

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА
АКАДЕМІЯ НАУК ВИЩОЇ ОСВІТИ УКРАЇНИ

**МІЖНАРОДНА
НАУКОВО–МЕТОДИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ**

**«СУЧАСНІ НАУКОВО–МЕТОДИЧНІ
ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
У ВИЩІЙ ШКОЛІ»**

25 – 26 червня 2015 р.

КИЇВ НУХТ 2015

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
NATIONAL UNIVERSITY OF FOOD TECHNOLOGIES
NATIONAL PEDAGOGICAL DRAGOMANOV UNIVERSITY
HIGHER EDUCATION ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE

**INTERNATIONAL
SCIENTIFIC AND METHODICAL CONFERENCE**

**MODERN
SCIENTIFIC AND METHODICAL
ISSUES OF MATHEMATICS IN HIGHER SCHOOL**

25 to 26 June 2015

KYIV NUFT 2015

Матеріали Міжнародної науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», 25 – 26 червня 2015р. – К.: НУХТ, 2015р. – 244

Видання містить матеріали Міжнародної науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі». На конференції розглянуті сучасні математичні методи в інженерних задачах та методичні проблеми викладання математичних дисциплін у вищій школі. У матеріалах висвітлено шляхи і методи інтенсифікації навчального процесу й вплив новітніх наукових розробок на формування майбутніх фахівців.

Materials of International Scientific and Methodical Conference *Modern Scientific and Methodical Issues of Mathematics in Higher School*, 25-26 June 2015. K.: NUFT, 2015. – 244.

This publication contains the materials of International Scientific and Methodical Conference *Modern Scientific and Methodical Issues of Mathematics in Higher School*. The conference covered modern methods used in mathematics and engineering challenges, as well as methodical issues of teaching mathematical disciplines in higher school. The materials elucidate the ways and methods of intensification of educational process and the influence of recent scientific developments on the formation of future specialists.

Редакційна колегія:

А.І. Українець, ректор Національного університету харчових технологій (НУХТ), доктор технічних наук, професор;

Т.Л. Мостенська, проректор з наукової роботи та міжнародних зв'язків НУХТ, доктор економічних наук, професор;

А.Т. Улітко, член-кориспонтент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, Національний університет ім. Т.Г.Шевченка;

Ю.Ю. Трохимчук, член-кориспонтент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, Інститут математики НАН України;

М.В. Працьовитий – директор Фізико-математичного інституту, завідувач кафедри вищої математики НПУ ім. М.П. Драгоманова, доктор фізико-математичних наук, професор;

В.С. Попович, доктор технічних наук, професор, заступник директора з наукової роботи Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України;

М.А. Мартиненко – завідувач кафедри вищої математики НУХТ, доктор фізико – математичних наук, професор;

Ю.Б. Зелінський, доктор фізико-математичних наук, професор, зав. відділом Інституту математики НАН України;

О.Г. Ніколаєв, доктор фізико-математичних наук, професор, декан факультету ракетно-космічної техніки, завідувач кафедри вищої математики Національного аерокосмічного університету ім. М.Є. Жуковського (ХАІ);

Я.О. Жук, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки Національного університету ім. Тараса Шевченка;

Г.Т. Сулим, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри механіки Львівського національного університету ім. Івана Франка;

В.П. Легеза, доктор технічних наук, професор, Національний університет біоресурсів і природокористування України;

І.І. Юрик, кандидат фізико-математичних наук, професор НУХТ;

Н.В. Акутіна, відповідальний секретар, НУХТ;

Т.В. Зінченко, кандидат технічних наук, доцент, НУХТ;

В.М. Сафонов, кандидат фізико-математичних наук, доцент, НУХТ.

Рекомендовано вченою радою НУХТ

Протокол № 11 від «20» травня 2015р.

Конференцію присвячено 85-річчю кафедри вищої математики НУХТ і
її першому завідувачу
професору
Володимиру Івановичу Можару



06.07.1901 – 09.11.1937

Програма Міжнародної науково-методичної конференції «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі». - К.: НУХТ, 2015.

Порядок роботи конференції

25 червня 2015 року

09.00 – 10.00 Реєстрація учасників конференції, корп. «Б», ауд. Б-203

10.00 – 11.00 Пленарне засідання. Відкриття конференції, ауд. Б-206

11.00 – 13.00 Засідання секцій

13.00 – 14.00 Перерва

14.00 – 17.00 Засідання секцій

26 червня 2015 року

09.00 – 12.00 Засідання секцій

12.00 Пленарне засідання. Підведення підсумків роботи конференції, ауд. Б-206

Робота секцій

I Математичні методи в інженерних задачах

25 червня, 11.00, ауд. Б-206

26 червня, 09.00, ауд. Б-206

II Методичні проблеми математичної освіти

25 червня, 11.00, ауд. Б-201

26 червня, 09.00, ауд. Б-201

1

секція

**Математичні
методи
в інженерних
задачах**

Керівник секції – проф. Мартиненко М.А.
Заступник керівника секції – проф. Жук. Я.О.
Секретар секції – доц. Зінченко Т.В.

1. СЛАВЕТНИЙ ШЛЯХ КАФЕДРИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ НУХТ

Михайло Мартиненко

Національний університет харчових технологій

Документально відомо, що кафедра вищої математики була утворена одночасно з КШП в 1930р. Це одна із найстаріших кафедр НУХТ, яка за 85 років не змінювала своєї назви, хоча назва університету змінювалася декілька разів.

В тридцять роки минулого століття у Всеукраїнській Академії Наук (ВУАН) працювала плеяда всесвітньо відомих математиків: Д.В. Граве, М.Крилов, М.Кравчук та інші. Українська математична школа була однією з найпотужніших в Європі. Одним із найталановитіших учнів акад. М.Кравчука був Володимир Іванович Можар, який і очолив кафедру в 1930р.

Перший завідувач визначив напрямок науково-методичної роботи кафедри на багато майбутніх років, а саме головне його героїчне життя стало зразковим прикладом патріотично-світоглядного еталону педагога вищої школи. Ця особистість заслуговує на більш детальне висвітлення його біографічних даних.

Ім'я Можара В.І. більше півстоліття заборонялося згадувати в стінах нашого ВНЗ і навіть викладачі кафедри математики нічого не знали про цю обдаровану, мужню і чесну людину.

Шляхом наполегливих і тривалих досліджень (робота в архівах СБУ, зустрічі з родичами, викладачами, які його знали та ін.) нам вдалося знайти деякі дані про життя цієї видатної особистості і ми хочемо донести їх до відома студентів і наукової громадськості.

Можар Володимир Іванович народився 6.04.1901 р. в с. Березівка, Коростишівського р-ну на Житомирщині в селянській заможній українській сім'ї. Середню освіту здобув у м. Житомирі, де отримав глибокі і фундаментальні знання з усіх предметів, а особливо добре вивчив і вільно володів п'ятьма іноземними мовами. В 1925 р. успішно закінчив Житомирський педінститут і після цього отримав спеціальну математичну підготовку в Київському інституті народної освіти.

В період 1927-30р.р. Можар В.І проходив аспірантський стаж на науково-дослідній кафедрі математики ВУАН під керівництвом М.Кравчука і М.Крилова. Ось як характеризував акад. ВУАН Д.Граве напрямок наукової діяльності В.І. Можара: *«он основательно изучил теорию упругости и занимался решением дифференциальных и интегральных уравнений этой теории, применяя преимущественно методы теории функций комплексного переменного (конформное отображение)»*. Цій тематиці наукових досліджень були присвячені і подальші його роботи.

Аналізуючи тільки ті роботи, які на цей час знайдені, приходиш до висновку, що кафедра вищої математики з першого дня працювала надзвичайно активно, результативно і на високому науково-методичному рівні. Так за період 1930-1934р.р. кафедра підготувала і видала посібники:

1.М. Кравчук, П. Касяненко, С. Кулик, В. Можар, О. Смогоржевський. Вища математика. Посібник для студентів і самоосвіти. У трьох частинах. – К.:Вид-во ВУАН, 1934. – ч.1 – 407с.

2. М. Кравчук, В. Можар. Диференціальні рівняння та їх застосування в природознавстві і техніці. – К. Вид-во ВУАН, 1934 – 184с.

Вони написані педагогами кафедри вищої математики КІЦП, з якою академік ВУАН М.Кравчук тісно співпрацював. Вони вийшли в світ завдяки наполегливій героїчній праці авторів посібників.

Необхідно відмітити, що на той час видавництво ВУАН було найвагомішим і найвпливовішим в науковому світі України. Протягом року воно видавало досить обмежену кількість книг, а тому не кожний ВНЗ мав можливість опублікувати хоча б одну працю за п'ятирічку. Кожна видана ВУАН праця ставала визначною подією, вона ставала класичним науковим еталоном, а її автори – відомими і авторитетними у вітчизняних науково-педагогічних колах. Окрім цього, за тогочасними канонами педагогічну літературу централізовано розсилали по всіх без виключення «вишах» України і вона обов'язково використовувалася в навчальному процесі.

Такий шлях пройшли і книги «Вища математика» і «Диференціальні рівняння...» і ця неординарна подія досить позитивно сприяла росту наукового авторитету молодого КІЦП в Україні. Це була подія Всеукраїнського масштабу.

До речі, за інформацією кафедри, в період з 1931р. по 1934р. єдиними посібниками, виданими КІЦП були названі вище праці і це були україномовні роботи, які вилетіли з методичного гнізда КІЦП на Всеукраїнський педагогічно-студентський простір. Вони, без сумніву, претендують на визнання їх першими навчальними посібниками, які підготовлені і видані нашим ВНЗ у вказаний період.

Як свідчать архівні документи (статті, доповіді, спогади, слідчі справи) могутнім, невичерпним джерелом титанічного натхнення авторів названих вище робіт були не премії, не нагороди, а їх Світогляд, який нерозривно був переплетений з глибинними духовними прагненнями українського студентства. Їх основною суттю життя і основною метою було забезпечення студентів україномовною математичною літературою, яка на той час була відсутня. Вони постійно і активно творили українську наукову математичну термінологію, впроваджували українську мову в навчальний процес, наполегливо боролися за стабільне функціонування у ВНЗ україномовного середовища. В 33 роки (1934р.)

Можар В.І. став професором. Поки що він залишається наймолодшим професором в історії нашого ВНЗ. Успіхи кафедри на всіх напрямках науково-методичної, педагогічної роботи були вражаючими. Але в цей період в Україні почалася активна і жорстока битва «імперської машини» з «українським націоналізмом» і вихід у світ прийнятих до друку праць було припинено.

Критика написаних «націоналістичних» посібників з різних сторін була смертельно нищівною. В цей процес цькування були залучені преса, колективи, громадські організації і інші. Закінчилося тим, що були арештовані ряд математиків, серед яких і всесвітньо відомий акад. М.Кравчук, проф. Можар В.І. В яких умовах знаходився акад. ВУАН і його побратими свідчать сторінки архіву в СБУ. Ось частина звернення відносно перегляду справи: «...розбитий фізично нічними допитами, зокрема повним позбавленням сну протягом 11 діб, загостренням хвороби серця, заходами прямої фізичної дії; морально на мене діяли криками, стогонами катованих у сусідніх кімнатах. Зламали мене остаточно погрози – у випадку заперечення та відмови взяти на себе нездійснені злочини – заарештувати та знищити мою сім'ю. Заради врятування сім'ї я вирішив обмовити себе, тим паче, як було цілком очевидно, мої обвинувачі самі не вірячи своїм звинуваченням, мали цілковито конкретну мету – зробити з мене злочинця».

Саме після такого жакливого морального і фізичного гніту, один із перших авторів в Україні посібника курсу «Вища математика» для технологічних інститутів, всесвітньо відомий математик М. Кравчук у своїх протокольних свідченнях слідчим писав: *«Моя тенденція к «самобытности» математической украинской терминологии вела к отрыву украинского научного языка от братского русского...»*

Вредительства в эти книги я не вкладывал, и принимать их вредными по совести не могу. Принимаю их во многих местах мало удовлетворительными, а их язык и терминологию – недостаточно отдаленными от националистичных тенденций».

Звернімо ще раз увагу на виправданні ключові слова академіка: *«Вредительства в эти книги я не вкладывал...»* Але слідча машина кваліфікувала написання україномовних математичних книг, як прояв буржуазного націоналізму, а їх авторам був приліплений ярлик «буржуазних націоналістів». За це передбачалося нажорстокіше покарання.

Хотілось би, щоб ці фрагменти слідчого протоколу пройшли через свідомість нинішнього покоління студентів (і не тільки) і назавжди залишилися в їх пам'яті і свідомості. Вони свідчать про звирячі методи русифікації українського народу державною «імперською машиною». Ці методи були спрямовані на повне фізичне знищення свідомої національної еліти і як свідчення цьому – розстріл проф. В.І. Можара, смерть акад. ВУАН М. Кравчука і інших.

Досить багато фактичного матеріалу знаходиться в слідчій справі В.І. Можара. Наведемо декілька протокольних фрагментів:

- *«Ви обвиняетесь в враждебных действиях против Советской Власти»*
- *Враждебных взглядов у меня никогда к Советской власти не было, но иногда возникали сомнения и неудовлетворения, по которым я делал критические замечания в части отдельных вопросов политики партии и их практического осуществления. Я считал, что в пищевом институте им.*

Микояна, где я работаю, украинизация проводится недостаточно, а темпы коллективизации на селе преувеличены.

– Вы являетесь учеником известного националиста М. Кравчука?

– Учеником Кравчука я был, но своих националистических взглядов он мне не высказывал.»

У справі є ряд доносів такого змісту:

– «На заседании кафедры математики в 1933 году рассматривался вопрос о плохой успеваемости студентов. По предложению Можара была принята резолюция, что одной из причин плохой успеваемости студентов есть плохое их питания.»

– «На совете ВТУЗа в 1935 г., где обсуждался вопрос о итогах испытания студентов по русскому и украинскому языкам В.И. Можар сделал националистическое выступление в котором утверждал, что студенты не знают украинского языка, потому что мы не создали украинского окружения, в настоящем смысле этого слова и что надо такое окружение создать.»

Хотілось би глибше проникнути в суть досить символічного першого фрагменту доносу відповідно до політичної ситуації того часу. Відомо, що навіть найжорстокіший тиран усіх часів і народів Сталін визнав, що Україна в жакхливому 1933 р. втратила майже третину населення. Але нікому в той час органи, партія і жорстока цензура не дозволяла не те що в офіційних резолюціях, а навіть у приватних розмовах згадувати про явище голодомору. Всі знали, що любе слово, сказане глашатаєм в підтримку визнання голокосту вело його тільки за міцні двері буцегарні. І ці два речення з доносу «колег» свідчать сьогодні, що чесна, мужня, патріотична позиція Можара В.І. була спрямована на підтримку студентів, захист цінностей українського народу і саме це стало основою для того, щоб накинути на світлу голову професора смертоносний зашморг. 09.11.1937 р. проф. В.І.Можар був розстріляний, а інші автори отримали різні покарання.

Після такої повної фізичної і моральної руйнації колективу кафедри в штат прийшли нові співробітники з іншим світоглядом і творча праця колективу, в силу названих і інших обставин, була приречена на занепад. **Тому другий**, майже шестидесятирічний період характерний тим, що в цей час кафедра не видавала фундаментальну навчальну літературу, а вела на методичному полі лише поточні роботи (*методические указания, расчетно-графические и контрольные работы и др.*). Вся література надходила централізовано з московських видавництв.

Після проголошення незалежності України кафедрою був проведений ретельний аналіз організації навчального процесу, який показав, що жоден викладач кафедри не проводив заняття державною мовою, а в бібліотеці університету не було жодного україномовного математичного навчального посібника (методичних розробок). Фактично, така ж ситуація спостерігалась і на теренах України. Тому розраховувати і чекати на методичну допомогу зі сторони було марно.

Розуміючи важливість проблеми, кафедра розробила і взялась за втілення довгострокової широкомасштабної програми: **«Студентам УДУХТ-математичну літературу державною мовою»**. Під цим девізом почався і продовжується **третій** період науково-методичної роботи кафедри.

Це була надзвичайно важке і відповідальне завдання оскільки кафедра не мала відповідного професійного досвіду, бо протягом попередніх шести десятиліть, як

було зазначено вище, не видавала жодного посібника (під відповідним грифом) ні російською, ні українською мовами. Труднощі були і в тому, що викладачі не володіли україномовною математичною термінологією.

З того часу почалася неперервна постійна методична робота кафедри з реалізації запланованого проекту. На перші позиції вийшов талановитий методист доц. **Дубовик Володимир Панасович**, який разом з доц. **Юриком І.І.** підготували і видали у видавництві «Вища школа» посібник **«Вища математика»** (37,66 друк. арк.). Пізніше кафедрою був створений творчий колектив авторів у складі досвідчених лекторів Дубовика В.П., Юрика І.І., Вовкодава І.П., Дев'ятко В.І., Клименко Р.К., Крочука В.В., Мартиненка М.А., Микитка Ю.І., Михайленка Т.Т., Нестеренко Н.В., які в досить стислий термін написали так необхідний студентам посібник **«Вища математика. Збірник задач»**. (28 друк. арк.). Він також вийшов у видавництві «Вища школа». Україномовних аналогів цим працям на освітньо-математичному полі України тоді не було.

Методичний рівень цих посібників був такий, що вони в 2000 році виграли загальноукраїнський конкурс **«Університетська бібліотека»** видавництва А.С.К. і вже перевидавалися (продовжують перевидаватися) на комерційній основі декілька разів загальним накладом більше 100 тисяч екземплярів. Для порівняння і розуміння: НУХТ набирає на перший курс не більше 2 тисяч студентів. Все це означає, що роботи кафедри давно переступили поріг НУХТ і вже низка кафедр математики інших ВНЗ дала їм високу професійну оцінку, а ректори багатьох (більше п'ятидесяти) університетів України підкріпили їх висновки фінансовими рахунками.

Після видання цих фундаментальних праць, кафедра продовжила кропітку, довготривалу роботу, спрямовану на повне забезпечення всіх дисциплін математичного циклу навчальними посібниками, адаптованими до наших програм і професійних потреб випускників НУХТ. Завдяки наполегливій праці і високій професійній майстерності лекторів – педагогів Дубовика В.П., Клименко Р.К., Михайленка Т.Т., Нестеренко Н.В., Лебедевої І.В., Нещадима О.М., Легези В.П., Сафонова В.М., Радзівєвської О.І., Юрика І.І., Мартиненка М.А., Богатирчука А.С., Новаковської Л.Г., Мазура О.К. та інших за останні роки підготовлено і видано більше 12 навчальних посібників з грифом МОНУ: **«Елементарна математика»**, **«Теорія ймовірностей»**, **«Математичне програмування»**, **«Теорія поля»**, **«Математична статистика»**, **«Вступ до аналізу»**, **«Усна та письмова математика»**, **«Аналітичні функції. Операційне числення. Різницьві рівняння»**, **«Дискретна математика»**, **«Вища математика»**, **«Інженерні задачі математичної фізики»** та ін. Остання праця в конкурсі АН ВО України отримала третю премію в номінації «Навчальний посібник» і нагороджена відповідним Дипломом (2008 р.). Ряд інших посібників займали призові місця в конкурсах НУХТ на краще видання навчальної літератури.

На сьогоднішній день математична література кафедри вищої математики НУХТ є найбільш поширеною серед студентів України в порівнянні з навчальними посібниками математичних кафедр інших ВНЗ. Якби проводився загальноукраїнський конкурс **«Студентам України – математичну літературу державною мовою»** то, без сумніву, наші методичні праці (за кількістю реалізованих примірників) претендували б на високе місце.

Для кожного Вчителя немає більшої нагороди, немає вищої честі, ніж знати, що його педагогічно-творче надбання стало надійним, невичерпним джерелом фундаментальних знань для сотень тисяч сьогоднішніх і майбутніх студентів.

Зараз розпочався наступний етап, спрямований на підвищення якості науково-методичної роботи кафедри і на підготовку до видання **серії підручників**. Це повністю відповідає офіційним рішенням МОНУ: **«Без сумніву, ключовим питанням є забезпечення вищих навчальних закладів підручниками державною мовою. ... Наразі у вищій школі вирішення цієї проблеми значною мірою залежить від активності самого навчального закладу. Створення підручників нового покоління повинно стати справою кожного професора, кожного доцента.»**

В останні роки питання підготовки підручників стало одним із найважливіших у роботі ректорату НУХТ. Досить порівняти сьогоднішній план видання навчальної літератури з попередніми, щоб переконатися в суттєвому прогресі в цьому напрямку. Кількість надрукованих підручників і посібників за останні три роки зріс у чотири рази, в порівнянні з аналогічним попереднім періодом.

