидно, что основная собственная частота λ_1 , соответствующая ей собственная форма колебаний ω_1 и вес оболочки P зависят от параметра $t = (h, r)$. Обозначая эти зависимости λ_t , ω_t и P_t , с учетом (2.2) получим

$$(3.1) \quad \lambda_t = \frac{a_t(\omega_t, \omega_t)}{b_t(\omega_t, \omega_t)} = \inf_{\substack{\omega \in H \\ \omega \neq 0}} \frac{a_t(\omega, \omega)}{b_t(\omega, \omega)}; \quad P_t = \int_{\Omega} \rho A_1^2 r h d\Omega$$

Будем управлять параметром t с тем, чтобы получить минимальный вес оболочки P_t , так, чтобы основная собственная частота λ_t была не ниже заданной λ_- при ограничениях сверху и снизу на толщину оболочки h и радиус образующей r . В связи с этим введем в рассмотрение пространство

$$V = C(\bar{\Omega}) \times C^3[0, L] = \{t = (h, r) \mid h \in C(\bar{\Omega}), r \in C^3[0, L]\}$$

Пусть E — рефлексивное банахово пространство, такое, что $E \subset V$, вложение E в V компактно. В частности, E можно выбрать в виде

$$E = W_{p_1}^1(\Omega) \times W_{p_2}^4(0, L) \quad (p_1 > 2, p_2 > 4)$$

Определим допустимое множество управлений выражением

$$(3.2) \quad U_{\partial} = \{t = (h, r) \mid t \in E, \|t\|_E \leq C, h_- \leq h \leq h_+, r_- \leq r \leq r_+, \lambda_- \leq \lambda_t, \psi_j(t, \omega_t) \leq 0, j = 1, 2, \dots, l; e_1 < h_- < h_+ < e_2, e_3 < r_- < r_+ < e_4\}$$

$(t, \omega) \rightarrow \psi_j(t, \omega)$ — непрерывные отображения $U \times H$ (с топологией, порожденной произведением сильных топологий пространств $C(\bar{\Omega})$, $C^3[0, L]$ и H) в R .

Здесь C, h_-, h_+, r_-, r_+ — положительные постоянные, e_i — постоянные из (1.2).

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти функцию $t_0 = (h_0, r_0)$, такую, что

$$(3.3) \quad t_0 \in U_{\partial}, \quad P_{t_0} = \inf_{t \in U_{\partial}} P_t = \inf_{t \in U_{\partial}} \int_{\Omega} \rho A_1^2 r h d\Omega$$

Отметим, что неравенства $\psi_j(t, \omega) \leq 0$ накладывают ограничения на другие параметры [ортотропной оболочки] вращения в зависимости от решаемой задачи. Например, в случае ограничения на минимальный внутренний объем оболочки вращения V_∂ :

$$(3.4) \quad \psi_1 = V_\partial - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(r - \frac{h}{2} \right)^2 d\Omega$$

Лемма. Функция $t \rightarrow \lambda_t$ (3.1) является непрерывным отображением из U , определяемом (1.2), в R .

Доказательство. Пусть $t_0 = (h_0, R_0)$ — произвольный элемент из U , $\{t_n\} = \{(h_n, r_n)\}$ — последовательность элементов, такая, что

$$(3.5) \quad t_n \in U, \quad t_n \rightarrow t_0 \text{ в } U$$

Для $n = 0, 1, 2, \dots$ введем следующие обозначения:

$$(3.6) \quad \lambda^{(n)} = \lambda_{t_n}, \quad \omega_n = \omega_{t_n}, \quad a_n(\omega', \omega'') = a_{t_n}(\omega', \omega''), \quad b_n(\omega', \omega'') = b_{t_n}(\omega', \omega'')$$

Из соотношений (1.3), (1.4), (3.5), (3.6) имеем

$$(3.7) \quad |a_n(\omega, \omega) - a_0(\omega, \omega)| \leq c_n' \|\omega\|_{H^2}^2; \quad |b_n(\omega, \omega) - b_0(\omega, \omega)| \leq c_n'' \|\omega\|_{H_b}^2 \\ \forall \omega \in H, \quad c_n' \rightarrow 0 \text{ и } c_n'' \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Из (1.5), (1.6), (3.7) вытекают неравенства

$$(3.8) \quad m_1 \|\omega\|_{H^2}^2 \leq a_n(\omega, \omega) \leq M_1 \|\omega\|_{H^2}^2, \quad \forall \omega \in H, \quad n = 0, 1, 2, \dots, m_1, \\ M_1 = \text{const} > 0$$

Пусть ω' — произвольный элемент из H . Тогда с учетом (1.6), (3.8) имеем

$$(3.9) \quad \frac{m_1 \|\omega'\|_{H^2}^2}{M_2 \|\omega'\|_{H_b}^2} \leq \frac{a_n(\omega', \omega')}{b_n(\omega', \omega')} \leq \frac{M_1 \|\omega'\|_{H^2}^2}{m_2 \|\omega'\|_{H_b}^2} = q; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Принимая во внимание соотношения (3.1), (3.6), (3.9), получим

$$(3.10) \quad \lambda^{(n)} = \inf_{\omega \in Q} \frac{a_n(\omega, \omega)}{b_n(\omega, \omega)}; \quad Q = \left\{ \omega \mid \omega \in H, \quad \omega \neq 0, \quad \frac{\|\omega\|_{H^2}^2}{\|\omega\|_{H_b}^2} \leq \frac{M_2}{m_1} q \right\}; \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

Из неравенств (1.6), (3.7), (3.8) следует

$$(3.11) \quad \left| \frac{a_n(\omega, \omega)}{b_n(\omega, \omega)} - \frac{a_0(\omega, \omega)}{b_0(\omega, \omega)} \right| \leq \varepsilon_n, \quad \forall \omega \in Q, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Теперь из (3.10), (3.11) следует, что $\lambda^{(n)} \rightarrow \lambda^{(0)}$ при $n \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены допущения 1, 2 и непустое множество U_∂ задается соотношением (3.2). Тогда существует решение задачи (3.3).