Кафедра вищої математики активно працює над реалізацією цього важливого плану. Так, кафедра вже підготувала і видала підручники **«Математичне програмування» (2010 р. 18,13 д.а.), «Математична фізика» (2009р. 27 д. а.), «Теорія ймовірностей і математична статистика» (2012р. 26 д.а.), «Вища математика» (2012 р. 17 д.а.),** ведеться робота над іншими проектами. Необхідно зауважити, що це перші підручники видані кафедрою за свою 84-річну історію.

Кожного року Україна відзначає **«Дні пам'яті жертв політичних репресій»**. Кафедра постійно розповідає на лекціях, конференціях, в ЗМІ про своїх мужніх і героїчних побратимів – академіка М.П. Кравчука, проф. В.І. Можара та ін., які загинули під гільйотиною політичних репресій. І саме про них линуть слова:

**Кафедра, кафедра, кафедра!
Можара правда жива!
Кафедра, кафедра, кафедра!
Втілення Дум Кравчука!**

**Кафедра, кафедра, кафедра
Можара дух не згаса!
Кафедра, кафедра, кафедра!
Ствердження честі й добра!**

Кафедра і народ співає про своїх героїв.

2. МІШАНІ ПРОСТОРОВІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Андрій Улітко

*Київський національний університет імені
Тараса Шевченка*

Михайло Мартиненко

Національний університет харчових технологій

Вступ. В результаті експлуатації реальних конструкційних методів в них завжди виникають внутрішні просторові тріщини. Дати оцінку надійності і

міцності таких чинників конструкцій можна через розв'язок задач математичної теорії пружності для тіл, які послаблені відповідними математичними розрізами.

Основна частина. Нехай пружний простір послаблений математичним розрізом, який співпадає з частиною координатної поверхні S ($\xi = \xi_0$, $0 \leq \eta \leq \eta_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$), де ξ, η, φ ізометричні координати обертання.

Пружний простір розбиваємо на внутрішню V_1 і зовнішню V_2 області по відношенні до поверхні S . Вектор переміщень $\vec{u}$ в однорідному ізометричному середовищі задовольняє рівняння [1].

$$2 \frac{m-1}{m-2} \text{grad div } \vec{u} - \text{rot rot } \vec{u} = 0 \quad (1)$$

де m – число Пуассона.

На поверхні тіла виконується умова (1)

$$2G \left[\vec{n} \frac{\text{div } \vec{u}}{m-2} + (\vec{n} \cdot \text{grad}) \vec{u} + 0,5 (\vec{n} \times \text{rot } \vec{u}) \right]_S = \vec{F}_n \quad (2)$$

де G – модуль зсуву матеріалу, $\vec{n}$ – орт зовнішньої нормалі до поверхні S , $\vec{F}_n$ – заданий вектор зовнішніх зусиль на поверхні S .

Інтегрування рівняння (1) проводимо в ізотермічних координатах, які вводимо за допомогою наступних рівностей

$$z + i\rho = \alpha(\xi, \eta) + i\beta(\xi, \eta); \quad \varphi = \varphi, \quad (3)$$

функції $\alpha(\xi, \eta), \beta(\xi, \eta)$ пов'язані співвідношенням Коші-Рімана.

Якщо ввести

$$\text{div } \vec{u} = 2 \frac{m-2}{m} \theta(\xi, \eta); \quad \text{rot } \vec{u} = 4 \frac{m-1}{m} \vec{e}_\varphi \omega(\xi, \eta), \quad (4)$$

то після відповідних перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(h_\varphi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(h_\varphi \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right) &= 0; \quad h_\varphi = \beta(\xi, \eta) \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial (\omega h_\varphi)}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(h_\varphi \frac{\partial (\omega h_\varphi)}{\partial \eta} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Розв'язки рівнянь (5) можна записати у вигляді розкладів $\theta(\xi, \eta)$, $\omega(\xi, \eta)$ через власні функції дискретного або неперервного спектрів. Циліндричні проекції вектори переміщень знаходяться із взаємопов'язаної системи диференціальних рівнянь в частинах похідних

$$\frac{\partial u_z}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial (u_\rho h_\varphi)}{\partial \eta} = 2 \frac{m-2}{m} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \Theta + 4 \frac{m-1}{m} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \omega; \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial(u_\rho h_\varphi)}{\partial \xi} = 2 \frac{m-2}{m} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \Theta - 4 \frac{m-1}{m} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \omega.$$

Однорідна система (6) зводиться до рівнянь (5), а частинний розв'язок отриманий у вигляді

$$\begin{aligned} u_\rho^* &= \frac{3m-4}{m} \beta(\xi, \eta) \Theta(\xi, \eta) + 4 \frac{m-1}{m} \alpha(\xi, \eta) \omega(\xi, \eta) \\ u_z^* &= -4 \frac{m-1}{m} \alpha(\xi, \eta) \Theta(\xi, \eta) + \frac{3m-4}{m} \beta(\xi, \eta) \omega(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (7)$$

Відповідно до принципу Бюкнера [2] граничні умови мають вигляд

$$\bar{F}_\xi^{(1)} = -\bar{F}_\xi^{(2)} = \bar{f}(\xi, \eta), \quad (\xi = \xi_0, \eta < \eta_0). \quad (8)$$

$$\bar{u}_1(\xi, \eta) = \bar{u}_2(\xi, \eta), \quad \bar{F}_\xi^{(1)} = -\bar{F}_\xi^{(2)}, \quad (\xi = \xi_0, \eta > \eta_0).$$

де $\bar{F}_\xi^{(1)}, \bar{F}_\xi^{(2)}, \bar{u}_1(\xi, \eta), \bar{u}_2(\xi, \eta)$ вектор зусиль на поверхні $\xi = \xi_0$ і вектор переміщень в областях V_1, V_2 .

Представляючи поля переміщень і зусиль через власні функції неперервного або дискретного спектрів запропонований клас задач зведений до мішаних задач математичної теорії пружності.

Висновки. В роботі запропонований метод оцінки міцності і надійності елементів конструкцій з внутрішніми неплоскими тріщинами через клас мішаних задач теорії пружності для тіл послаблених математичними розрізами по частинам поверхонь другого порядку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Улитко, А.Ф. Метод собственных векторных функций пространственных задачах теории упругости / А.Ф. Улитко – К.: Наук думка, 1979. – 264с.
2. Мартиненко, М.А. Мішані просторові задачі математичної теорії пружності: монографія / М.А. Мартиненко. – К.: Освіта України, 2012. – 376с.

3. ТЕОРЕМА О СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЯХ

Юрий Трохимчук

Институт математики НАН Украины

Введение. Предложен новый подход к классической теореме о среднем, в котором вместо одного среднего значения использовано два. Этот подход имеет особое значение для комплексных функций, поскольку для них не существует подобных теорем.

Методы. Классическая теорема о среднем значении для действительной функции $f(x), x \in [a, b]$, утверждает, что если функция f дифференцируема на интервале (a, b) , то на нем найдется точка $c, a < c < b$, для которой справедливо равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Для произвольной же непрерывной функции f доказано следующее предложение.

Теорема о среднем значении. Пусть – непрерывная функция. Тогда имеют место следующие три (вообще, совместимые) варианта:

1) найдется точка c , $a < c < b$, для которой справедливо равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\delta(c),$$

где $\delta(c)$ – некоторое правое производное число функции f ;

2) множество $E(x: f'(x)=\infty)$ непусто и его образ $f(E)$ имеет положительную меру: $mes f(E) > 0$;

3) f является ACG – функцией на $[a, b]$ и

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{1}{b-a}\int_a^bf'_{as}(t)dt,$$

где справа содержится в общем случае интеграл Данжуа в широком смысле.

Напомним, что число A называется производным числом функции f в точке $x_0 \in [a, b]$, если существует последовательность $h_n > 0$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=A;$$

при этом если все $h_n > 0$, то A называется правым производным числом, если же $h_n < 0$, то – левым.

Результаты. Мы приведем другую формулировку теоремы о среднем, в которой не упоминаются бесконечные производные, зато говорится о паре средних значений.

Теорема 1. Для произвольной непрерывной на $[a, b]$ функции f найдутся $c_1, c_2 \in (a, b)$ и число λ , $0 < \lambda < 1$, для которых выполняется равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\lambda\delta(c_1)+(1-\lambda)\delta(c_2)=\frac{f(c_2)-f(c_1)}{c_2-c_1},$$

где $\delta(c_1), \delta(c_2)$ – некоторые правые конечные производные числа функции f .

Отметим лишь, что в этой теореме λ может быть равно и 0, и 1, т.е. в ней может оказаться и единственная средняя точка, но зато всегда существует бесконечное множество пар средних точек, с которыми можно «работать» так же, как и с одной средней в классическом случае.

Что касается теоремы о среднем значении, переход от действительных функций к комплексным (и аналитическим!) резко меняет картину: она, в общем

случае, не имеет место... Стремление к полной аналогии с классическим случаем приводило к необходимости накладывать дополнительные геометрические и аналитические ограничения.

Однако отметим, что локально теорема о среднем для аналитической функции $f(z), z \in D \subset C$ все же справедлива, т.е. для каждой точки $z_0 \in D$ и для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta \leq \varepsilon$, что для любой пары точек a, b из δ -окрестности $U_\delta(z_0)$ будет справедливо равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

где точка c принадлежит ε -окрестности точки z_0 .

Но результат, полученный нами выше для действительных функций, подсказывает, что подобный может оказаться верным и для комплексных. Убедимся, что он полностью переносится на этот случай.

Теорема 2. Пусть в области $D \subset C$ заданы аналитическая функция $f(z)$ и прямолинейный отрезок l с концами a, b . Тогда найдутся число $\lambda \in [0, 1]$ и на этом отрезке точки c_1, c_2 , для которых выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lambda f'(c_1) + (1 - \lambda) f'(c_2) = \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1}.$$

Замети, что λ может быть равно 0 (или 1, что одно и то же) и можно получить вместо двух средних точек отрезка l одну. Можно отметить, что на l найдутся два интервала, в которых все точки играют роль c_1, c_2 , т.е. выбрав в одном из них c_1 , мы найдем в другом такое c_2 , что при подходящем λ будет сохранено прежнее равенство – при одной и той же левой части!

Выводы. Как и в случае действительных функций, из этой теоремы мы получаем формулировку теоремы о среднем уже для произвольной голоморфной функции в области $D \subset C^n$:

$$f(b) - f(a) = \Delta f = df + \frac{d^2 f}{2!} + \dots + \frac{d^{n-1} f}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \left(\lambda d^n f|_{c_1} + (1 - \lambda) d^n f|_{c_2} \right),$$

где c_1, c_2 – точки отрезка $\overline{ab} \subset D$; эти точки заполняют некоторые интервалы этого отрезка.

4. УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ ДУАЛЬНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ І СУМАТОРНИХ РІВНЯНЬ

Михайло Мартиненко

Національний університет харчових технологій

Вступ. В даній роботі запропонований узагальнений метод побудови розв'язків дуальних інтегральних і суматорних рівнянь такого вигляду

$$\int_a^\infty c(\tau)m(\tau)X(\tau,\eta)d\tau = f(\eta) \quad (a \leq \eta < \eta_0) \quad (1)$$

$$\int_a^\infty c(\tau)X(\tau,\eta)d\tau = g(\eta), \quad (\eta_0 \leq \eta)$$

де $e(\tau)$ – невідома густина; $m(\tau), f(\eta), g(\eta)$ – відомі функції; $X(\tau;\eta)$ – ядро парної системи представлене через власні функції неперервного спектру. Якщо власні функції мають дискретний спектр, то інтегральні рівняння (1) перетворюються в суматорні.

Про значимість рівнянь (1) в колективній академічній монографії [1,с.56] сказано: « На даний час для розв’язування мішаних задач математичної фізики із аналітичних методів немає більш гнучкого і універсального методу, ніж метод парних рівнянь ».

Основна частина. Введемо ще одну невідому густину $c_1(\tau)$ так, щоб виконувалися рівності

$$\begin{aligned} \int_a^\infty c_1(\tau)m(\tau)X(\tau,\eta)d\tau &= f(\eta) \quad (a \leq \eta < \eta_0) \\ \int_a^\infty c_1(\tau)X(\tau,\eta)d\tau &= 0, \quad (\eta_0 \leq \eta) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \int_a^\infty [c(\tau) - c_1(\tau)]m(\tau)X(\tau,\eta)d\tau &= 0, \quad (a \leq \eta \leq \eta_0) \\ \int_a^\infty [c(\tau) - c_1(\tau)]X(\tau,\eta)d\tau &= g(\eta); \quad (\eta_0 \leq \eta \leq b) \end{aligned} \quad (3)$$

Представимо густини у вигляді

$$\begin{aligned} c_1(\tau) &= \int_a^\eta \varphi(t)Y_1(\tau;t)dt \\ m(\tau)[c(\tau) - c_1(\tau)] &= \int_{\eta_0}^\infty \psi(t)Y_2(\tau;t)dt \end{aligned} \quad (4)$$

де функції $\varphi(\tau)$ та $\psi(t)$ і їх похідні неперервні на відповідних проміжках, а $Y_1(\tau,t)$ та $Y_2(\tau;t)$ задовольняють умовам

$$\begin{aligned} \int_a^\infty X(\tau,\eta)Y_1(\tau,t)d\tau &= H(t-\eta)M(\eta,t) \\ \int_a^\infty X(\tau,\eta)Y_2(\tau,t)d\tau &= H(\eta-t)N(\eta,t) \end{aligned} \quad (5)$$

де $H(t-\eta)$ – функція Хевісайда.

Такий вибір інтегральних операторів (5) тотожно задовольняють другому рівнянню системи (2) і першому рівнянню системи (3). Якщо підставити рівності (4) у відповідні інтегральні рівняння (2), (3), то прийдемо до функціональних рівностей відносно невідомих функцій $\varphi(t)$ і $\psi(t)$.

В залежності від поведінки функції $m(\tau)$ на нескінченності задачі зводяться до інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь Фредгольма; методи розв'язку таких рівнянь відомі [2]. Розв'язання дуальних рівнянь в тому випадку, коли ядра $X(\tau, \eta)$ представлені через конкретні власні функції наведені в роботі [3].

Висновки. В роботі розвинений метод зведення дуальних рівнянь до інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь Фредгольма.

ЛІТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач в СССР./ Под. ред. Л. А. Галина.– М.: Наука, 1976.- 493с.
2. Забрейко, П. П. Интегральное управление / П.П. Забрейко.– М.: Наука, 1968.– 448с.
3. Мартиненко, М. А. Мішані просторові задачі математичної теорії пружності: монографія / М. А. Мартиненко.–К.: Освіта України, 2012.– 376с.

5. ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ, МІР І ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ, ВИЗНАЧЕНИХ У ТЕРМІНАХ ДВІЙКОВОГО КОДУВАННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ З НЕСКІНЧЕННИМ АЛФАВІТОМ

Микола Працьовитий

Національний педагогічний університет імені

М.П. Драгоманова

Вступ. Природний розвиток математики привів до необхідності розгляду, аналізу, вивчення математичних об'єктів зі складною локальною тополого-метричною і фрактальною структурою (множин, функцій, мір, операторів, динамічних систем тощо), які все частіше з'являються в моделях реальних об'єктів, процесів та явищ. Виникають вони також у відносно простих інформаційних, фізичних, технічних та інженерно-технічних задачах, зокрема оптимізаційного змісту. Такі математичні об'єкти можна задавати за допомогою різних систем кодування дійсних чисел з використанням скінченного та нескінченного алфавітів на основі наперед створеної тополого-метричної теорії відповідної системи зображення дійсних чисел.

Нехай $A = \{0, 1, \dots, s-1, \dots\}$ – алфавіт, скінченна або нескінченна множина цифр (символів, знаків); $L = A \times A \times \dots \times A \times \dots$ – простір всіх послідовностей з елементів алфавіту.

Під кодуванням чисел проміжка (відрізка, піввідрізка, півінтервалу) $\langle 0;1 \rangle$ ми розуміємо сюр'єктивне відображення $L\alpha(\alpha_n) \xrightarrow{f} x \in \langle a;b \rangle$, яке послідовності (α_n) ставить у відповідність число x , яке символічно зображується $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}^f$.

Підмножина $\Delta_{c_1\ldots c_m}^L = \{(\alpha_n) : \alpha_j = c_j \text{ при } j = \overline{1,m}\}$ простору L називається циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$. Якщо множина $f(\Delta_{c_1\ldots c_m}^L) = \{x : x = f(\alpha_n), \text{ де } \alpha_n \in \Delta_{c_1c_2\ldots c_m}\} \equiv \Delta_{c_1c_2\ldots c_m}^f$ є проміжком, то f -кодування називається неперервним.

Якщо відображення f задається формулою чи кількома формулами, зокрема рядом, то воно називається аналітичним. Аналітичні системи кодування мають свою яскраво виражену специфіку і часто є неперервними. Серед найпростіших систем аналітичного кодування є системи з самоподібною або N -самоподібною геометрією, яка реалізується простотою основного метричного відношення.

Методи. Розглядається класичне двійкове зображення чисел:

$$[0;1)_{\text{дв}} x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 2^{-n} \equiv \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}^2,$$

де $\alpha_n \in A_2 \equiv \{0;1\}$ - алфавіт двійкової системи числення, і його перекодування засобами нескінченного алфавіту $A = Z_0 = \{0,1,2,\ldots\}$:

$$\overline{\Delta}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}^2 \equiv \Delta_{\underbrace{1\ldots 1}_{a_1}\underbrace{01\ldots 10}_{a_2}\underbrace{\ldots 1\ldots 10}_{a_n}\ldots}^2 = \Delta_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}^2, \quad a_n \in A,$$

яке ми називаємо $\overline{\Delta}^2$ -зображенням (порівняй з Δ^{2^∞} -зображенням, див. [3]) і має екстранульову надлишковість, тобто кожне число має єдине $\overline{\Delta}^2$ -зображення.

Розглядається функція ψ , визначена на $[0;1)$ рівністю

$$\psi\left(\overline{\Delta}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}^2\right) = \overline{\Delta}_{[a_1a_2][a_2a_3]\ldots[a_{n-1}a_n][a_na_{n+1}]\ldots}^2.$$

Ми цікавимося множинами рівнів цієї функції, її глобальними та локальними властивостями.

Нехай (τ_n) - послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень $0,1,\ldots,i,\ldots$ з ймовірностями $p_{0n}, p_{1n}, \ldots, p_{in}, \ldots$ відповідно. Розподіл випадкової величини $\tau = \Delta_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}^2$ відносно повно вивчений. Як розподілені цифри η_k $\overline{\Delta}^2$ -зображення $\overline{\Delta}_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_n\ldots}^{2^\infty}$ цієї випадкової величини.

Розглядається динамічна система з фазовим простором $[0;1) \subset \mathbb{R}^1$ і відображенням

$$\varphi\left(\overline{\Delta}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}^2\right) = \overline{\Delta}_{[a_1a_2][a_3a_4]\ldots[a_{2k-1}a_{2k}]\ldots}^2.$$

Легко довести, що множиною значень функції φ є піввідрізок $[0;1)$.
Очевидно, що відображення φ має дві інваріантні точки:

$$\varphi(0) = \varphi(\bar{\Delta}_{(0)}^2) = 0, \varphi(\bar{\Delta}_{(1)}^2) = \varphi(\Delta_{(10)}^2) = \bar{\Delta}_{(1)}^2 = \Delta_{(10)}^2 = \frac{2}{3}.$$

Нас цікавлять орбіти точок та аттрактор цієї динамічної системи.

Результати. Стосовно даних трьох об'єктів дослідження отримано наступні результати.

Теорема 1. Множиною значень функції ψ є фрактальна множина канторівського типу (ніде не щільна множина нульової міри Лебега). Функція ψ є всюди розривною, оскільки у кожному як завгодно малому інтервалі області визначення існує точка розриву.

У доповіді пропонується повний опис тополого-метричних і фрактальних властивостей рівнів функції ψ , а також результати дослідження її автомодельних та інтегральних властивостей.

Теорема 2. Якщо τ має рівномірний розподіл на відрізку $[0;1]$, то її цифри $\bar{\Delta}^2$ -зображення є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, які набувають значень $0,1,\dots,i,\dots$ з ймовірностями $P\{\eta_k = i\} = \frac{1}{2^{i+1}}$.

Цікавими є розподіли цифр $\bar{\Delta}^2$ -зображення при умові, що τ має експоненціальний розподіл.

Теорема 3. Розподіл випадкової величини цифри $\bar{\Delta}^2$ -зображення є незалежними має чистий лебегівський тип (чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний, чисто сингулярно неперервний).

Зауваження. Знайдено умови належності кожному з лебегівських типів. Більше того, проведено повний аналіз спектральних властивостей розподілу випадкової величини τ , її автозгорток і поведінки модуля характеристичної функції на нескінченності.

Теорема 4. Якщо довжини серій відмінних від 0 цифр числа x є обмеженими, то існує $n \in N$ таке, що $\varphi^n(x) = \bar{\Delta}_{(0)}^2 = 0$.

Якщо $\bar{\Delta}^2$ -зображення числа x містить:

- скінченну кількість нулів і нескінченну кількість цифр, відмінних від 1, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(x) = \bar{\Delta}_{(0)}^2 = \frac{1}{2}$;
- скінченну кількість нулів і скінченну кількість цифр, відмінних від 1, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(x) = \bar{\Delta}_{(1)}^2 = \Delta_{(01)}^2 = \frac{1}{3}$;
- скінченну кількість 1 і не містить 0 або нескінченну кількість 1, нескінченну кількість відмінних від 1 цифр, але не містить 0, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(x) = 1$;

- нескінченну кількість 1, скінченну кількість відмінних від 1 цифр і не містить 0, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(x) = \Delta_{(1)} = \frac{2}{3}$.

Зауважимо, що складність динаміки, породженої відображенням ψ у доповіді проводиться з різних точок зору, зокрема стосовно збереження фрактальною розмірності та її трансформації.

Висновки. Використання різних систем зображення (кодування) дійсних чисел дозволяє значний клас математичних об'єктів зі складною локальною будовою відносно просто описати і вивчити, використовуючи традиційні та не традиційні системи представлення чисел. Засоби фрактального аналізу та фрактальної геометрії, зокрема ідеї самоподібності, самоафінності, автономності є зручним знаряддям у дослідженні таких об'єктів. Несподіваним є той факт, що між системами кодування з двосимвольним та нескінченним алфавітами існує відносно простий і природний зв'язок.

Надіємось, що запропоновані ідеї конструювання функцій, мір та динамічних систем і отримані стосовно них результати знайдуть своє застосування в різних галузях математики, зокрема у математичному аналізі, теорії функцій, стохастичі та теорії фракталів. Вони відкривають широку перспективу для різноманітних узагальнень і створюють основи для розвитку загальної теорії.

Значно складнішою для дослідження є динаміка породжена функцією ψ , яка заслуговує окремої самостійної уваги.

ЛІТЕРАТУРА

1. Працьовитий, М.В. Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел / М.В. Працьовитий. – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. – 68 с.
2. Працьовитий, М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілах / М.В. Працьовитий. – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
3. Працьовитий, М.В. Геометрія дійсних чисел у їх кодуваннях засобами нескінченного алфавіту як основа топологічних, метричних, фрактальних і ймовірнісних теорій / М.В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – № 14. – С. 189-216.
4. Барановський, О.М., Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їх застосування / О.М. Барановський, М.В. Працьовитий., Г.М. Торбін – К.: Наукова думка, 2013. – 288 с.

6. ПРО БАГАТОЗНАЧНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ОБЛАСТЕЙ НА МНОГОВИДАХ

Юрій Зелінський, Ірина Виговська

Інститут математики НАНУ

Ольга Сафонова

Київський національний університет імені

Тараса Шевченка

Вступ. Розглядаються багатозначні нульвимірні півнеперервні зверху відображення областей на многовидах. Якщо множина точок взаємної однозначності для нульвимірного ациклічного багатозначного відображення

скрізь щільна, то в одновимірному випадку обернене відображення є однозначним і монотонним.

Методи. Нехай X та Y — топологічні простори. Відображення $F: X \rightarrow Y$ називається мноозначним, якщо образом точки $x \in X$ буде множина $F(x) \subset Y$. Відображення F називається півнеперервним зверху в точці $x \in X$, якщо для будь-якої відкритої множини $V \subset Y$, такої, що $F(x) \subset V$, існує окіл $U(x)$ точки x , такий, що $F(U(x)) \subset V$. Відображення F називається півнеперервним зверху, якщо воно півнеперервне зверху в кожній точці $x \in X$ [1]. Під прообразом $F^{-1}(y)$ точки $y \in Y$ розуміємо множину $\{x \in X \mid y \in F(x)\}$.

Припустимо, що M^n і N^n — n -вимірні многовиди. $M^n \supset D$ — область на многовиді, $F: D \rightarrow N^n$ — мноозначне відображення. Перетин відкритих множин називається G_δ -множиною [1]. Надалі розглядаються мноозначні півнеперервні зверху відображення. Введемо такі поняття [2].

Означення 1. Відображення $F: D \rightarrow N^n$ називається нульвимірним, якщо $\dim F^{-1}(F(x)) = 0$ для будь-якого $x \in D$ [3].

Означення 2. Точка $x_0 \in D$ називається точкою взаємної однозначності відображення F , якщо $F^{-1}(F(x_0)) = x_0$.

Означення 3. Відображення F називається ациклічним, якщо для кожної точки $x \in D$ усі зведені групи когомологій множини $F(x)$ тривіальні [4].

Означення 4. Відображення $F: D \rightarrow N^n$ називається монотонним, якщо множина $F^{-1}(y)$ зв'язна для кожної точки $y \in N^n$.

Означення 5. Мноозначне відображення $F: D \rightarrow N^n$ назвемо відображенням типу (η) , якщо для довільної точки $y \in N^n$ знайдеться таке $\delta(y)$, що прообраз околу точки y з діаметром меншим за $\delta(y)$ складається з відкритих компонент, діаметри яких не перевищують η .

Результати. Мають місце такі результати, аналоги яких для однозначних відображень одержані в [5].

Теорема 1. Множина D_1 точок взаємної однозначності мноозначного півнеперервного зверху відображення $F: D \rightarrow N^n \in G_\delta$ -множиною.

Теорема 2. Нульвимірне мноозначне відображення F не знижує вимірності.

Виявляється, що твердження теореми 2 залишається справедливим при більш слабких обмеженнях.

Теорема 3. Нульвимірне мноозначне відображення типу (η) не знижує вимірності.

Теорема 4. Нехай $F: (a, b) \rightarrow R^1$ — нульвимірне ациклічне мноозначне відображення одновимірного інтервала. Якщо множина точок взаємної однозначності D_1 щільна в (a, b) , то обернене відображення F^{-1} є однозначним монотонним відображенням.

Висновок. Твердження теореми про точки взаємної однозначності для багатозначного відображення є справедливим в одновимірному випадку. Нехай тепер $F : D \rightarrow N^n$ – нульвимірне ациклічне багатозначне відображення. Тоді чи буде вірним, якщо множина точок взаємної однозначності D_1 щільна в D при $n \geq 2$, то обернене відображення F^{-1} – однозначне монотонне відображення? Це питання залишається відкритим.

ЛІТЕРАТУРА

1. Куратовский, К. Топология. В 2-х т. / К. Куратовский – М.: Мир, 1966 – Т.1 – 596 с.
2. Зелинский, Ю.Б. Многозначные отображения в анализе / Ю.Б. Зелинский – К.: Наукова думка, 1993. – 264 с.
3. Александров, П.С. Введение в теорию размерности / П.С. Александров, Б.А. Пасынков – М.: Наука, 1973. – 576 с.
4. Спенсер, Э. Алгебраическая топология / Э. Спенсер – М.: Мир, 1971. – 680 с.
5. Трохимчик, Ю.Ю. Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности / Ю.Ю. Трохимчик // Праці Інституту математики НАН України. – Т.70. – К.: Ін-т математики НАН України, 2008. – 539с.

7. УПРУГОЕ ПРОСТРАНСТВО С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ СФЕРИЧЕСКИХ ПОЛОСТЕЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ

Алексей Николаев, Евгений Танчик

*Национальный аэрокосмический университет
им. Е. Жуковского «ХАИ»*

Введение. Рассматривается упругое пространство с периодической системой сферических полостей радиуса R . Центры полостей расположены в узлах кубической периодической решетки с периодом a . К упругому пространству на бесконечности приложена нагрузка одного из двух типов: одноосное или двuosное растяжение. Границы полостей считаются свободными от нагрузки. Решение подобной задачи может использоваться при моделировании пористого материала с периодически расположенными сферическими порами.

Методы. Для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) в рассматриваемом теле необходимо решить краевую задачу относительно вектора перемещений $\mathbf{U}$, который удовлетворяет уравнению Ламе

$$\Delta \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

граничным условиям на поверхностях полостей

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = 0 \quad (2)$$

и одному из приведенных ниже условий на бесконечности

$$\mathbf{F}\mathbf{U}|_{z=\pm\infty} = \pm T\mathbf{e}_z; \quad \mathbf{F}\mathbf{U}|_{\rho=\infty} = T\mathbf{e}_\rho, \quad (3)$$

где T – постоянное усилие; $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_z)$ – орты цилиндрической системы координат.

Решение задачи строится в виде

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0, \quad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j), \quad (5)$$

где $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ – одинаково направленные сферические системы координат, совмещенные с центрами полостей; $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ – модифицированные базисные сферические решения уравнения Ламе, приведенные в [1]; $\mathbf{U}_0$ – перемещение, отвечающее однородному напряженному состоянию на бесконечности; $a_{s,n,m}^{(j)}$ – неизвестные коэффициенты, находящиеся из граничных условий.

Результаты. Используя теоремы сложения базисных сферических решений [1], вектор перемещений $\tilde{\mathbf{U}}$ можно представить полностью в одной системе координат, связанной с граничной поверхностью Γ_j :

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{s,n,m}^{(j)} \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{+(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) + \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{-(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k \tilde{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} a_{t,k,l}^{(\alpha)}, \quad (6)$$

где $\tilde{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j}$ – переходные коэффициенты теорем сложения.

После удовлетворения граничных условий получаем следующую разрешающую систему

$$\sum_{s=1}^3 a_{s,n,m} \tilde{F}_{s,n,m}^{+(k)} + \tilde{F}_{s,n,m}^{-(k)} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k}^k a_{t,k,l} \sum_{\alpha \neq j} \tilde{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j} = F_{n,m}^{(k)}, \quad (7)$$

$$n, m \in \mathbb{Z}: \quad n \geq 0, \quad |m| \leq n, \quad k = -1, 0, 1; \quad j = \overline{1, \infty}.$$

Здесь $\tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(k)}$ определяется из равенства

$$\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(4)}(r_j, \theta_j, \varphi_j) = \tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(k)}(r_j) P_n^{m+k}(\cos \theta_j) e^{i(m+k)\varphi_j} \mathbf{e}_k,$$

где $\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(4)}$ – напряжения на поверхности Γ_j , отвечающие перемещениям $\tilde{\mathbf{U}}_{s,n,m}^{\pm(4)}$, $\mathbf{e}_k = (1/2)\delta_{k,-1}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) + (1/2)\delta_{k,1}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) + \delta_{k,0}\mathbf{e}_z$; $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ – орты декартовой системы координат; $P_n^m(x)$ – функции Лежандра. Явный вид выражений $\tilde{F}_{s,n,m}^{\pm(k)}$, $\tilde{T}_{t,k,l,\alpha}^{s,n,m,j}$ не приводится ввиду их громоздкости.

Выводы. Разрешающая система решалась численно методом редукции. По результатам расчетов определялись компоненты тензора напряжений на линиях, соединяющих центры соседних полостей.

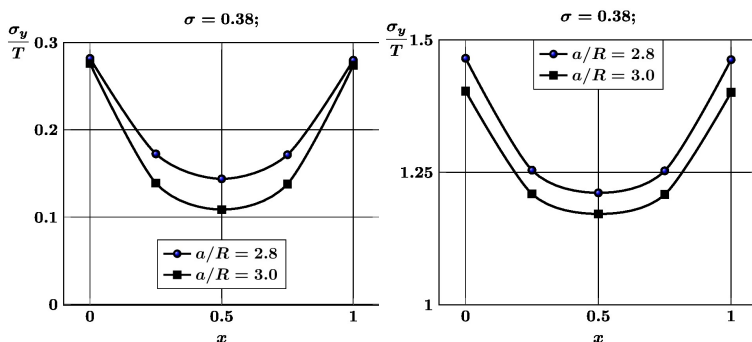


Рис. 1.

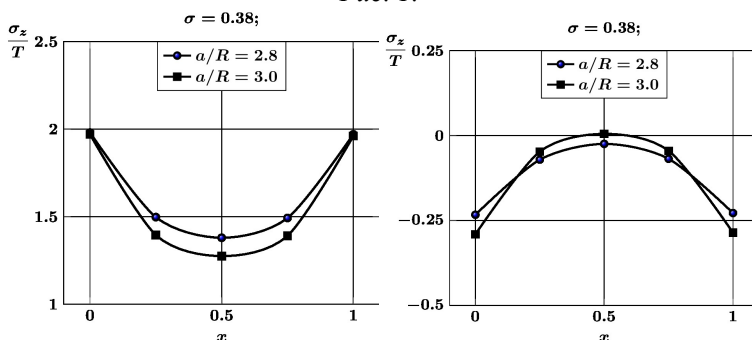


Рис. 2.

На рис. 1, 2 приведены нормальные напряжения σ_y/T и σ_z/T на звене кубической решетки, ориентированном вдоль оси Ox , между соседними полостями в зависимости от относительного расстояния a/R между ними при одноосном (слева) и двuosном (справа) растяжения упругого пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаев, А.Г. Упругая механика многокомпонентных тел [Текст]: монография / А.Г. Николаев, Е.А. Танчик. — Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2014. — 272 с.

8. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ШАРОВОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА

Василь Попович

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАНУ*

Ірина Ракоча

Національний університет «Львівська політехніка»

Вступ. Сучасна інженерна практика вимагає якнайточнішого визначення термопружного стану шаруватих елементів конструкцій, зокрема циліндричної

форми, що працюють в умовах високих чи низьких температур, і цього можна досягти за рахунок використання моделі термочутливого тіла [1, 2], тобто врахування залежності термомеханічних характеристик матеріалів складових від температури. Ці знання лежать в основі розрахунку їх на міцність та надійність.

Постановка задачі. Розглядається безмежний термочутливий порожнистий циліндр, який складається із трьох різної товщини циліндрів, виготовлених із різних матеріалів. Циліндр нагрівається розташованими у внутрішній складовій джерелами тепла, розподіленими по параболічному закону

$$W^{(2)}(r) = -\frac{4W_0^{(2)}}{(r_3 - r_2)^2}(r - r_2)(r - r_3),$$

а в інших складових джерела тепла відсутні ($W^{(1)}(r) = W^{(3)}(r) = 0$).

На внутрішній обмежувальній поверхні $r = r_1$ підтримується температура $t = t_{\text{вн}}$, а через зовнішню — $r = r_4$ циліндр конвективно обмінюється теплом із середовищем, температура якого $t = t_{\text{зов}}$. Коефіцієнт теплообміну через цю поверхню сталий і рівний α . На межі дотику сусідніх складових $r = \{r_2, r_3\}$ виконуються умови ідеального теплового контакту. За таких умов ставиться завдання визначити розподіл температури та компонент напружено-деформованого стану.

Математична модель для визначення розподілу температури містить: рівняння теплопровідності для складових

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{dt_i}{dr} \right) = W^{(i)}(r), \quad r_i < r < r_{i+1}, \quad i = \overline{1, 3}; \quad (1)$$

крайові умови на обмежувальних циліндричних поверхнях

$$t_1|_{r=r_1} = t_{\text{вн}}, \quad \left[\lambda_t^{(3)}(t_3) \frac{dt_3}{dr} + \alpha(t_3 - t_{\text{зов}}) \right]_{r=r_4} = 0; \quad (2)$$

умови контакту на поверхнях дотику сусідніх складових циліндра

$$t_1|_{r=r_2} = t_2|_{r=r_2}, \quad t_2|_{r=r_3} = t_3|_{r=r_3}, \quad (3)$$

$$\lambda_t^{(1)}(t_1) \frac{dt_1}{dr} \Big|_{r=r_2} = \lambda_t^{(2)}(t_2) \frac{dt_2}{dr} \Big|_{r=r_2}, \quad \lambda_t^{(2)}(t_2) \frac{dt_2}{dr} \Big|_{r=r_3} = \lambda_t^{(3)}(t_3) \frac{dt_3}{dr} \Big|_{r=r_3}. \quad (4)$$

Метод побудови розв'язку [1] нелінійної задачі теплопровідності (1) – (4) включає такі кроки:

- 1) обезрозмірення математичної моделі;
- 2) апроксимацію експериментально заданих залежностей коефіцієнтів теплопровідності від температури;

$$3) \text{ здійснення перетворення Кірхгофа: } \theta_i = \int_{T_p}^{T_i} \lambda_*^{(i)}(T_i) dT_i;$$

- 4) розв'язання отриманої задачі на змінні Кірхгофа;

5) здійснення оберненого перетворення Кірхгофа.

Зазначимо, що при обезрозміренні задачі температурні залежності коефіцієнтів теплопровідності складових від температури подані у вигляді

$$\lambda_i^{(i)}(t_i) = \lambda_{i0}^{(i)} \lambda_*^{(i)}(T_i) = \lambda_{i0}^{(i)} \left(1 + k_i (T_i - T_p)\right),$$

де k_i — задані сталі, а $\lambda_{i0}^{(i)} = \lambda_i^{(i)}(t_p)$ — опорні значення коефіцієнтів теплопровідності.

Результати. Визначення компонент напружено-деформованого стану в припущенні залежності від температури модуля Юнга, коефіцієнта Пуассона та температурного коефіцієнта лінійного розширення здійснено за методикою [1]. Отримані формули для обчислення напружено-деформованого стану справедливі тільки для тонких складових, тобто таких, для яких при обчисленні присутніх в інтегральних рівняннях інтегралів з задовільною для нас точністю справедлива формула трапецій

$$\int_{\rho_i}^{\rho} Y(\eta) d\eta = \frac{\rho - \rho_i}{2} (Y(\rho) + Y(\rho_i)).$$

Якщо ж циліндр містить тонкі і товсті складові, то кожному із товстих шарів ставимо у відповідність певну кількість тонких з одного і того ж матеріалу. Перевірку достатності розбиття товстих шарів на тонкі складові забезпечує виконання інтегральної умови

$$\rho_1^2 p_1 - \rho_{n+1}^2 p_2 = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \sigma^{(k)}(\eta) d\eta,$$

де $\rho = r/l_0$, l_0 — деякий характерний розмір, p_1, p_2 — задані сталі тиски на внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра, $\sigma^{(i)} = \sigma_r^{(i)} + \sigma_\phi^{(i)}$ — сумарні напруження, n — кількість тонких шарів, які моделюють тришаровий циліндр.

Висновки. Сформульовано нелінійну математичну модель для визначення температурного поля в тришаровому термочутливому порожнистому циліндрі за складного теплообміну. Побудовано розв'язок нелінійної задачі теплопровідності та визначено компоненти напружено-деформованого стану. Досліджено вплив термочутливості матеріалів складових на характер і рівень розподілу температури, напружень, деформацій та переміщень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Попович, В.С., Математичне моделювання та методика визначення статичного термомпружного стану багатшарових термочутливих циліндрів / В.С. Попович, Б.М. Калиняк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2014. — Т. 57, № 2. — С. 169-186.
2. Kushnir, R.M., Heat Conduction Problems of Thermosensitive Solids under Complex Heat Exchange: Heat Conduction — Basic Research / R.M. Kushnir, V.S. Popovych, V.S. Vikhrenko (ed.). — In Tech, 2011. — P. 131-154.

9. ІНТЕГРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ НІДЕ НЕ МОНОТОННИХ ФУНКЦІЙ ОДНІЇ СКІНЧЕННО-ПАРАМЕТРИЧНОЇ СІМ'Ї

Ольга Свинчук, Микола Працьовитий

Національний педагогічний університет імені

М.П. Драгоманова

Вступ. Серед функцій зі складною локальною будовою (структурою) і фрактальними властивостями в останній час особливий інтерес викликають неперервні ніді не монотонні функції. Їх теоретичне дослідження ведеться в різних напрямках. Разом з цим вони все частіше з'являються в різноманітних моделях реальних об'єктів, процесів і явищ.

У доповіді розглядається одна сім'я неперервних ніді не монотонних функцій, залежних від скінченного набору параметрів. Використовуючи так зване Q_s^* -зображення чисел $x \in [0, 1]$, яке є кодуванням числа засобами скінченного алфавіту і узагальненням s -кового та Q_s -зображення дійсних чисел [1], конструємо новий клас функцій з неоднорідною локальною поведінкою.

Методи. Для розв'язання поставленої задачі використані методи математичного аналізу, теорії функцій дійсної змінної, фрактального аналізу.