Доказательство. Пусть $\{t_n\}_{n=1}^\infty = \{(h_n, r_n)\}_{n=1}^\infty$ — такая последовательность, что

$$(3.12) \quad t_n \in U_\partial, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{t_n} = \inf_{t \in U_\partial} P_t$$

В силу (3.2) из последовательности $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ можно выделить подпоследовательность $\{t_m\}_{m=1}^\infty$, такую, что

$$(3.13) \quad t_m \in U_\partial, \quad t_m \rightarrow t^* \text{ слабо в } E$$

Используя примерно те же рассуждения, что и при доказательстве леммы, можно убедиться, что $\lambda^{(m)} \leq c_1$, $\|\omega_m\|_H^2 \leq c_2$ ($c_1, c_2 = \text{const} > 0$).

Отсюда с учетом компактности вложения E в V и леммы следует существование подпоследовательности $\{\lambda^{(k)}, \omega_k, h_k, r_k\}_{k=1}^\infty$ такой, что

$$(3.14) \quad \lambda^{(k)} \rightarrow \lambda_{h^*} \text{ в } R$$

$$(3.15) \quad \omega_k \rightarrow \omega^* \text{ сильно в } H_b$$

$$(3.16) \quad t_k = (h_k, r_k) \rightarrow (h^*, r^*) = t^* \text{ слабо в } E$$

$$(3.17) \quad h_k \rightarrow h^* \text{ сильно в } C(\bar{\Omega}); r_k \rightarrow r^* \text{ сильно в } C^3[0, L]$$

Учитывая, что $t \rightarrow P(t)$ — непрерывное отображение U в R , из (3.13), (3.17) имеем

$$(3.18) \quad P_{t^*} = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{t_k} = \inf_{t \in U_\partial} P_t; \quad h_- \leq h^* \leq h_+; \quad r_- \leq r^* \leq r_+$$

Из соотношений (3.13), (3.16) получим

$$(3.19) \quad C \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \|t_k\|_E \geq \|t^*\|_E$$

где C — постоянная из (3.2), а из (3.2), (3.13), (3.15), (3.16) имеем

$$(3.20) \quad 0 \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_j(t_k, \omega_k) = \psi_j(t^*, \omega^*); \quad j = 1, \dots, l$$

Учитывая (3.12), (3.14), получим, что $\lim \lambda^{(k)} = \lambda_{h^*} \geq \lambda_-$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда и из (3.18) — (3.20) следует, что функция $t_0 = t^* = (h^*, r^*)$ — решение задачи (3.3).

4. Приближенное решение задачи (3.3). Пусть $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность конечно-мерных подпространств в E . Конечно-мерная задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти функцию $t_n = (h_n, r_n)$, такую, что

$$(4.1) \quad t_n \in E_n \cap U_\partial; \quad P_{t_n} = \inf_{t \in E_n \cap U_\partial} P_t$$

Используя лемму, можно доказать утверждение ¹.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2, $\{E_n\}$ — последовательность конечно-мерных подпространств в E , удовлетворяющая условию предельной плотности

$$(4.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{t \in E_n} \|t - y\|_E = 0, \quad \forall y \in E$$

и существует последовательность $\{q_n\}_{n=1}^\infty$, такая, что $q_n \in U_\partial^0$, $q_n \rightarrow t_0$ в E , где U_∂^0 — внутренность U_∂ , t_0 — решение задачи (3.3). Тогда существует такое n_0 , что при $\forall n \geq n_0$ множество $E_n \cap U_\partial$ не пусто, задача (4.1) имеет решение $t_n = (h_n, r_n)$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{t_n} = P_{t_0} = \inf_{t \in U_\partial} P_t$$

Из последовательности $\{t_n\}_{n=n_0}^\infty$ можно выделить подпоследовательность $\{t_m\}_{m=1}^\infty$, такую, что $t_m \rightarrow t_0$ сильно в V .

¹ Литвинов В. Г. Оптимальное управление коэффициентами в эллиптических системах. — Препринт Ин-та матем. АН УССР. Киев, 1979, № 794. 52 с.

В качестве конечно-мерных подпространств E_n , удовлетворяющих условию (4.2), можно выбирать тензорное произведение пространств сплайнов [9].

Отметим, что для построения приближенного решения задачи (3.3) имеется другой подход, не использующий существование последовательности $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Аналогично [4] можно рассматривать двойственную задачу оптимального управления, т. е. задачу о максимизации основной собственной частоты колебаний оболочки вращения при ограничениях на вес и другие параметры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арман Ж.-Л. П., Лурье К. А., Черкаев А. В. К решению задач оптимизации собственных значений, возникающих при проектировании упругих конструкций.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 159—162.
2. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
3. Гура Н. М., Сейранян А. П. Оптимальная круглая пластинка при ограничениях по жесткости и частоте собственных колебаний.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1, с. 138—145.
4. Литвинов В. Г. Задача оптимального управления собственной частотой пластины переменной толщины.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1979, т. 19, № 4, с. 866—877.
5. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.
6. Литвинов В. Г., Медведев Н. Г. Некоторые вопросы устойчивости оболочек вращения.— В сб.: Математическая физика. Вып. 26. Киев: Наукова думка, 1979, с. 101—109.
7. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. Киев: Наукова думка, 1973. 228 с.
8. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
9. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М.: Мир, 1974. 126 с.