Нехай $1 < s$ - фіксоване натуральне число, $A_s = \{0, 1, \dots, s-1\}$ - алфавіт s - кової системи числення, $Q_s^* = \|q_{ij}\|$ - нескінченна періодична матриця, $j \in N$, $i \in A_s$ така, що має властивості:

$$q_{i,2k-1} = q_{i1} > 0, \quad q_{i,2k} = q_{i2} > 0 \quad \forall k \in N, \quad i = \overline{0, s-1};$$

$\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)}^{Q_s^*}$ - Q_s^* - зображення [1] числа $x \in [0, 1]$, визначене $\|q_{ij}\|$, тобто

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j} \right] \quad (1)$$

де $\beta_{i1} = \beta_{\alpha_{2k+1}2k+1}$, $\beta_{i2} = \beta_{\alpha_{2k}2k}$, $i \in A_s$,

$$\beta_{0j} = 0, \quad 0 < \beta_{i1} = \sum_{k=0}^{i-1} q_{k1} < 1, \quad 0 < \beta_{i2} = \sum_{k=0}^{i-1} q_{k2} < 1 \quad i \in \overline{1, s-1}, \quad j \in N.$$

Нехай $G_s^* = \|g_{ij}\|$ - матриця, $j \in N$, $i \in A_s = \{0, 1, 2, \dots, s-1\}$ така, що має властивості:

$$|g_{ij}| < 1;$$

$$g_{0j} + g_{1j} + \dots + g_{[s-1]j} = 1;$$

$$\gamma_{0j} = 0, \quad 0 < \gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} g_{kj} < 1, \quad i \in \overline{1, s-1}.$$

Розглядається функція $f(x)$, означена рівністю

$$f(x) = \gamma_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\gamma_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right]. \quad (2)$$

Результати. Теорема 1. Функція $f(x)$ є:

1. коректно визначеною і неперервною в кожній точці відрізка $[0,1]$;
2. значення функції f належить $[0,1]$;
3. **строго зростаючою**, якщо $g_{ij} > 0$ для будь-якого $i \in A_s = \{0,1,2,\dots,s-1\}$, $j \in N$, **ніде не монотонною**, якщо в нескінченній кількості стовпців матриці існують від'ємні числа і немає нулів, **кусково-монотонною**, якщо в скінченній кількості стовпців $\|g_{ij}\|$ існують від'ємні числа і немає нулів;
4. немонотонною функцією канторівського типу, якщо в матриці $\|g_{ij}\|$ існують нулі.

Теорема 2. Графік функції $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in [0,1]\}$ є самоафінною множиною, причому

$$\Gamma = \bigcup_{(i,j) \in A_s \times A_s} \phi_{ij}(\Gamma), \text{ де } \phi_{ij}(\Gamma) \neq \phi_{pj}(\Gamma) \text{ при } k \neq p,$$

$$\phi_{ij} : \begin{cases} x' = \beta_{i1} + q_{i1}\beta_{j2} + q_{01}q_{02}x \\ y' = \gamma_{i1} + g_{i1}\gamma_{j2} + g_{i1}q_{j2}y \end{cases}.$$

Теорема 3. Для інтеграла Рімана від функції f має місце рівність

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{q_{01}q_{02} \left(\sum_{i=0}^{s-1} \gamma_{i1} + \sum_{i=0}^{s-1} \gamma_{i2} \right)}{1 - q_{01}q_{02}}.$$

Висновки. Отриманий опис глобальних та локальних властивостей функцій даного класу і методи їх дослідження може бути використаний при моделюванні і вивченні осциляторних і дифузійних процесів, а також при моделюванні випадкових процесів зі скінченно-параметричною сім'єю факторів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Працьовитий, М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М.В. Працьовитий. – К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. – 296 с.
2. Працьовитий, М.В. Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q -зображенням чисел / М.В. Працьовитий, А.В. Калашніков // Укр. Мат. Журнал. – 2013. – Т.65, №3. – С. 381 - 393.
3. Василенко, Н.А. Одна сім'я неперервних ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями / Н.А. Василенко, М.В. Працьовитий, // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – №14. – С. 176 - 179.

10. ВИКОРИСТАННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ ТИПУ СОМІЛЬЯНИ ПРИ РОЗРАХУНКУ АНІЗОТРОПНИХ КОНСТРУКЦІЙНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЗА ДІЇ КОМПЛЕКСУ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПОЛІВ

Георгій Сулим

*Львівський національний університет імені
Івана Франка*

Ярослав Пастернак

Луцький національний технічний університет

Вступ. Довгий час вважалося, що формули Сомільяни мають лише загальнотеоретичне значення, оскільки на межі тіла крайовими умовами коректно можна задати лише половину із неоднорідних компонент крайових вектор-функцій напружень та переміщень. Проте з розвитком методів інтегральних рівнянь, і зокрема, методу граничних елементів (МГЕ) та теорії тонких включень, стало зрозумілим, що на основі тотожності Сомільяни нескладно побудувати сингулярні інтегральні рівняння, у результаті розв'язування яких можна розрахувати усі невідомі крайові функції. Причому, реалізовані на основі цих рівнянь прямі схеми МГЕ виявилися значно ефективнішими від непрямих (наприклад, тих, що використовують теорію потенціалів).

Методи. Прямі методи граничних елементів також ефективно використовуються при дослідженні матеріалів, у яких взаємодіють різні фізико-механічні поля, зокрема й магнітоелектричних композитів, тобто виготовлених за керамо- чи нанотехнологіями твердих сумішей п'єзомагнітної та п'єзоелектричної компонент (магнітоелектричний ефект виникає внаслідок механічної взаємодії цих двох фаз, а не безпосереднього взаємовпливу електричного і магнітного полів). На основі методу граничних елементів розроблено низку числових підходів для аналізу фізико-механічних полів та їхньої інтенсивності в магнітоелектричних композитів із тріщинами та тонкими включеннями.

Однак при вивченні впливу теплового розширення, піроелектричного та піромагнітного ефектів на напружений стан тіл на основі застосування інтегральних формул та рівнянь типу Сомільяни слід обчислювати додатковий об'ємний інтеграл від внутрішнього взаємовпливу полів, що часто нівелює усі переваги методу граничних елементів. У випадку ізотропного термопружного тіла цей об'ємний інтеграл внутрішнього впливу температури на поля напружень і деформацій вдалося перетворити до граничного. Відповідний підхід успішно використано при дослідженні термопружної рівноваги ізотропних тіл із тріщинами. Однак, у випадку анізотропних термопружних тіл зведення такого об'ємного інтегралу до поверхневого стає досить громіздким завданням. Для подолання цієї проблеми розроблено «particular integral approach», який передбачає розбиття зайнятої тілом області на комірки, у кожній з яких температура апроксимується поліномом. Окремо для плоских задач термопружності запропоновано алгоритм перетворення об'ємного інтегралу до

контурного та побудовано відповідні інтегральні рівняння та тотожності типу Сомільяни. Однак, деякі з новоотриманих контурних інтегралів і тут слід обчислювати у певним чином відображеній області. Крім того, запропонований алгоритм не придатний до застосування при вивченні просторових областей.

Тому при дослідженні двовимірних задач термомеханіки часто використовують методи теорії функції комплексної змінної. Зокрема, у працях С.О. Калоєрова та його учнів отримано комплексні потенціали термоелектропружності типу Лехніцького та методами рядів отримано числові розв'язки для багатозв'язних пластинок із отворами та тріщинами. У нещодавніх публікаціях авторів даної доповіді на основі методів теорії функції комплексної змінної вперше отримано двовимірні тотожності типу Сомільяни для анізотропних термопружних тіл. При цьому всі контурні інтеграли обчислюються лише уздовж дійсних, а не у якийсь спосіб відображених, меж тіла. У подальших авторських працях відповідні тотожності типу Сомільяни отримані для двовимірних задач термоелектропружності анізотропних тіл як із використанням теорії функції комплексної змінної, так і на основі теорем взаємності робіт типу Бетті – Максвелла.

Проте загального підходу, що дав би можливість отримати тотожності типу Сомільяни, а відтак інтегральні рівняння прямого методу граничних елементів для одно-, дво- і тривимірних задач термомагнітоелектропружності досі не було побудовано. Тому у цій роботі попередні результати авторів узагальнені на випадок просторових задач термомагнітоелектропружності анізотропних тіл. При цьому використано лише загальні математичні методи теорії поля.

Результати. Як наслідок, отримано розширену тотожність Сомільяни для термомагнітоелектропружних анізотропних діелектриків, що не накладає обмежень на вимірність задачі. При цьому зумовлений ефектом взаємодії фізичних полів (внутрішнім температурним, електричним і магнітним навантаженням) об'ємний інтеграл зведено до поверхневого. З'ясовано фізичний зміст усіх ядер, які входять у побудовану інтегральну формулу. Подано диференціальні рівняння для їхнього визначення. Вплив зовнішніх чинників враховується інтегралами типу згортки, які треба обчислювати лише для точок межі тіла. Отримані інтегральні подання розширюють сферу застосування математичного апарату термомеханіки анізотропних тіл, у яких можуть взаємодіяти поля різної фізичної природи. Додаткові члени побудованої розширеної тотожності Сомільяни, що враховують вплив температурних полів на інші (механічні, електричні, магнітні), записані в компактній формі та мають зрозумілу фізичну інтерпретацію густин розподілених джерел тепла та їхніх диполів.

Отримані результати мають поряд із загальнотеоретичним значенням широкі можливості практичного застосування при побудові інтегральних рівнянь просторових, плоских та одновимірних задач термомагнітоелектропружності анізотропних діелектриків, а відтак і відповідних числових реалізацій прямої схеми методу граничних елементів. При цьому в основній схемі методу для врахування внутрішнього взаємовпливу полів слід обчислювати лише інтеграли по межі тіла, що дає істотні переваги порівняно з існуючими підходами.

Висновки. Завдяки побудованим інтегральним співвідношенням вдалося отримати низку ключових аналітичних та числових розв'язків двовимірних задач термомагнітоелектропружності анізотропних структурно неоднорідних тіл із тріщинами та тонкими включеннями, що відкривають нові особливості прояву явищ піроелектричного, п'єзоелектричного та п'єзомагнітного ефектів, зокрема, вплив останніх на концентрацію напруженостей фізико-механічних полів поблизу вершин тонких неоднорідностей.

11. ПРО ОДНЕ З УЗАГАЛЬНЕНЬ СИСТЕМИ ФУНКЦІЙ РАДЕМАХЕРА ТА УОЛША

Микола Працьовитий, Юлія Маслова

Національний педагогічний університет імені

М.П. Драгоманова

Вступ. Класична теорія рядів Фур'є пов'язана з розкладами функцій за синусоїдальними гармоніками. Альтернативною теорією розкладів функцій в ряди за ортонормованою системою функцій є теорія рядів Уолша. Система функцій Уолша, що являють собою «прямокутні» хвилі, була введена американським математиком Дж. Уолшем у 1923 році. Як виявилось, в теорії передачі сигналів такі хвилі мають суттєві переваги. Існує не лише глибокий паралелізм між теорією рядів Уолша і класичною теорією тригонометричних рядів, але й принципові відмінності. Системи функцій Уолша, будучи одним з найпростіших прикладів повної ортонормованої системи, цікава з точки зору теорії загальних ортогональних рядів. За останні півстоліття з'явилось чимало робіт, пов'язаних з застосуваннями функцій і рядів Уолша в обчислювальній математиці, в теорії кодування, в цифровій обробці сигналів тощо.

Функції Уолша, які є всеможливими добутками функції Радемахера, тісно пов'язані з двійковим зображенням дійсних чисел:

$$[0;1)_{\text{дв}} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 2^{-n} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2, \quad \alpha_i \in \{0;1\}. \quad 1)$$

Ми пропонуємо одне з узагальнень функцій Радемахера та Уолша, яке ґрунтується на узагальненні класичного двійкового зображення дійсних чисел $x \in [0;1]$.

Методи. Нехай $A_2 = \{0,1\}$ - алфавіт двійкової системи числення, $L = A \times A \times \dots \times A \times \dots$ - простір послідовностей 0 та 1, елементи якого позначатимемо $\bar{x} = (x_n)$, $\bar{y} = (y_n)$, $\bar{z} = (z_n)$. Множина L відносно бінарної операції $\oplus$, означеної рівностями

$$\bar{z} = \bar{x} \oplus \bar{y} = (x_n \oplus y_n) = (z_n), \quad \text{де } x_n \oplus y_n = z_n = \begin{cases} 0, & \text{коли } z_n \equiv x_n + y_n = 0 \text{ або } 2, \\ 1, & \text{коли } z_n \equiv x_n + y_n = 1; \end{cases}$$

утворює комутативну групу.

Якщо q_0 - фіксоване число з інтервалу $(0;1)$, $q_1 = 1 - q_0$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$, то для будь-якого числа $x \in [0;1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{q_0^{-1}}. \quad (2)$$

Ряд (2) називається Q_2 -представленням числа x , а його символічний запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{q_0^{-1}}$ – Q_2 -зображенням.

Зауважимо, що рівність (2) стає рівністю (1) при $q_0 = \frac{1}{2}$. Тому Q_2 -зображення є узагальненням класичного двійкового зображення.

Існує зліченна множина чисел, які мають два Q_2 -зображення. Це числа виду $\Delta_{c_1 \dots c_m 1(0)}^{q_0^{-1}} = \Delta_{c_1 \dots c_m 0(1)}^{q_0^{-1}}$. Домовившись не використовувати останнє зображення, отримуємо єдиність Q_2 -зображення. Тоді k -та Q_2 -цифра $\alpha_k = \alpha_k(x)$ є функцією числа, що зображується. Циліндром рангу m з основою $c_1 \dots c_m$

називається множина $\Delta_{c_1 \dots c_m}^{q_0^{-1}} = \{x : \alpha_i(x) = c_i, i = \overline{1, m}\}$. Циліндр є піввідрізком $\left[\Delta_{c_1 \dots c_m(0)}^{q_0^{-1}}; \Delta_{c_1 \dots c_m(1)}^{q_0^{-1}} \right)$ і має довжину $\left| \Delta_{c_1 \dots c_m}^{q_0^{-1}} \right| = \prod_{j=1}^m q_{c_j} = q_0^{N_0} q_1^{N_1}$, де $N_i = \#\{j : c_j = i, j = \overline{1, m}\}, i \in A_2$.

Множину L можна різними способами метризувати. У даній ситуації надприроднішою є метрика:

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n \oplus y_n}{2^n}$$

та її узагальнення

$$\rho_0(\bar{x}, \bar{y}) = z_1 q_{1-z_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(z_k q_{1-z_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{z_j} \right) \equiv \Delta_{z_1 z_2 \dots z_n \dots}^{q_0^{-1}},$$

де q_0 - фіксоване число з інтервалу $(0;1)$, $q_1 = 1 - q_0$.

Результати. На піввідрізку $[0;1)$ означимо послідовність функцій:

$$r_0(x) \equiv (-1)^{\alpha_1(x)} \cdot 2q_{1-\alpha_1(x)} = \begin{cases} 2q_1, & \text{якщо } x \in [0; q_0) \Leftrightarrow \alpha_1(x) = 0; \\ -2q_0, & \text{якщо } x \in [q_0; 1) \Leftrightarrow \alpha_1(x) = 1; \end{cases}$$

$$r_n(x) \equiv r_0 \left(\Delta_{\alpha_{n+1}(x) \alpha_{n+2}(x) \dots}^{q_0^{-1}} \right), \quad n \in N.$$

Функції $r_n(x)$ є узагальненням відомих функцій Радемахера [1] і співпадають з ними при $q_0 = \frac{1}{2}$. Для них зберігається властивість самих функцій Радемахера:

$$\int_{x \in \Delta_{c_1 \dots c_n}^{q_0^{-1}}} r_n(x) dx = 0$$

для довільного набору $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ з 0 та 1.

Система (послідовність) узагальнених функцій Уолша $\{\omega_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ отримується в результаті множення функцій Радемахера, тобто кожна функція Уолша є скінченним добутком функцій Радемахера. При цьому використовується традиційна нумерація Пеллі, а саме: поклавши, $\omega_0(x) \equiv 1$, для означення $\omega_n(x)$ число n представляється у двійковій системі числення:

$$n = 2^k + \varepsilon_{k-1} 2^{k-1} + \dots + \varepsilon_1 2^1 + \varepsilon_0, \varepsilon_i \in A_2.$$

Звідки бачити, що $2^k \leq n < 2^{k+1}$, де $k = k(n)$. Тепер означуємо функцією ω_n рівністю:

$$\omega_n(x) = \prod_{i=0}^k r_i^{\varepsilon_i}(x) = r_k(x) \prod_{i=0}^{k-1} r_i^{\varepsilon_i}(x).$$

Наприклад, для $n = 4 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ маємо $\varepsilon_0 = 0 = \varepsilon_1$, $\varepsilon_2 = 1$ і

$$\omega_4(x) = r_0^{\varepsilon_0}(x) r_1^{\varepsilon_1}(x) r_2^{\varepsilon_2}(x) = r_2(x).$$

Більше того, $\omega_{2^k}(x) = r_k(x) = r_0 \left(\Delta_{\alpha_{k+1}(x) \alpha_{k+2}(x) \dots}^{q_0^{-1}} \right)$, $\omega_{2^k-1}(x) = r_0(x) r_1(x) \dots r_{k-1}(x)$,

оскільки $2^k - 1 = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \dots + 2^1 + 1$.

Для $n = 5 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ отримуємо

$$\begin{aligned} \omega_5(x) &= r_0^1(x) r_1^0(x) r_2^1(x) = r_0(x) r_2(x) = r_0 \left(\Delta_{\alpha_1(x) \alpha_2(x) \dots}^{q_0^{-1}} \right) r_0 \left(\Delta_{\alpha_3(x) \alpha_4(x) \dots}^{q_0^{-1}} \right) = \\ &= (-1)^{\alpha_1(x) + \alpha_3(x)} 2^2 q_{1-\alpha_1(x)} q_{1-\alpha_2(x)}. \end{aligned}$$

Зауваживши, що при $2^k \leq n \leq 2^{k+1}$ і $n - 2^k = \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_i 2^i$ одержуємо

$$\omega_n(x) = r_k(x) \omega_{n-2^k}(x).$$

Класичні функції Уолша набувають лише двох значень 1 і -1, що не збереглося для даного їх узагальнення. Узагальнення, як і самі функції Уолша, в точках розриву неперервні справа.

Сім'я узагальнених функцій Уолша має властивості:

- 1) Добуток цілих степенів довільної скінченної кількості узагальнених функцій Радемахера тотожно співпадає з деякою функцією Уолша;
- 2) Добуток узагальнених функцій Уолша є деякою функцією Уолша;
- 3) Добуток узагальнених функцій Уолша є узагальненою функцією Уолша;
- 4) Система узагальнених функцій Уолша задовольняє умови ортогональності, тобто є ортогональною системою на $[0;1)$.

Висновки. Побудоване узагальнення дозволяє розвинути цілісну теорію послідовностей і рядів узагальнених функцій Уолша, отримати ряд змістовних функціональних та мультиплікативних співвідношень, розглянути ряд різноманітних застосувань, зокрема в задачах фрактальної геометрії та фрактального аналізу, дослідити тонкі локальні властивості різних математичних об'єктів, пов'язаних з двійковим та Q_2 - зображеннями, які є двосимвольними системами кодування дійсних чисел з нульовою надлишковістю.

ЛІТЕРАТУРА

1. Голубов, В. И. Ряды и преобразования Уолша: теория и применение / В. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов — М.: Наука, 1987. — 344 с.
2. Працьовитий, М. В. Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел / М. В. Працьовитий — К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. — 68 с.
3. Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілах / М. В. Працьовитий — К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

12. GROUP OF EQUIVALENCE TRANSFORMATIONS AND SOLUTION OF MATHEMATICAL PHYSICS EQUATIONS IN NONHOMOGENEOUS MEDIA

Ivan Tsyfra

AGH University of Science and Technology, Faculty of Applied Mathematics, Krakow, Poland

Tomasz Czyzycki

Institute of Mathematics, University of Bialystok, Bialystok, Poland

Introduction. In the present paper we show that the group analysis can be applied to the construction of solutions for equations of mathematical physics with varying coefficients characterizing properties of the media. We show that from the solution for a homogeneous medium one can generate the solution for a nonhomogeneous medium. This approach enables one to obtain not only the class of the integrable equations, but also nonintegrable in some sense. Regardless of integrability or nonintegrability of a given equation it is important, whether or not the coefficients of this equation lie on one orbit of the action of the equivalence group.

Methods. While studying the problems of the theory (and interpretation) of geophysical fields, it is necessary to solve boundary-value problems for equations of the form

$$u_{xx} + u_{yy} = a(x, y)\Phi(u, u_t), \quad (1)$$

where a is a parameter characterizing the nonhomogeneity of the medium and Φ is a smooth function. Assume that $a(x, y, t)$ is a function parameter contained in Eq. (1) along with $u(x, y, t)$. Then in the extended space (x, y, t, u, a) equation (1) admits a sufficiently wide group of transformations of the form

$$x' = V(x, y), \quad y' = W(x, y), \quad t' = t, \quad u' = u, \quad a' = \frac{a}{V_x^2 + W_x^2}, \quad (2)$$

where $f(z) = V(x, y) + iW(x, y)$ is an arbitrary analytic function.

We apply the group method [1, 2] to neutron diffusion equation which belongs to the class (1). One can reduce the stationary neutron diffusion equation to the second order ordinary differential equation in the following form [3]

$$y'' + V(x)y = 0, \quad (3)$$

where $V(x)$ is a smooth function characterizing properties of the media.

Results. It turns out that the group of transformations (2) is sufficiently wide to solve the Cauchy problem for equation (1). Using the invariance property of equation (1) with respect to transformations (2), we can easily verify that the following assertion is true:

Theorem 1. Assume that $u = f(x, y, t)$ is a solution of the Cauchy problem

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y),$$

for Eq. (1) with $a = a_0 = \text{const}$. Then $u = f(x', y', t')$ is a solution to the Cauchy problem

$$u|_{t=0} = \varphi(x', y'),$$

for equation (1) with $a = a_0(V_x^2 + W_x^2)$.

Thus, if the medium has an nonhomogeneity defined by the relation $a = a_0(V_x^2 + W_x^2)$, then the solution of the Cauchy problem for Eq. (1) can be obtained from the solution of the same problem for the homogeneous medium ($a = a_0$) by transformations (2).

One can obviously map a known solution of the Schrodinger equation with a given potential to the solution of the equation for a changed (in general time-dependent) potential.

Let us consider an application of the method discussed above to the new class of problems namely nonintegrable differential equations. We have proved the following theorem.

Theorem 2. If differential equation (3) is nonintegrable in quadratures, then equation

$$y'' + V_{\text{new}}(x)y = 0, \quad (4)$$

where

$$V_{\text{new}} = V\left(\frac{x}{1-ax}\right)(1-ax)^{-4},$$

is also nonintegrable in quadratures.

To prove theorem we use the infinitesimal criterium of invariance under equivalence transformations [1, 2]. The generator of equivalence group is in the form:

$$Y = \tau(x)\partial_x + \left(\frac{1}{2}\tau'(x)\right)y\partial_y - \left(\frac{1}{2}\tau''(x) + 2\tau'(x)V\right)\partial_V,$$

where $\tau(x)$ is a smooth function.

Taking $\tau = e^x$ and using the fact that the Airy equation is nonintegrable in quadratures one can show that the equation

$$y'' + \left[-\frac{1}{4} + e^{2x} \left(\ln(e^x - a) + \frac{1}{4} \right) \frac{1}{(e^x - a)^2} \right] \cdot y = 0$$

where a is real parameter, is nonintegrable in quadratures.

Conclusions. We show, that the finite group transformations helps us to construct the solution of the differential equation for the nonhomogeneous medium from the known solution for the homogeneous medium. It turns out that the method is also applicable to the integrable and nonintegrable differential equations. We can generate a family of ordinary differential equations nonintegrable (integrable) in quadratures by using finite group transformations. One can successfully apply the method discussed above to the Maxwell equations in nonhomogeneous medium.

REFERENCES

1. Olver, P.J., Applications of Lie Groups to Differential Equations / P.J. Olver. – New York: Springer-Verlag, 1986.
2. Fushchich, W., Symmetry of the Schrodinger Equation with Variable Potential / W Fushchich., Z Symenoh., I Tsyfra // *J. Nonlin. Math. Phys.* – 1998. - Vol. 5, № 1. – P. 13-22.
3. Tsyfra, I., Symmetry and solution of neutron transport equation in nonhomogeneous media / I. Tsyfra, T Czyzycki // *Abstract and Applied Analysis.* – 2014. - ID 724238. - P. 1-9.

13. ВПЛИВ ПОЧАТКОВИХ НАПРУЖЕНЬ НА ШВИДКІСТЬ ПОШИРЕННЯ ПЛОСКОЇ ПОЗДОВЖНЬОЇ ХВИЛІ В ШАРУВАТОМУ НАНОКОМПОЗИТІ

Ярослав Жук

*Київський національний університет імені
Тараса Шевченка*

Вступ. Визначення макроскопічних механічних властивостей нанокompозитів є складною задачею. Повна характеристика властивостей наноматеріалу і описання його макropоведінки вимагає врахування, зокрема, залишкових напружень, які виникають внаслідок технологічних особливостей виготовлення нанокompозиту. Присутність цих напружень може якісно змінити характер поведінки матеріалу [3,4,6]. Тому визначення залишкового напружено-деформованого стану наноматеріалу є важливою задачею. Залишкові технологічні напруження для наступних задач розглядаються як початкові. Відповідно в подальшому тіла з початковими напруженнями будемо називати попередньо деформованими.

Надійною технікою неруйнівного контролю залишкових (початкових) напружень в твердих тілах є ультразвукова методика [2]. Її застосування ґрунтується на теорії поширення пружних хвиль в попередньо напружених тілах, яка початково була розвинена для макро-, мезо- і мікророзмірних об'єктів [1,2,5]. Врахування динамічних ефектів є виправданим, оскільки воно дозволяє більш точно прогнозувати поведінку наноматеріалів. В даній роботі цей підхід застосовується до нано- і мікрооб'єктів з метою розробки нових математичних моделей для описання вказаних процесів при зменшенні характерних геометричних розмірів тіл. В роботі досліджуються особливості розповсюдження пружних хвиль в попередньо напружених тілах на нанорівні як фізичної основи ультразвукового методу неруйнівного контролю початкових напружень.

Постановка задачі. В роботі використовується підхід, який ґрунтується на апараті механіки суцільного середовища. При цьому мікро- і наномеханіка виступають як механіка тривимірних конструкцій і систем з характерними геометричними розмірами порядку мікрон або меншими. Композит складається з шарів двох матеріалів, що періодично чергуються. Матеріали шарів вважаються нелінійно пружними і описуються потенціалом типу Мернагана. Для моделювання процесу розповсюдження хвиль розвинута постановка задачі в рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності при скінченних початкових деформаціях.

Використаємо постановку задачі динаміки для багатошарових матеріалів, сформульовану в [1,2]. Вона ґрунтується на використанні лінеаризованих рівнянь руху і стану для стисливих тіл, які формулюються в термінах переміщень u_i , тензора узагальнених напружень σ_{ij}^* і компонентів тензорів четвертого рангу λ_{ijkl} і ω_{ijkl} , $i, j, k, l = 1, 2, 3$. Вирази для цих величин представлені зокрема в роботах [1,2].

Нехай вісь Oz_3 направлена по нормалі до поверхні контакту шарів. Товщини шарів $h^{(j)}$ в природному стані і $\tilde{h}^{(j)}$ – товщини шарів в початковому стані пов'язані співвідношенням: $\tilde{h}^{(j)} = \lambda_3^{(j)} h^{(j)}$.

Основні рівняння в декартових координатах в початковому стані (z_1, z_2, z_3) для стисливих тіл мають вигляд [1,2]

$$\tilde{L}_{m\alpha}^{(j)} u_{\alpha}^{(j)} = 0, \quad \tilde{L}_{m\alpha}^{(j)} = \tilde{\omega}_{im\alpha\beta}^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_{\beta}} - \tilde{\rho}^{(j)} \delta_{m\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}, \quad i, m, n = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де

$$\tilde{\omega}_{im\alpha\beta}^{(j)} = \frac{\lambda_i^{(j)} \lambda_{\beta}^{(j)}}{\lambda_1^{(j)} \lambda_2^{(j)} \lambda_3^{(j)}} \omega_{im\alpha\beta}^{(j)}; \quad \tilde{\rho}^{(j)} = \frac{\rho^{(j)}}{\lambda_1^{(j)} \lambda_2^{(j)} \lambda_3^{(j)}}. \quad (2)$$

Хвилею зверху позначені відповідні величини в початковому стані, а $\tilde{\rho}^{(j)}$ – густина в початковому стані.

Складові поверхневого навантаження при $z_3 = \text{const}$, віднесені до розмірів тіла в початковому стані задаються формулами [1–3]

$$\tilde{P}_m^{(j)} = \tilde{\omega}_{3m\alpha\beta}^{(j)} \frac{\partial u_\alpha^{(j)}}{\partial z_\beta}; \quad \tilde{P}_m^{(j)} = \frac{1}{\lambda_1^{(j)} \lambda_2^{(j)}} P_m^{*(j)}, \quad P_m^{*(j)} = \omega_{3m\alpha\beta}^{(j)} \frac{\partial u_\alpha^{(j)}}{\partial z_\beta}, \quad m, \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

Умови неперервності і періодичності на границях шарів запишуться відповідно у вигляді [1–3]

$$u_m^{(1)}(0) = u_m^{(2)}(0); \quad \tilde{P}_m^{(1)}(0) = \tilde{P}_m^{(2)}(0), \quad (3)$$

$$u_m^{(1)}(\tilde{h}^{(1)}) = u_m^{(2)}(-\tilde{h}^{(2)}); \quad \tilde{P}_m^{(1)}(\tilde{h}^{(1)}) = \tilde{P}_m^{(2)}(-\tilde{h}^{(2)}). \quad (4)$$

Задача про розповсюдження малих пружних збурень в попередньо деформованому шаруватому нанокompозиті зводиться до знаходження розв'язків лінеаризованих рівнянь руху (1) з врахуванням (2) при виконанні умов неперервності і періодичності (3) і (4).

Результати. В наведеній постановці досліджено особливості розповсюдження плоскої поздовжньої хвилі перпендикулярно до шарів нанокompозиту. Розглянуто поширення хвилі з фазовою нормаллю $\vec{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$.

Розрахунки проводились для декількох типів нанокompозитів. Залежності відносної швидкості поширення поздовжньої хвилі в попередньо напруженому матеріалі від параметра, який характеризує попередній напружений стан, мають монотонний, практично лінійний характер в усьому дослідженому інтервалі зміни структурного параметра. Збільшення початкового напруження веде до збільшення швидкості розповсюдження поздовжньої хвилі. Встановлено, що для деяких типів нанокompозитів величина малого початкового напруження практично не впливає на швидкість поширення хвиль. Отже, існує таке відношення шарів нанокompозиту, що для довільного початкового напруження, швидкість поздовжньої хвилі залишається рівною швидкості хвилі в ненапруженому композиті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь, А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями / А.Н. Гузь, – Киев: «А.С.К.», 2004. – 672 с.
2. Гузь, А.Н. Волны в слое с начальными напряжениями / А.Н. Гузь, А.П. Жук, Ф.Г. Махорт – К.: Наук. думка, 1976. – 104 с.
3. Жук, Я.А. Особенности распространения плоских волн вдоль слоев предварительно напряженного нанокompозитного материала / Я.А. Жук, И.А. Гузь Прикл. механика. – 2007. – т. 43, № 4. – С. 3–26.
4. Жук, Я.О. Визначення швидкості розповсюдження плоскої поздовжньої хвилі перпендикулярно шарам нанокompозитного матеріалу в присутності початкових напружень / Я.О. Жук, І.О. Гузь // Доповіді НАН України. – 2006. – № 12. – С. 36–43.
5. Akbarov, S.D. The influence of the third order elastic constants to the generalized Rayleigh wave dispersion in a pre-stressed stratified half-plane / S.D. Akbarov, M. Ozisik // Int. Jour. Eng. Sci. – 2003. – 41. – P. 2047–2061.
6. Springer Handbook on Nanotechnology / Ed. by B.Bhushan. – Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co., 2004. – 1222 p.

14. AMBIGUOUS REPRESENTATIONS

Oleh Nykyforchyn

*Institute of Mathematics, Kasimir the Great University of
Bydgoszcz, Bydgoszcz, Poland*

Dušan Repovš

*Faculty of Mathematics and Physics and Faculty of
Education, University of Ljubljana, Ljubljana, Slovenia*

Unfortunately, concepts of fuzziness and roughness do not completely cover uncertainty and imprecision in the description sets. The existing tools consider it to be a derivative of uncertainty and imprecision in description-recognition-membership of individual elements, which is insufficient. Let us imagine taking a digital photo of a text when the camera is subject to random small shifts. Then the image of a character is not uniquely determined and in order to recognize it, we cannot compare a region of a photo with a pattern on the per-pixel basis.

Moreover, if all pixels of the candidate image are obtained from the pattern by a shift of 1 pixel to the left, the result is much more acceptable than if all pixels of the pattern are moved by 1 pixel in random directions, although the two possibilities are equivalent from the "elementwise" point of view.

Even though fuzzy mathematics deals with sets, e.g. when fuzzy variants of subsetness, similarity and distance between sets are investigated, mostly (with rare exceptions) relations between subsets of \emph{the same} universe are considered. We believe that a fundamental distinction between an object and its observable image, e.g. between a 3-D body and its 2-D photo, has to be reflected in an adequate theory.

We propose notion of crisp and fuzzy ambiguous representations of subsets of one universe by subsets of another one. Sets under consideration are closed subsets of compact Hausdorff spaces, which in most cases is sufficient for applications, e.g. all closed bounded sets of R^n fit into this case.

Definition 1. An ambiguous representation between compacta X and Y is a subset $R \subset \exp X \times \exp Y$ such that:

- a) if $A, A' \in \exp X$, $B, B' \in \exp Y$, $A' \subset A$, $B \subset B'$, $(A, B) \in R$, then $(A', B') \in R$,
- b) $(A, Y) \in R$ for all $A \in \exp X$, and
- c) for all $A \in \exp X$ the set $AR = \{B \in \exp Y : (A, B) \in R\}$ is closed in $\exp Y$.

In the sequel „compact Lawson lattice» means a completely distributive lattice with the Lawson topology (hence a compact Hausdorff topological lattice).

Definition 2. Let X, Y be compacta, L be a compact Lawson lattice. A subset $R \subset \exp X \times \exp Y \times L$ is called an L -ambiguous representation between X and Y if:

- a) if $A, A' \in \exp X$, $B, B' \in \exp Y$, $\alpha, \alpha' \in L$, $A' \subset A$, $B \subset B'$, $\alpha \geq \alpha'$, then $(A, B, \alpha) \in R$ implies $(A', B', \alpha') \in R$;
- b) if $A \in \exp X$, $B \in \exp Y$, $\alpha, \beta \in L$ are such that $(A, B, \alpha), (A, B, \beta) \in R$, then $(A, B, \alpha \vee \beta) \in R$;
- c) $(A, Y, \alpha), (A, B, 0) \in R$ for all $A \in \exp X$, $B \in \exp Y$, $\alpha \in L$; and

d) for all $A \in \exp X$ the set $AR = \{(B, \alpha) \in \exp Y \times L : (A, B, \alpha) \in R\}$ is closed in $\exp Y \times L$.

It is equivalent to R being a subgraph of an L -fuzzy binary relation between $\exp X$ and $\exp Y$ (denoted by the same letter R for brevity) such that:

a') R is antitone in the first argument;

b') R is isotone and upper semicontinuous (i.e. preserves filtered infima) in the second argument; and

c') $R(A, Y) = 1$ for all $A \in \exp X$.

The mapping $R: \exp X \times \exp Y \rightarrow L$ is uniquely recovered by the formula $R(A, B) = \max\{\alpha \in L : (A, B, \alpha) \in R\}$. The value $R(A, B) \in L$ is interpreted as a degree which shows how well A can represent B (the more, the better). If $(A, B, \alpha) \in R$, then A represents B with fitness at least α . We can interchange the relational and the functional interpretations of L -ambiguous representations, whatever is more convenient in a particular case.

A common idea is that $R(A, B)$ shows how well a subset A represents a part of an image of B . Of course, we can combine shifts, expansions, rotations etc, depending on which distortions of images are expected. It is also not necessary that X and Y be of equal dimension. Assume, e.g., that Y is an area in atmosphere, and X is a finite set of points on the earth surface where automatic registration devices are installed. If there is a snow cloud somewhere in Y , and $A \subset X$ is a (probably incomplete) set of points where snowfall is observed, then it is possible to define a function $R(A, B)$, which will estimate the likelihood that the cloud is contained in a subset $B \subset Y$. Such problems, where uncertainty, distortions and incompleteness of information combine, are the main target of the introduced L -fuzzy ambiguous representations. See more in [1] on technical details and possible applications.

REFERENCES

1. Nykyforchyn, O. Ambiguous representations as fuzzy relations between sets / O. Nykyforchyn, D. Repovš // Fuzzy Sets and Systems. – 2011. - № 173, - P. 25-44.

15. ПРО ОДИН КЛАС НЕПЕРЕРВНИХ НІДЕ НЕ МОНОТОННИХ ФУНКЦІЙ З ФРАКТАЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Микола Працьовитий, Яніна Гончаренко,
*Національний педагогічний університет імені
М.П. Драгоманова*

Наталія Василенко
Інститут математики НАН України

Олексій Панасенко
*Вінницький державний педагогічний університет імені
Михайла Коцюбинського*

Вступ. Сьогодні неперервні нیده не монотонні функції все частіше привертають увагу дослідників (теоретиків та прикладників). Вони утворюють

сім'ю функцій значно ширшу, ніж сім'я недиференційовних функцій. Вже знайдено достатньо ефективні методи їх задання, опису та дослідження, підпорядковані детальному вивченню локальних тополого-метричних і фрактальних властивостей. Одному з таких присвячена дана робота. З цією метою нами використовується класичне s -кове зображення чисел відрізка $[0,1]$.

Нехай $1 < s$ – фіксоване натуральне число, $A_s \equiv \{0, 1, \dots, s-1\}$ – алфавіт, s -ковим представленням числа $x \in [0,1]$ називається його розклад в ряд

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s^n} + \dots, \quad (1)$$

що скорочено (символічно) записується $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s$ і називається s -ковим зображенням числа x і ряду (1). Добре відомими є властивості s -кового зображення, його геометрія (властивості циліндричних та хвостових множин, позиційні та метричні співвідношення тощо) і тополого-метрична теорія.

Об'єкти і методи дослідження. Нехай задано вектор

$$\bar{q} = (q_0, q_1, q_2, \dots, q_8) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right),$$

тобто $q_0 = q_2 = q_3 = q_5 = q_6 = q_8 = \frac{1}{3}, \quad q_1 = q_4 = q_7 = -\frac{1}{3}.$

За вектором $\bar{q}$ означимо вектор $\bar{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_9)$, де $\beta_0 = 0$,

$$\beta_i = q_0 + q_1 + \dots + q_{i-1} = \beta_{i-1} + q_{i-1}, \quad i = \overline{1, 9},$$

тобто $\beta_0 = \beta_2 = 0, \quad \beta_1 = \beta_3 = \beta_5 = \frac{1}{3}, \quad \beta_4 = \beta_6 = \beta_8 = \frac{2}{3}, \quad \beta_7 = \beta_9 = 1.$

Розглядається функція f , означена рівністю

$$f(x) = f\left(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^9\right) = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)} \right), \quad (2)$$

яка є коректно визначеною як у 9-ково-раціональних, так і в 9-ково-ірраціональних точках. Очевидно, що $f(0) = f(\Delta_{(0)}^9) = 0$, $f(1) = f(\Delta_{(8)}^9) = 1$.

Нас цікавлять локальні і глобальні властивості функції f , її множини рівнів і особливостей, а також автомодельні та інтегральні властивості функції.

Результати. Теорема 1. 1) Функція f є неперервною в кожній точці відрізка $[0,1]$, в точці $x=0$ – неперервною справа, в точці $x=1$ – неперервною зліва. Вона набуває всіх значень з відрізка $[0,1]$;

2) функція f є ніде не монотонною на відрізку $[0,1]$, при цьому приріст функції f на циліндр $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_p}^9$ обчислюється за формулою:

$$\mu_f(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_p}^9) = \prod_{j=1}^p q_{c_j}.$$

Теорема 2 (про функціональні співвідношення). Функція f в класі неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій є єдиним розв'язком наступної системи функціональних рівнянь

$$f(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}^9) = \beta_i + q_i f(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}^9), \quad i = \overline{0,8}.$$

Наслідок 1. Для функції f має місце рівність $f(1-x) = 1-f(x)$.

Наслідок 2. Для інтеграла Рімана має місце рівність:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Одним із напрямків дослідження фрактальних властивостей функцій є вивчення властивостей її множин рівнів, тобто множин виду:

$$f^{-1}(y_0) = \{x : f(x) = y_0\}, \quad y_0 \in E(f).$$

Ми описали всі рівні функції f , зокрема отримано наступні результати.

Теорема 3 (про фрактальні властивості рівнів). Всі рівні функції f є континуальними, ніде не щільними і мають нульову міру Лебега. Більше того, для розмірності Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(f^{-1}(y_0))$ мають місце наступні твердження:

1) якщо $y_0 = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}^{\bar{q}}(\tau)$, де $\tau \in \{0,2\}$ (або $\tau \in \{6,8\}$, або $\tau \in \{3,5\}$), то $f^{-1}(y_0) = C[9, V] \equiv \{x : \alpha_{m+k}(x) \in V \equiv \tau\}$, $\alpha_0(f^{-1}(y_0)) = \log_9 2$;

2) якщо $y_0 = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}^{\bar{q}}(1)$, то $f^{-1}(y_0) = C[9, V] \equiv \{x : \alpha_{m+k}(x) \in V = \{3,4,5\}\}$, $\alpha_0(f^{-1}(y_0)) = \frac{1}{2}$;

3) якщо $y_0 = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}^{\bar{q}}(7)$, то $f^{-1}(y_0) = C[9, V] \equiv \{x : \alpha_{m+k}(x) \in V = \{6,7,8\}\}$, $\alpha_0(f^{-1}(y_0)) = \frac{1}{2}$.

В доповіді пропонуються результати дослідження самоафінних властивостей графіка, інтегральних та інших фрактальних властивостей функції f .

ЛІТЕРАТУРА

1. Працьовитий, М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий - Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

2. Працьовитий, М.В. Диференціальні і фрактальні властивості одного класу самоафінних функцій / М.В. Працьовитий, О.Б. Панасенко // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. - 2009. - Т. 70. – С. 128-139.

3. Працьовитий, М.В. Ніде не монотонні сингулярні функції / М.В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. - К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. - 2011. - № 12. С. 24-36.

16. ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПОЧАТКОВИХ НАПРУЖЕНЬ НА КОНТАКТНУ ВЗАЄМОДІЮ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ЦИЛІНДРА І ШАРУ БЕЗ ВРАХУВАННЯ СИЛ ТЕРТЯ

Наталія Ярецька, В'ячеслав Рудницький
Хмельницький національний університет

Вступ. Як відомо, спектр використання пружних тіл з початковими (залишковими) напруженнями досить широкий. Особливо це стосується розрахунку важких фундаментних плит і будівельних перекриттів, що знаходяться в полі дії гравітаційних сил; вивчення проблеми передачі навантаження у конструкціях та деталях машин за допомогою їх контактної взаємодії тощо. Тому є досить актуальним проведення нових теоретичних досліджень впливу початкових (залишкових) напружень на контактну взаємодію пружних тіл.

Перші праці з контактної взаємодії тіл, що враховують вплив початкових напружень, присвячені взаємодії попередньо напружених тіл із жорсткими та пружними штампами без початкових напружень. Причому розглядаються або пружні потенціали конкретної структури, або задача ставиться в загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл при довільній структурі пружного потенціалу на основі лінеаризованої теорії пружності. У загальному випадку постановка таких задач вимагає залучення апарату нелінійної теорії пружності, але при досить великих початкових деформаціях можна обмежитися і її лінеаризованим варіантом [1].

Методи. Методи, що розвиваються теорією контактних задач, дозволяють знайти розподіл тиску у місцях контакту, вивчити концентрацію напружень та дослідити напружено-деформований стан у тілах. Тому в роботі досліджено просторову статичну задачу контактної взаємодії попередньо напруженого циліндричного штампу скінченного розміру на пружний шар з початковими (залишковими) напруженнями без врахування сил тертя.

При дослідженні розрізнятимемо три стани тіл: природний, коли у всіх тілах відсутні напруження; початковий стан; та збурений стан, всі величини якого складаються з суми відповідних величин початкового стану та збурень. Вважаючи збурення набагато меншими відповідних величин початкового стану, дослідження проводимо в рамках лінеаризованої теорії пружності. Вважаємо, що початкові напружено-деформівні стани в шарі, штампі та основі є однорідними та рівними.

Дослідження проводиться у системі лагранжових координат (x_1, x_2, x_3) , які в початковому стані співпадатимуть із декартовими координатами (y_1, y_2, y_3) . Матеріали штампу, шару та основи будемо вважати ізотропними стисливими або нестисливими з довільною структурою пружного потенціалу. У випадку ортотропних матеріалів приймається, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають з напрямками осей координат.

Загальні співвідношення напружено-деформівного стану пружних шару, циліндричного штампу та основи представлено з використанням відлікового

методу, який наведений у [1]. Побудова аналітичних розв'язків для циліндра і шару з початковими (залишковими) напруженнями відбувалась за допомогою методу відокремлення змінних (методу Фур'є) та інтегральних перетворень Ханкеля, відповідно. Також в роботі використаний метод розв'язання парних інтегральних рівнянь з подальшим їх зведенням до інтегрального рівняння типу Фредгольма другого роду, розв'язок якого знайдено методом послідовних наближень. У подальшому задача зводиться до розв'язання квазірегулярної нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що розв'язується методом редукції і засобами програмного забезпечення [2] для потенціалів конкретної структури.

Результати. У даній роботі в рамках лінеаризованої теорії пружності було знайдено розв'язок осесиметричної статичної задачі контактної взаємодії попередньо напруженого циліндричного штапу та пружного шару з початковими (залишковими) напруженнями, при умові, що шар лежить на основі з початковими напруженнями або без них. Усі дослідження проведено в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу для стисливих і нестисливих тіл. Відзначимо також, що розв'язок поставленої задачі представлений для випадку ідеального контакту між тілами, що взаємодіють.

В результаті дослідження було одержано аналітичні співвідношення для шару, штапу та основи, які відображають вплив початкових напружень на закон розподілу контактних характеристик та дозволяють досліджувати напружено-деформований стан у зоні контакту, й на відміну від класичної теорії пружності враховують вплив початкових напружень. Знайдено розв'язки для пружного циліндра з початковими напруженнями, що втискається у попередньо напружений шар, які виражаються через нескінченну систему констант. Ці константи визначаються з квазірегулярної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Виписано компоненти переміщень і напружень у внутрішніх точках основи та шару з початковими напруженнями для усіх розглянутих випадків. Знайдено розв'язки нескінченної квазірегулярної системи лінійних алгебраїчних рівнянь для потенціалів конкретної структури (гармонічний, Бартенєва–Хазановича, Трелоара), через які визначається напружено-деформований стан у пружних тілах з початковими напруженнями;

Досить важливим результатом даної роботи є те, що усі дослідження представлені в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу, що дає ряд переваг по відношенню до використання пружних потенціалів конкретних структур. І лише при числовій реалізації було використано конкретні форми пружних потенціалів, таких як: гармонічний потенціал, потенціал Бартенєва–Хазановича і потенціал Трелоара. При широкому варіюванні коефіцієнта видовження, який визначає переміщення початкового (залишкового) стану, досліджено вплив початкових напружень на закон розподілу контактних напружень і переміщень пружних циліндра, шару та основи.

Висновки. Виявлений при дослідженні вплив початкових (залишкових) напружень є суттєвим для стисливих та нестисливих тіл і повинен враховуватися при розрахунках на міцність у деталях конструкцій. Це підтверджено одержаними аналітичними, графічними та числовими результатами, що дає

змогу використовувати їх в інженерних розрахунках. А запропонована числова реалізація методу дослідження дала змогу графічно відобразити цей вплив на закон розподілу контактних напружень і переміщень поперечно напружених штампу, шару та основи для потенціалів найпростішої структури.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь, А.Н. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями / А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий. – Х.: изд. ПП Мельник, 2006. – 710 с.
2. Ярецкая, Н.А. Пространственная контактная задача для упругого слоя и цилиндрического штампа с начальными напряжениями / Н.А. Ярецкая // Прикл. механика. – 2014. – № 50 (4). – С. 30–40.

17. ІДЕНТИФІКАЦІЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО НАВАНТАЖЕННЯ, ЯКЕ ДІЄ НА ЦИЛІНДРИЧНУ ШАРНІРНО-ОБПЕРТУ ОБОЛОНКУ, ПІДКРІПЛЕНУ КОНЦЕНТРИЧНИМИ РЕБРАМИ ЖОРСТКОСТІ

Євген Янютін

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

Павло Єгоров

Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Вступ. Сучасне машинобудування для уникнення аварійних ситуацій та економії ресурсів (матеріалів, енергії, часу, тощо) потребує дослідження складних механічних систем і технологічних процесів. Такі дослідження у більшості випадків пов'язані із значною кількістю розрахунків, тому існує необхідність удосконалення методів розрахунку таких систем. На прикладі механічної системи, яка складається з декількох елементів, наведемо один із шляхів подолання згаданих складнощів.

Механічна система, яка розглядається у даному дослідженні, складається з шарнірно-обпертої оболонки та концентричних ребер жорсткості, які закріплені на ній без ковзання. На внутрішню поверхню оболонки діє невідоме розподілене вісесиметричне нестационарне навантаження [1], закон зміни в часі якого необхідно віднайти.

Методи. Для побудови математичної моделі механічної системи пропонується підхід, який ґрунтується на виділенні основного об'єкту дослідження і урахуванні впливу об'єктів, які з ним взаємодіють, за допомогою введення зосереджених чи розподілених навантажень.

Коливання основного об'єкту дослідження (оболонки) розглядається на основі математичної моделі типу Тимошенко. Розв'язок відповідних диференціальних рівнянь шукаємо при нульових початкових умовах та граничних умовах, які відповідають шарнірному обпиранню. При цьому функції радіальних $w(\xi; t)$ та

осьових $u(\xi; t)$ переміщень та кутів нахилу нормалі до серединної поверхні $\psi(\xi; t)$ розкладаємо у ряди Фур'є [1]. Слід відмітити, що задачу зручно розв'язувати з використанням безрозмірних часу (t) та координати (ξ).

Наявність кожного концентричного ребра жорсткості будемо враховувати за допомогою введення відповідних сил та моментів:

$$\begin{aligned} P_x(\xi; t) &= -p_x(t)[H(\xi - \xi_p) - H(\xi - \xi_p - l_p/l)]; \\ P_z(\xi; t) &= -p_z(t)[H(\xi - \xi_p) - H(\xi - \xi_p - l_p/l)]; \\ M_x(\xi; t) &= \frac{h}{2} p_x(t)[H(\xi - \xi_p) - H(\xi - \xi_p - l_p/l)], \end{aligned} \quad (1)$$

де h – товщина оболонки; ξ_p – координата розташування ребра жорсткості; l_p – ширина ребра; l – довжина оболонки.

Невідомі сили та моменти можна знайти з відповідних умов контакту, які передбачають відсутність ковзання ребер на оболонці та малу величину ширини зони контакту ребра з оболонкою у порівнянні з довжиною оболонки.

$$w_{p_n}(t) = \frac{l}{l_p} \int_{\xi_{p_n}}^{\xi_{p_n} + \frac{l_{p_n}}{l}} w(\xi; t) d\xi; \quad u_{p_n}(t) - \frac{h_{p_n}}{2} \psi_{p_n}(t) = \frac{l}{l_{p_n}} \int_{\xi_{p_n}}^{\xi_{p_n} + \frac{l_{p_n}}{l}} \left(u(\xi; t) + \frac{h}{2} \psi(\xi; t) \right) d\xi. \quad (2)$$

У наведеному рівнянні $w_{p_n}(t)$, $u_{p_n}(t)$, $\psi_{p_n}(t)$ – функції радіальних та осьових переміщень і кутів нахилу нормалі до серединної поверхні ребер жорсткості, $n = 1..N$ – порядковий номер ребра (N – загальна кількість ребер жорсткості). Функції $w_{p_n}(t)$, $u_{p_n}(t)$, $\psi_{p_n}(t)$ можуть бути знайдені в загальному вигляді з використанням операційного числення на основі відповідних рівнянь коливань згідно стержневої теорії [2]. Для розв'язку оберненої задачі по ідентифікації невідомого навантаження $Q(t)$ у якості вихідних даних необхідно мати інформацію щодо процесу деформування, таку як функція радіальних або осьових переміщень, чи кутів нахилу нормалі до серединної поверхні оболонки. Згадану інформацію можна отримати, наприклад, при проведенні експерименту або розв'язку відповідної прямої задачі при умові, що збурююче навантаження є відомою функцією.

На основі рівнянь контакту та рівняння, яке описує, наприклад, відомі радіальні переміщення в деякій точці, отримаємо систему з $2N+1$ інтегральних рівнянь Вольтера I роду відносно невідомих функцій $Q(t)$, $p_{x_n}(t)$, $p_{z_n}(t)$. Розв'язок інтегральних рівнянь Вольтера можна шукати з використанням наближеного методу, який ґрунтується на заміні інтегралів скінченими сумами [3]. Отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь представляємо у матричній формі, після чого її розв'язок можна знайти з використанням узагальненого методу Гауса.

Оскільки задача знаходження невідомих контактних зусиль та зовнішніх навантажень є некоректною, для побудови стійкого розв'язку можна використати згладжуючий алгоритм, такий як алгоритм регуляризації Тихонова [1].

Результати. У результаті розв'язку отриманої системи інтегральних рівнянь Вольтера I роду знайдемо функції зміни в часі контактних сил та невідомого збурюючого навантаження.

Правильність побудови розв'язку оберненої задачі перевірялася шляхом зіставлення отриманих результатів з вихідними даними відповідної прямої задачі, присвяченої дослідженню динамічних коливань системи під дією відомого навантаження. У свою чергу адекватність розв'язку прямої задачі була підтверджена шляхом зіставлення з результатами, отриманими методом скінченних елементів.

Висновки. У наведеному дослідженні успішно ідентифікується навантаження, яке діє на шарнірно-обперту оболонку, підкріплену концентричними ребрами жорсткості. Використання згладжуючого алгоритму при цьому дає можливість отримати результати з пошуку нестационарних навантажень з високою стійкістю до різного роду похибок у вихідних даних. Розроблений підхід дозволяє ефективно вирішувати прямі та обернені задачі механіки деформованого твердого тіла для систем, що складаються з декількох елементів та перебувають під впливом нестационарних навантажень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Янютин, Е.Г. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций / Е.Г. Янютин, И.В. Янчевский, А.В. Воропай, А.С. Шарапата. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с.
2. Кохманюк, С.С. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках / С.С. Кохманюк, Е.Г. Янютин, Л.Г. Романенко – К. : Наук. думка, 1980. – 232 с.
3. Янютин Е.Г. Математическое моделирование нестационарных колебаний элементов конструкций / Е.Г. Янютин, Н.И. Воропай, Г.А. Гнатенко, А.С. Шарапата. – Харьков : Изд-во «Лидер», 2014. – 297 с.

18. ПРО УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ПАРАБОЛІЧНИМ ПРОЦЕСОМ В КРУГОВОМУ СЕКТОРІ

Олексій Капустян, Олена Капустян

*Київський національний університет імені
Тараса Шевченка*

Олег Мазур

Національний університет харчових технологій

Вступ. Розглядається задача керування параболічним процесом в круговому секторі. Задача не допускає ні повного розщеплення, ні застосування L^2 - теорії.

Методи. Для розв'язання поставленої задачі в класі розподілених керувань використовується біортонормовані системи функцій та подальший аналіз розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма.

В області $Q = (0; T) \times \Omega$, $\Omega = \{(r; \theta) | r \in (0; 1), \theta \in (0; \pi)\}$ досліджується розв'язність наступної задачі оптимального керування: знайти функцію стану $y = y(t; r; \theta)$ і керування $u = u(t; \theta)$ такі, що

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \Delta y + g(r) \cdot u(t; \theta), & (t; r; \theta) \in Q, \\ y|_{r=1} = y|_{\theta=0} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta}|_{\theta=0} = \frac{\partial y}{\partial \theta}|_{\theta=\pi}, \\ y|_{t=0} = h(r)p(\theta), \end{cases} \quad (1)$$

$$J(y; u) = \int_0^1 r \|y(T; r)\|_D^2 dr + \int_0^T \|u(t)\|_D^2 dt \rightarrow \inf, \quad (2)$$

де g, h, p — задані функції, $\|\cdot\|_D$ — норма в $L^2(0; \pi)$, що задається рівністю

$$\|v\|_D = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} v(\theta) \psi_n(\theta) d\theta \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

де системи функцій

$$\begin{aligned} \psi &= \left\{ \psi_0 = \frac{2}{\pi^2}, \psi_{2n} = \frac{4}{\pi^2} (\pi - \theta) \sin 2n\theta, \psi_{2n-1} = \frac{4}{\pi^2} \cos 2n\theta \right\}, \\ \phi &= \{ \phi_0 = \theta, \phi_{2n} = \sin 2n\theta, \phi_{2n-1} = \theta \cos 2n\theta \} \end{aligned}$$

є біортонормованими і повними в $L^2(0; \pi)$.

Результати. За допомогою цих функцій задача (1), (2) зводиться до послідовності зв'язаних між собою початково-крайових задач (3), (4), (5) в області $\Pi = (0; T) \times (0; 1)$ з функціоналом якості (6).

$$\begin{cases} \frac{\partial y_0}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial y_0}{\partial r} \right) + u_0(t) \cdot g(r), & (t; r) \in \Pi \\ y_0(t; 1) = 0, & t \in (0; T) \\ y_0(0; r) = p_0 \cdot h(r), & r \in (0; 1) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial y_{2n-1}}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial y_{2n-1}}{\partial r} \right) - \left(\frac{2n}{r} \right)^2 \cdot y_{2n-1} + u_{2n-1}(t) \cdot g(r), & (t; r) \in \Pi \\ y_{2n-1}(t; 1) = 0, & t \in (0; T) \\ y_{2n-1}(0; r) = p_{2n-1} \cdot h(r), & r \in (0; 1) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial y_{2n}}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial y_{2n}}{\partial r} \right) - \left(\frac{2n}{r} \right)^2 \cdot y_{2n} - \frac{4n}{r^2} y_{2n-1} + u_{2n}(t) \cdot g(r), \quad (t, r) \in \Pi \\ y_{2n}(t; 1) = 0, \quad t \in (0; T) \\ y_{2n}(0; r) = p_{2n} \cdot h(r), \quad r \in (0; 1) \end{cases} \quad (5)$$

$$J(y; u) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 r \cdot y_n^2(T; r) dr + \int_0^T u_n^2(t) dt \right) = J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} J_n \quad (6)$$

Висновки. Доведено, що задача (1), (2) має єдиний розв'язок $\{\tilde{y}; \tilde{u}\}$, причому

$$\tilde{u}(t; \theta) = \sum_{n=0}^N \tilde{u}_n(t) \varphi_n(\theta),$$

де функції $\{\tilde{u}_n\}_{n=0}^N$ визначаються з інтегральних рівнянь Фредгольма, ядра яких виписуються явно за допомогою функцій Бесселя $\{J_{2n}\}_{n=0}^N$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Моисеев, Е.И. О разрешимости нелокальной краевой задачи с равенством потоков на части границы и сопряженной к ней задачи / Е.И. Моисеев, В.Э. Амбарцумя // Дифференциальные уравнения. - 2008. - Т. 16. № 5. - С. 718-725.

2. Kapustyan, V.O. Problem of optimal control for the Poisson equation with nonlocal boundary conditions / V.O. Kapustyan, O.A. Kapustyan, O.K. Mazur // Journal of Mathematical Sciences. - 2014. — Vol. 201, № 3. — P. 325-334.

19. МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ПРИДУШЕННЯ ТАНЦІВ ПРОВІДІВ З ВИКОРИСТАННЯМ РОЛИКОВОГО ВІБРОГАСНИКА

Dmytro Legeza

UBS Group AG, Zabierzów, Poland

Віктор Легеза

*Національний університет біотехнологій і
природокористування України,*

Вступ. Танці проводів – це стійкі періодичні низькочастотні (0,1 – 1 Гц) коливання електричних проводів (тросів) в прольоті з одностороннім або асиметричним відкладенням ожеледі (снігу, паморозі), які породжуються неперервним потоком повітря зі швидкостями 3 – 25 м/с і які утворюють стоячі хвилі із числом півхвиль від одної до двадцяти і амплітудою 0,3 – 5 м [3 – 6, 8, 11, 12]. В деяких випадках максимальні значення амплітуд досягають величини стріли провисання проводів (5 – 10 м). Самим небезпечним є діапазон напрямів повітряного потоку під кутами $30^0 - 70^0$ до осі лінії електропередач (ЛЕП) [4, 12].

Ожеледь відкладається переважно з навітряної сторони проводу. Якщо відкладення ожеледі має несиметричну форму відносно осі проводу, то вже невеликий поворот перерізу проводу (кручення) призводить до зміни швидкостей його обтікання повітряними потоками знизу і зверху (флатер). Як наслідок, в околі проводу у вигляді своєрідного «льодового крила» з'являється періодична вертикальна підйомна сила, яка і змушує провід коливатись у вертикальній площині, перпендикулярній вектору повітряного потоку.

Дослідженню процесу галопування проводів присвячені численні роботи [3 – 6, 8, 11, 12]. Першим в цій науковій області був Дж. П. Ден-Гартог [3], який у 1932 році провів експериментальні дослідження коливань профілю у формі півкруга з одним ступенем волі у повітряному потоці і пояснив процес галопування як флатер «льодового крила». В результаті ним було отримано необхідну умову виникнення галопування одиничного проводу, яка залежить тільки від аеродинамічних характеристик профілю. В подальшому методами математичного моделювання було показано, що умова Дж. П. Ден-Гартога є достатньою для виникнення коливань поперек потоку при відсутності внутрішнього демпфірування.

На сьогодні розроблені математичні моделі аеродинаміки багатофазних проводів і вантових структур, для яких умови Ден-Гартога не виконуються [4, 6, 8, 12]. Це пояснюється тим, що багатофазні проводи об'єднані в один пакет розпірками по всій довжині прольоту, що надає пакету проводів підвищеної жорсткості на закручування. В таких математичних моделях часто застосовується метод скінченних елементів із залученням ліцензованих обчислювальних комплексів [5, 8, 12].

Для боротьби з танцями проводів використовують різноманітні гасники коливань [2, 4, 6, 11, 12], а найчастіше – маятникові [6]. Вони мають ряд суттєвих недоліків, і головний з них – безпосереднє закріплення гасників на проводах, що призводить до локальних навантажень, і як наслідок, до їхнього перетирання і обриву.

В роботі для розв'язання цієї проблеми пропонується використовувати роликові гасники коливань [1, 2], які розміщені в місцях закріплення проводів на гірляндах ізоляторів. У зазначених місцях зосереджене все навантаження від статичної вертикальної складової ваги проводів, а також концентруються всі горизонтальні динамічні збурення, які передаються від галопуючого проводу у сусідні прольоти та підсилюються власними коливаннями самої гірлянди ізоляторів. Тому саме в цих місцях найкраще контролювати процес утворення і придушення галопування проводів потужних ЛЕП. Отже, за цією схемою передача як горизонтального, так і вертикального навантаження від галопуючих проводів і самого гасника здійснюється безпосередньо на гірлянду ізоляторів.

Раніше коткові гасники (або BVA-гасники – Ball Vibration Absorber) вже позитивно зарекомендували себе у практиці віброзахисту різних несучих об'єктів, таких як телевежі, радіощогли, стійки і лопаті вітроелектростанцій, транспортні засоби тощо [1, 7, 9, 10]. Роликові гасники [2] також належать до класу BVA-гасників, тільки замість алгебраїчних поверхонь 2-го порядку їхніх робочих тіл для профілювання виїмок використовується трансцендентна крива –

брахістохрона, яка забезпечує реалізацію ізохронних коливань робочого тіла гасника незалежно від їхньої амплітуди [1, 2].

Отже, віброзахисна система, яка включає в себе несуче тіло (гірлянду ізоляторів із зв'язаними з нею проводами) та встановлений на ньому роликовий гасник, і буде об'єктом нашого дослідження.

Мета роботи – побудувати і дослідити математичну модель, яка описує динамічний процес віброзахисту несучого тіла з використанням нового роликового гасника, а також оцінити ефективність його функціонування.

Методи. Для побудови математичної моделі процесів віброзахисту в цій роботі використовувались методи варіаційного числення та аналітичної механіки для неголомонних систем, а для дослідження цієї моделі – методи теорії коливань та обчислювальної математики, а саме числові методи оптимізації та інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь.

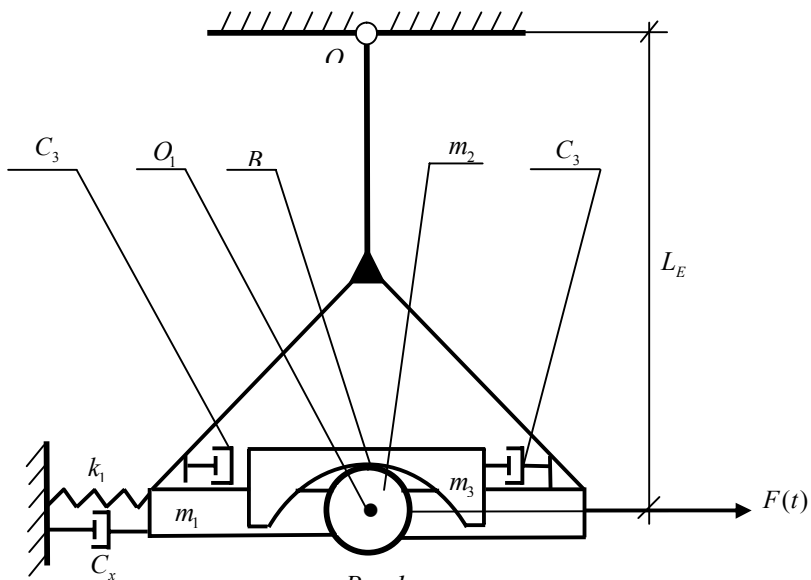


Рис. 1

В роботі розглянуті коливання гірлянди ізоляторів в околі її вертикального положення, які викликані галопуванням електричних проводів в прольоті між двома проміжними опорами. Гірлянда ізоляторів з приєднаними до неї проводами моделюється як математичний маятник, який і представляє собою несуче тіло зведеної маси m_1 . Зовнішнє збурення, що діє на математичний маятник, представлено у вигляді періодичної сили $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ з частотою, близькою до частоти власних коливань ω_0 електричного проводу за першою формою (резонанс). Маятник довжиною L_E закріплено на циліндричному шарнірі O , відносно якого він може вільно обертатись без тертя. Руху несучого тіла перешкоджає пружний елемент з коефіцієнтом жорсткості k_1 (який моделює пружні властивості натягнутого електричного проводу) і демпфер із коефіцієнтом в'язкого опору C_x . Цей демпфер введено для врахування

демпфірування, обумовленого силами внутрішнього тертя в матеріалах електричного проводу при його згинальних коливаннях. Два демпфера із загальним коефіцієнтом в'язкого опору C_η з'єднують робоче тіло гасника з несучим тілом і слугують для поглинання енергії коливань робочого тіла гасника масою m_3 . Робоче тіло на своїй нижній грані має якнайменше дві опуклі виїмки, які перекочуються по відповідних циліндричних роликах масою m_2 . На рис 1. показано тільки один такий ролик зі «своєю» виїмкою. При цьому рух робочого тіла відносно несучого тіла розглядається як плоско-паралельний.

Декартову прямокутну систему координат $O_1X_1Z_1$ оберемо таким чином. Початок системи координат розташуємо в центрі мас несучого тіла у точці O_1 . Вважаємо, що центри мас несучого тіла та ролика гасника співпадають і у вихідному положенні вони розміщені у точці O_1 . Вісь O_1X_1 направимо горизонтально вправо, а вісь O_1Z_1 – вертикально вгору.

В цій задачі введемо дві незалежні узагальнені координати γ і θ , де γ – кут відхилення маятника OO_1 разом із гасником та несучим тілом відносно вихідного положення; θ – параметр, який визначає положення центра мас робочого тіла при його відносному русі по ролику. Кут γ вважається додатним, якщо поворот маятника навколо точки O здійснюється за годинниковою стрілкою.

Новизна такої постановки задачі полягає в тому, що в попередніх дослідженнях [1] динаміки аналогічної віброзахисної системи не враховувався поворот несучого тіла разом із гасником навколо точки O через значну величину L_E і малий кут відхилення γ гасника від вертикалі ($\gamma \leq 1^\circ$). Тут таке припущення є неадекватним через невелику довжину L_E маятника і немалі кути γ , що призвело би до некоректних результатів.

Результати. Для побудови математичної моделі процесу придушення галопування електричних проводів був застосований формалізм Апеля для систем із кінематичними в'язями. З методичним підходом його застосування до досліджуваних віброзахисних систем можна познайомитись у [1]. Він дозволяє одразу звільнитись від кінематичних в'язей за допомогою функції S , яка має назву енергії прискорень. В отриманих рівняннях руху системи була зроблена заміна змінної: $\theta = \pi - 2\eta$. Отже, після зазначених перетворень у відповідності до формалізму Апеля і [1] було виведено систему двох нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\left[\frac{J_1 + J_3}{m_1 L_E^2} + (1 + \nu) \right] \ddot{\gamma} L_E + (1 + \nu) g \sin \gamma + \omega_0^2 L_E \sin \gamma \cos \gamma + 2n_x L_E \dot{\gamma} \cos^2 \gamma - 4\nu R \ddot{\eta} \cos(\eta) \cos(\eta + \gamma) + 4\nu R \dot{\eta}^2 \sin(2\eta + \gamma) = -\bar{F}_0 \sin(\omega t) \cos \gamma \quad (1)$$

$$\begin{aligned} L_E \ddot{\gamma} (\cos \gamma - \operatorname{tg}(\eta) \sin \gamma) - L_E \dot{\gamma}^2 (\operatorname{tg}(\eta) \cos \gamma + \sin \gamma) = \\ = 4R \ddot{\eta} + g \operatorname{tg}(\eta) + 8n_\eta R \dot{\eta} - 4R \dot{\eta}^2 \operatorname{tg}(\eta) \end{aligned} \quad (2)$$

де $\nu = \frac{m_3}{m_1}$; $2n_x = \frac{C_1}{m_1}$; $2n_\eta = \frac{C_\eta}{m_3}$; $\overline{F_0} = \frac{F_0}{m_1}$; $\omega_0^2 = \frac{k_1}{m_1}$; $C_\eta = 2C_3$; J_1, J_3 – моменти інерції несучого тіла і робочого тіла гасника відповідно відносно своїх центрів мас.

Система рівнянь (1) – (2) була лінеаризована і на основі цих лінеаризованих рівнянь було отримане рівняння амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) віброзахисної системи. Встановлено основні регулюючі параметри налаштування гасника. До них відноситься параметр R брахістохрони, яка є напрямною криволінійної виїмки, і коефіцієнт демпфірування n_η робочого тіла гасника. Розроблено методику визначення оптимальних параметрів R і n_η , яка ґрунтується на тому, що АЧХ віброзахисної системи із оптимальними параметрами має мати вигляд, симетричний відносно частоти $\bar{\omega} = 0,5 \cdot (\omega_1 + \omega_2)$, із двома рівними за амплітудою максимумами на відповідних частотах ω_1 і ω_2 [3]. Один з цих максимумів відповідає інерційним характеристикам несучого тіла, а інший – інерційним характеристикам робочого тіла гасника. Саме така форма АЧХ системи вказує на симетричний (рівний) розподіл енергії вхідного збурення між двома тілами системи.

Після проведення ряду числових експериментів і визначення оптимальних параметрів R і n_η гасника для реальних практичних вихідних даних (заданих замовником) для конкретної ЛЕП був побудований графік АЧХ віброзахисної системи. Для порівняльного аналізу також був побудований графік АЧХ механічної системи без використання гасника з тим ж вихідними даними. Проведено порівняльний аналіз отриманих результатів.

За результатами дослідження були розроблені практичні рекомендації для впровадження і практичного використання розробки на реальних енергетичних об'єктах. Результати роботи впроваджені у провідній науковій організації України з питань електроенергетики «Науково-технічний центр електроенергетики» Державного підприємства «Національна енергетична компанія «УКРЕНЕРГО» (НТЦЕ).

Висновки. Запропоновано новий спосіб придушення танців електричних проводів, який є результатом теоретичних досліджень і конструктивних розробок в області віброзахисту низькочастотних гнучких великогабаритних об'єктів. Цей спосіб ґрунтується на застосуванні ізохронних роликів віброгасників (РВГ).

Побудовано математичну модель динамічної поведінки віброзахисної системи, в якій враховано специфіку взаємодії гасника і несучого тіла. Відмінність і новизна цієї моделі від попередніх полягає в тому, що в ній враховано поворот системи разом із гасником за рахунок відхилення гірлянди ізоляторів (що має місце при галопуванні проводів). Математична модель описується двома нелінійними диференціальними рівняннями, які після лінеаризації і інтегрування дозволили визначити рівняння АЧХ системи у лінійній постановці. Аналітичним шляхом була виведена формула для частоти власних коливань робочого тіла гасника, яка є основною при регулюванні і налаштуванні його параметрів. Визначені основні регулюючі параметри гасника, які впливають на якість і ефективність придушення вимушених коливань проводів. Запропоновано інженерний графічно-числовий метод визначення

оптимальних параметрів налаштування роликового гасника, який дозволяє налаштувати його за частотою і амплітудою.

Дуже важливою перевагою запропонованого роликового гасника є те, що його власна частота не залежить від величини амплітуди робочого тіла. Це забезпечує високу точність налаштування його параметрів і стабільність роботи при великих амплітудах коливань несучих тіл у низькочастотному діапазоні.

Використання роликового гасника дає високий ефект віброзахисту: кут відхилення гірлянди ізоляторів при галопуванні проводів може бути зменшений у п'ять разів. Результати роботи впроваджені у провідній науковій організації України з питань електроенергетики «Науково-технічний центр електроенергетики» Державного підприємства «Національна енергетична компанія «УКРЕНЕРГО» (НТЦЕ).

ЛІТЕРАТУРА

1. Легеза, В.П. Теория виброзащиты систем с применением изохронных катковых гасителей (Модели, методы, динамический анализ, технические решения) / В.П. Легеза – E-book. LAMBERT Academic Publishing (Saarbrücken, Deutschland), 2013. – 116 с.
2. Патент України на винахід Котковий гасник для придушення галопування проводів потужних ліній електропередач / Легеза В.П., Легеза Д.В., Бовкун О.В. – № 105089 опубл. 10.04.2014, Бюл. №7. – 9 с.
3. Den Hartog J.P. Mechanical Vibrations / Den Hartog J.P. McGraw-Hill, New York, 1956. – 436 p.
4. EPRI Transmission line reference book. Wind-induced Conductor motion. Electric Power Research Institute: Final Report, November, 2006.
5. Keutgen, R. Galloping Phenomena. A Finite Element Approach. Ph. D. Thesis. Collection des publications de la Faculte des Sciences. – Liege: Appliuees de l'Universite de Liege. №191, 1999. – 202 p.
6. Keutgen, R. A new damper to solve galloping on bundled lines. Theoretical background, laboratory and field results / R. Keutgen, J.-L. Lilien // IEEE Transactions on Power Delivery, 1998, Vol.13, №1. – P. 260 – 265.
7. Li, J. Experimental Study on Vibration Control of Offshore Wind Turbines Using a Ball Vibration Absorber / J. Li, Z. Zhang, J. Chen // J. Energy and Power Engineering, 2012, № 4. – P. 153 – 157.
8. Lilien, J.-L. Hurricane Simulation on Power Transmission Line / J.-L. Lilien, D. Snegovski // Proc. Vth Cable Dynamics Symp., Santa Margherita. 2003. – P. 313 – 318.
9. Pirner, M. Actual Behaviour of a Ball Vibration Absorber / M. Pirner // Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2002, Vol. 90, №8. – P. 987 – 1005.
10. Pirner, M. The development of a ball vibration absorber for the use on towers / M. Pirner, O. Fischer // IASS, Jour. Of the Int. Association for shell and spatial structures, 2000, Vol. 41, №2. – P. 91 – 99.
11. Sasaki, S. Developments of galloping control devices and its operation records in Japan / S. Sasaki, M. Komoda, T. Akiyama, M. Oishi, Y. Kojima, T. Okumura, Y. Maeda // CIGRE report 22-07, 1986 session.
12. State of the art of conductor galloping. CIGRE Technical Brochure 322. Task force B2.11.06. Convenor Lilien J.-L. June 2007. – 140 p.

20. ВЗАЄМОВПЛИВ ДВОХ КРУГОВИХ ОТВОРІВ НА БІЧНИЙ ПОВЕРХНІ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОЇ КОНІЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Анатолій Богатирчук

Національний університет харчових технологій

Євген Сторожук, Іван Чернишенко

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

Світлана Харенко

*Національний університет державної податкової
служби України*

Вступ. Конічні оболонки як елементи сучасних конструкцій знаходять широке застосування в багатьох областях техніки. За конструктивними або технологічними міркуваннями в них мають місце отвори і вирізи самої різноманітної форми. Значна частина результатів дослідження розподілу напружень навколо отворів у конічних оболонках отримана при лінійно-пружній стадії їх деформування і найбільш повно викладена в узагальнюючій монографії [1]. Нелінійні задачі про концентрацію напружень в конічних оболонках розглянуті в обмеженій кількості робіт і, в основному, для оболонок з одним отвором. Лише останнім часом почали з'являтися публікації, присвячені розв'язанню нелінійних задач для конічних оболонок з двома отворами. Так, в роботах [2, 3] дано постановку і описано методику розв'язання фізично нелінійних задач для конічних оболонок, послаблених двома однаковими круговими отворами, а також представлено деякі числові результати.

Постановка задачі. Розглянемо тонку конічну оболонку постійної товщини h , послаблену двома різними круговими отворами і навантажену поверхневими та крайовими силами. Вважаємо, що в оболонці під дією навантаження значного рівня виникають пластичні деформації її матеріалу. Віднесемо оболонку до криволінійної ортогональної системи координат $(\ell, \vartheta, \gamma)$ з початком у вершині конуса, лінії ℓ, ϑ якої співпадають з лініями головних кривин оболонки.

Вирази для компонент мембранної і згинної деформацій представимо у векторній формі на основі теорії непологих оболонок, в якій мають місце гіпотези Кірхгофа-Лява [3]:

$$\varepsilon_{\ell\ell} = \frac{\partial \vec{u}}{A_\ell \partial \ell} \cdot \vec{e}_\ell; \quad \varepsilon_{\ell\vartheta} = \frac{\partial \vec{u}}{A_\ell \partial \ell} \cdot \vec{e}_\vartheta + \frac{\partial \vec{u}}{A_\vartheta \partial \vartheta} \cdot \vec{e}_\ell;$$
$$\mu_{\ell\ell} = \frac{\partial \vec{\phi}}{A_\ell \partial \ell} \cdot \vec{e}_\ell; \quad 2\mu_{\ell\vartheta} = \frac{\partial \vec{\phi}}{A_\ell \partial \ell} \cdot \vec{e}_\vartheta + \frac{\partial \vec{\phi}}{A_\vartheta \partial \vartheta} \cdot \vec{e}_\ell, \quad (\ell \rightarrow \vartheta),$$

де A_ℓ, A_ϑ – параметри Ламе; $\vec{u} = u\vec{e}_\ell + v\vec{e}_\vartheta + w\vec{n}$ – вектор переміщень точок серединної поверхні оболонки; $\vec{e}_\ell, \vec{e}_\vartheta, \vec{n}$ – орти криволінійної ортогональної системи координат $(\ell, \vartheta, \gamma)$; $\vec{\phi} = \phi_\ell \vec{e}_\ell + \phi_\vartheta \vec{e}_\vartheta$ – вектор кутів повороту нормалі до серединної поверхні оболонки.

При дослідженні пружнопластичного деформування конічних оболонок використовуємо співвідношення теорії текучості з ізотропним зміцненням, в якій прийнято умову пластичності Мізеса, а прирости пластичних деформацій визначаються згідно асоційованого закону текучості.

Система розв'язувальних рівнянь отримана з принципу можливих переміщень за допомогою процедури покрокового навантаження, методу додаткових напружень і методу скінченних елементів.

Числові результати. Конкретні результати представимо для конічної оболонки з двома різними круговими отворами радіусів r_1 і r_2 , центри яких розміщені на спільній твірній. Оболонка виготовлена із сплаву АМг-6 і навантажена рівномірним внутрішнім тиском інтенсивності $q = q_0 \cdot 10^5$ Па ($q_0 = 3$).

Розрахунки проведені при таких значеннях геометричних параметрів оболонки: $R_0/h = \ell_0/h = 200$; $d/h = 10$, де R_0 – радіус кривини нормального перерізу оболонки, який проходить через центр перемички, що знаходиться на відстані ℓ_0 від вершини конуса; d – довжина перемички. Дані розв'язання лінійних (ЛЗ) і фізично нелінійних задач (ФНЗ) отримані для трьох варіантів радіусів отворів: 1) $r_1/h = r_2/h = 20$ ($N=1$); 2) $r_1/h = 20, r_2/h = 15$ ($N=2$); 3) $r_1/h = 20, r_2/h = 25$ ($N=3$).

З результатів розв'язання ЛЗ і ФНЗ випливає, що для конічної оболонки з двома однаковими круговими отворами ($N=1$) при навантаженні внутрішнім тиском найбільш небезпечною є точка, яка розміщена на контурі другого отвору в перерізі ($r = r_2$; $\theta = \pi$) на внутрішній поверхні оболонки, де мають місце найбільші напруження $\sigma_\theta^{\max}$. Тут полярному куту $\theta = \pi$ відповідає найбільш наближена до вершини конуса точка контуру отвору. У випадку зменшення радіуса другого отвору ($N=2$) при фіксованих радіусі першого отвору і довжині перемички відбувається перерозподіл напружень між контурами отворів та зменшення максимальних напружень на 16% для ЛЗ і на 5% для ФНЗ, а при збільшенні радіуса другого отвору ($N=3$) – зростання на 30% для ЛЗ і на 7% для ФНЗ. Врахування пластичності матеріалу оболонки приводить до вирівнювання напружень як по товщині оболонки, так і на контурах отворів, а також до зменшення максимальних напружень у порівнянні з результатами лінійно-пружного розв'язку на 58%, 53% і 66% відповідно для першого, другого і третього варіантів розрахунку.

Висновки. Таким чином, в роботі узагальнено методику, викладену в [2, 3], на випадок конічної оболонки з двома різними круговими отворами і досліджено вплив пластичних деформацій та геометричних параметрів на напружено-деформований стан оболонки з двома отворами, навантаженої рівномірним внутрішнім тиском.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь, А.Н. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, Вал.Н. Чехов и др. – К.: Наук.думка, 1980. – 636 с.
2. Чернишенко, І.С. Чисельна методика дослідження пружнопластичного стану конічної оболонки з двома круговими отворами / І.С. Чернишенко, Є.А.

Сторожук, С.Б. Харенко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць ДНУ. – 2009. – Вип. 13. – С. 257 – 263.

3. Сторожук, Е.А. Упругопластическое деформирование конической оболочки с двумя круговыми отверстиями / Е.А. Сторожук, И.С. Чернышенко, С.Б. Харенко // Прикл. механика. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 127 – 132.

21. ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО СТАНУ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ДЕКІЛЬКОМА ОТВОРАМИ

Анатолій Богатирчук

Національний університет харчових технологій

Ірина Руденко

*Національний університет державної податкової
служби України*

Євген Сторожук, Іван Чернышенко

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

Вступ. Значний інтерес для інженерної практики представляє проведення розрахунків на міцність елементів тонкостінних конструкцій, несучі поверхні яких є багатозв'язними областями. Досить часто вказані елементи виготовляють у вигляді сферичних оболонок, послаблених двома або декількома криволійними отворами.

Основні результати дослідження напружено-деформованого стану навколо криволінійних отворів у сферичних оболонках отримані при вісесиметричному їх деформуванні. Результати розв'язання лінійних, фізично і геометрично нелінійних задач для сферичних оболонок з центральним круговим отвором наведені в узагальнюючій монографії [1].

Дослідженню невісесиметричного деформування сферичних оболонок, послаблених декількома криволійними отворами, з врахуванням реальних властивостей конструкційних матеріалів (фізичної нелінійності) і скінченних прогинів (геометричної нелінійності) присвячена незначна кількість робіт. Так, розподіл напружень за межею пружності в багатозв'язній сферичній оболонці вивчено лише для випадку двох [2] і чотирьох [3] кругових отворів.

Постановка задачі. Нехай тонка сферична оболонка радіуса R і товщини h з круговими отворами займає в плані багатозв'язну область (Σ) . Введемо в області (Σ) декартову (x, y) і полярну (r, θ) системи координат з початком в центрі одного з отворів. Вважаємо, що інтенсивність навантаження (поверхневих і крайових сил), геометричні і фізико-механічні параметри такі, що в оболонці виникають пластичні деформації її матеріалу.

Зв'язок компонент деформації оболонки $(\varepsilon_{ij}, \mu_{ij})$ і вектора переміщень $(\vec{u})$ запишемо на основі теорії непологих оболонок і гіпотез Кірхгофа-Лява.

Вважаючи, що навантаження просте, при дослідженні деформування сферичних оболонок за межею пружності будемо користуватися співвідношеннями теорії малих пружнопластичних деформацій.

Систему нелінійних рівнянь, що описують пружнопластичний стан багатозв'язної сферичної оболонки, отримаємо з умов стаціонарності змішаного функціоналу, в якому гіпотези Кірхгофа-Лява реалізовані за допомогою множників Лагранжа. Методика розв'язання нелінійних рівнянь базується на використанні методу додаткових напружень в поєднанні з варіаційним векторно-різницею методом (ВВРМ).

Результати. Дослідимо розподіл переміщень, деформацій і напружень в циклічно симетричній багатозв'язній сферичній оболонці, послабленій шістьма однаковими круговими отворами радіуса r_0 , центри яких розміщені на колі радіуса ρ на однаковій віддалі один від одного. Оболонка виготовлена із сплаву АМг-6 і знаходиться під дією внутрішнього тиску $p = p_0 \cdot 10^5$ Па.

Розрахунки проведені для оболонки з такими параметрами:

$$R/h = 400; \quad r_0/h = 30; \quad \rho/r_0 = 2, 3; 2, 4; 2, 5; 3, 0; 4, 1 \quad (d/r_0 = 0, 3; 0, 4; 0, 5; 1, 0; 2, 1),$$

де d - довжина перемички.

Прийнято, що отвори закриті кришками, які передають на їх контури лише дію перерізуювальних зусиль $Q_k = pr_0/2$.

Конкретні числові результати розв'язання лінійних і фізично нелінійних задач (ЛЗ і ФНЗ) отримані для внутрішнього тиску інтенсивності $p_0 = 2, 5$.

Дослідження показали, що для даної оболонки при невеликій довжині перемички і дії внутрішнього тиску найбільші напруження ($\sigma_{\max} = \sigma_{\max}^0 \cdot 10^5$ Па) мають місце на контурах отворів в точках, які розташовані в перерізах ($r = r_0; \theta = 127,5^\circ$) на зовнішній поверхні оболонки, а найбільші прогини - в точках ($r = r_0; \theta = 127,5^\circ$) для лінійно-пружної стадії деформування та в точках ($r = r_0; \theta = 150^\circ$) для пружнопластичної стадії деформування. При зменшенні довжини перемички (або радіуса кола, на якому розташовані центри отворів) найбільші напруження і прогини зростають: від значень $\sigma_{\max}^0 = 3249$ і $w_{\max}/h = 1,057$ при $d/r_0 = 2$ до $\sigma_{\max}^0 = 5304$ і $w_{\max}/h = 1,502$ при $d/r_0 = 0,3$ для ЛЗ; від $\sigma_{\max}^0 = 1789$ і $w_{\max}/h = 1,573$ при $d/r_0 = 2$ до $\sigma_{\max}^0 = 3103$ і $w_{\max}/h = 8,78$ при $d/r_0 = 0,3$ для ФНЗ. Аналіз отриманих числових результатів свідчить, що у випадку циклічно симетричних задач для багатозв'язних сферичних оболонок при $d/r_0 \geq 2$ ($\rho/r_0 \geq 4$) взаємним впливом контурів отворів можна знехтувати.

Висновки. Отже, в роботі розвинуто ВВРМ для розрахунку багатозв'язних тонких сферичних оболонок, послаблених криволінійними отворами, з врахуванням пластичних деформацій їх матеріалу, який базується на реалізації гіпотез Кірхгофа-Лява за допомогою множників Лагранжа. Досліджено пружнопластичний стан циклічно симетричної сферичної оболонки з шістьма круговими отворами. Представляє інтерес отримання числових результатів для непружних оболонок, послаблених двояко періодичною решіткою однакових кругових отворів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь, А.Н. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н.Гузь, И.С. Чернышенко, Вал.Н. Чехов и др. – К.: Наук.думка, 1980. – 636 с.
2. Руденко, І.Б. Рівновага пружнопластичної сферичної оболонки з двома різними круговими отворами // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць ДНУ. – 2011. – № 15. – С. 156 – 161.
3. Сторожук, Е.А. Упругопластическое состояние сферических оболочек с циклически-симметрично расположенными круговыми отверстиями / Е.А. Сторожук, И.С. Чернышенко, И.Б. Руденко // Прикл. механика. – 2012. – Т. 48, № 5. – С. 102 – 111.

22. К РЕШЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ГРУНТОВОЙ СРЕДОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Ататолий Богатырчук

Национальный университет пищевых технологий

Владимир Мейш

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины

Юлия Мейш

Национальный транспортный университет

Введение. Решение динамических задач о взаимодействии деформируемых конструкций с окружающей средой имеет как теоретическое, так и практическое значение. Взаимодействие деформируемых оболочек с грунтовыми средами рассмотрено в работах [1, 3]. Использование деформируемых преград позволяет регулировать величину и характер нестационарных воздействий на грунт. В частности, в работе [1] рассмотрено решение связанной задачи цилиндрическая оболочка – двухслойная грунтовая среда при действии внутренней импульсной нагрузки. Полученные закономерности протекания волновых процессов в указанных структурах позволяют прогнозировать их динамическое поведение и могут применяться при построении более простых математических моделей для исследования объектов типа оболочка – грунт, оболочка на упругом основании и т. д. [3]. В данной работе рассматривается численное решение задач о взаимодействии цилиндрической оболочки с грунтовой средой периодической структуры при импульсных нагрузках. Работа является логическим продолжением исследований о распространении цилиндрических волн в грунтовой среде периодической структуры (без учета взаимодействия с конструкциями) [2].

Методы. Рассматривается бесконечная подкрепленная цилиндрическая полость в грунтовой среде периодической структуры. Предполагается, что к внутренней поверхности подкрепляющей оболочки при $r = r_0$ приложена распределенная импульсная нагрузка $P_0(r_0, t)$. Предполагается, что динамическое поведение подкрепляющей оболочки описывается в рамках уравнений колебания теории упругих оболочек типа Тимошенко [3]

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_{11}}{\partial x} &= \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_{11}}{\partial x} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial T_{13}}{\partial x} - \frac{T_{22}}{R} + P_3(x, t) - P_r(x, r_0, t) &= \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (1)$$

Обозначения величин в уравнениях (1) приняты согласно [3].

Уравнения движения грунтовой среды периодической структуры в случае цилиндрической симметрии в векторном виде описывается системой уравнений в эйлеровых координатах [5]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{B}) + \frac{\bar{C}_0}{r} &= 0, \\ \bar{F} &= \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho v \\ \rho \end{pmatrix}; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho u \end{pmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ \rho v \end{pmatrix}; \quad \bar{C}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (2)$$

где u - скорость перемещения частиц вдоль оси x ; v - скорость перемещения частиц вдоль оси r ; ρ - плотность соответствующего слоя грунта; P - давление соответствующей точки грунтовой среды (x, r) . Уравнения состояния грунтовой среды каждого слоя представляются согласно модели нелинейной многокомпонентной среды В.М. Ляхова [4]

Для решения исходных уравнений теории колебаний оболочек типа Тимошенко (1) используется интегро – интерполяционный метод построения разностных схем для уравнений гиперболического типа [3]. Для численного решения задач динамического поведения грунтовой среды используется двухшаговая схема Мак - Кормака [3, 5].

Результаты. Рассмотрена задача о распространении цилиндрических волн в грунтовой среде периодической структуры при взаимодействии с цилиндрической оболочкой. Исходные параметры при решении исходной задачи полагались согласно [2]. Полученные результаты позволяют проводить детальный анализ напряженно деформированного состояния конструкции и грунтовой среды при нестационарных нагрузках.

Выводы. Рассмотрено численное решение задач о волновых процессах в системе цилиндрическая оболочка – грунтовая среда периодической структуры при импульсных нагрузках. Полученные результаты позволяют регулировать параметры входной волны давления в грунте и прогнозировать протекание волновых процессов в зависимости от геометрических и физико – механических параметров оболочки и грунтовой среды периодической структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мейш, В.Ф. Математическое моделирование волновых процессов в системе цилиндрическая оболочка – двухслойная грунтовая среда / В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Вісник НТУУ „КПІ». Серія „Гірництво»: Зб. Наук. праць. – К.: НТУУ „КПІ». - 2012. – Вип.22. – С. 3 - 8.

2. Мейш, В.Ф. Численное решение задач о распространении цилиндрических волн в грунтовых средах периодической структуры / В.Ф. Мейш // Вісник НТУУ „КПІ». Серія „Гірництво»: Зб. Наук. праць. – К.: НТУУ „КПІ». - 2014. –Вип. 26. – С. 17 - 23.

3. Головкин, К.Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках: монография / К.Г. Головкин, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш; под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя. – К.: Изд. полигр. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.

4. Ляхов, В.М. Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. / В.М. Ляхов. – М.: Недра, 1982. – 288 с.

5. Ляхов, В.Н. Воздействие ударных волн и струй на элементы конструкций / В.Н. Ляхов, В.В. Подлубный, В.В. Титаренко. – М.: Машиностроение, 1989. – 392 с.

23. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

Ататолий Богатырчук

Национальный университет пищевых технологий

Владимир Мейш

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины

Юлия Мейш

Национальный транспортный университет

Введение. Решение динамических задач о взаимодействии деформируемых конструкций с окружающей средой имеет как теоретическое, так и практическое значение. Закономерности протекания волновых процессов в указанных структурах позволяют прогнозировать их динамическое поведение и могут применяться при построении более простых математических моделей для исследования объектов типа оболочка – грунт, оболочка на упругом основании и т. д. [1]. В данной работе рассматривается численное решение задач о динамическом поведении цилиндрической оболочки на упругом основании переменной структуры при импульсных нагрузках.

Методы. Рассматривается цилиндрическая оболочка на упругом основании при действии внутренней импульсной нагрузки. Предполагается, что упругое основание имеет периодический характер. Уравнения колебаний цилиндрической оболочки описывается в рамках уравнений колебания теории упругих оболочек типа Тимошенко [1]

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M_{11}}{\partial x} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x} - \frac{T_{22}}{R} - k_w(x) + P_3(x, t) = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}.$$

Обозначения величин в уравнениях (1) приняты согласно [1].

Для решения исходных уравнений теории колебаний оболочек типа Тимошенко (1) используется интегро – интерполяционный метод построения разностных схем для уравнений гиперболического типа [1].

Результаты. Рассмотрена задача о динамическом поведении цилиндрической оболочки с учетом упругого основания типа Винклера переменной структуры. Полученные результаты позволяют проводить детальный анализ напряженно деформированного состояния конструкции с учетом упругого грунтового основания при нестационарных нагрузках.

Выводы. Рассмотрено численное решение динамических задач поведения цилиндрической оболочки на упругом основании при действии внутренней импульсной нагрузки. Полученные результаты позволяют проводить детальный анализ напряженно – деформируемого состояния исходной конструкции в зависимости от геометрических и физико – механических параметров оболочки и основания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Головки, К.Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках: монография / К.Г. Головки, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш; под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя. – К.: Изд. полигр. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.

24. ДИСПЕРСИЯ НОРМАЛЬНИХ ХВИЛЬ У СИСТЕМІ: СТИСЛИВИЙ ПРУЖНИЙ ШАР З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ – ШАР ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ

Олександр Багно

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

Вступ. У рамках тривимірних рівнянь лінеаризованої теорії пружності при скінченних деформаціях для твердого тіла та тривимірних лінеаризованих рівнянь Ейлера для ідеальної стисливої рідини [1-4] досліджується поширення акустичних хвиль у гідропружній системі: стисливий пружний шар – рідкий шар. Застосовуються постановка задачі та підхід, які базуються на використанні представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь для пружного та рідкого шарів [1-4].

Методи. Для плоского випадку, який розглядається, загальні розв'язки мають вигляд [1-4]:

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; u_2 = \frac{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)}{\lambda_2^2 (a_{12} + \mu_{12})} \left[\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t}; v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t},$$

де введені функції χ_1 та χ_2 задовольняють рівнянням:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\lambda_2^4 (a_{12} + \mu_{12})^2}{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)(\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0;$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0.$$

Дана задача характеризується наступними динамічними

$$Q_1|_{z_2=0} = 0, \quad Q_2|_{z_2=0} = P_2|_{z_2=0}, \quad Q_1|_{z_2=-h_2} = 0, \quad Q_2|_{z_2=-h_2} = 0, \quad P_2|_{z_2=h_1} = 0 \quad (1)$$

та кінематичним

$$v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0} \quad (2)$$

граничними умовами. Тут введені наступні позначення: u_i - компоненти вектора переміщень пружного тіла; λ_i - подовження пружного шару в напрямках координатних осей; a_{ij} та μ_{ij} - величини, які визначаються з рівнянь стану, та залежать від виду пружного потенціалу [2, 4]; $\bar{\sigma}_{ii}^0$ - початкові напруження

($s_{ii}^0 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \bar{\sigma}_{ii}^0}{\lambda_i^2}$); ρ - щільність матеріалу пружного шару; v_i - компоненти

вектора швидкості рідини; a_0 - швидкість звуку в рідині у стані спокою; Q_j та P_i - складові напружень у твердому тілі та рідині.

Далі розв'язуються дві задачі Штурма – Ліувілля на власні значення для рівнянь руху пружного тіла та рідини, а також знаходяться відповідні власні функції. Після підстановки розв'язків у граничні умови (1) – (2) отримуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно сталих інтегрування. Виходячи з умови існування нетривіального розв'язку цієї системи отримуємо дисперсійне рівняння.

Результати. У подальшому дисперсійне рівняння розв'язувалося чисельно. При цьому числові розрахунки проводилися для системи органічне скло – вода, яка характеризувалася наступними параметрами: пружний шар - $\rho = 1160 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 1,86 \cdot 10^9 \text{ Па}$; шар рідини - $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$. У даній роботі для органічного скла використовувався найпростіший триінваріантний потенціал у формі Мурнагана [2, 4].

Висновки. У рамках тривимірних рівнянь лінеаризованої теорії гідропружності при скінченних деформаціях твердого шару дано постановку задачі про поширення нормальних хвиль у попередньо деформованому стисливому пружному шарі, що взаємодіє з шаром ідеальної стисливої рідини. Проаналізовано вплив товщини шару рідини та початкової деформації пружного шару на фазові швидкості мод. Побудовані дисперсійні криві для мод у

широкому інтервалі частот. Встановлено, що вплив початкового розтягу на фазові швидкості усіх мод із збільшенням товщини шару рідини зменшується. Показано, що для мод, починаючи з другої, і далі для всіх наступних існують товщини рідкого шару або певні частоти, при яких попереднє деформування не впливає на їх фазові швидкості. Виявлено, що у випадку товстого пружного шару кожна мода, яка породжена рідиною, має три такі частоти. З чисельного дослідження випливає також, що для окремих діапазонів частот попередній розтяг пружного шару може призводити як до підвищення, так і до зменшення величин фазових швидкостей нормальних хвиль. Розвинутий підхід та встановлені закономірності можуть бути використані в ультразвукових неруйнівних методах визначення напружень у матеріалах та елементах конструкцій [5], а також у таких областях, як сейсмологія та сейсмозвідка.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь, А.Н. О задачах аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями / А.Н. Гузь // Прикладная механика. – 1980. – № 3 (16). – С.3-21.
2. Гузь, А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2-х томах / А.Н. Гузь. – К.: Наукова думка, 1986. – 286с.
3. Гузь, А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости / А.Н. Гузь. – К.: А.С.К., 1998. – 350с.
4. Гузь, А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями / А.Н. Гузь. – К.: А.С.К., 2004. – 672с.
5. Guz, A.N. On the foundations of the ultrasonic non – destructive determination of stresses in near – the – surface layers of materials. Review / A.N. Guz // J. Phys. Science and Application. – 2011. – Vol. 1, № 1, June. – P. 1 – 15.

25. ВИЗНАЧЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ НАВКОЛО ОТВОРУ В ОБОЛОНЦІ

Анатолій Богатирчук

Національний університет харчових технологій

Кузьма Шнеренко

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

Вступ. В апаратах харчової промисловості часто використовуються як елементи конструкцій тонкостінні оболонки з отворами. Розглянемо лінійну задачу про напружений стан оболонки із композитного матеріалу товщини h , послабленої отвором. Оболонка навантажена системою крайових і поверхневих сил. Отвір знаходиться достатньо далеко від країв оболонки. Напружений стан оболонки з концентратором напружень подамо в вигляді суми основного стану, що виникає в оболонці без отвору, та додаткового, що породжується наявністю отвору. Основний напружений стан оболонки вважається відомим. Для знаходження збуреного (додаткового) стану використаємо рівняння пологих оболонок в рамках двохмірної теорії типу Тимошенка.

Методи. Зв'яжемо серединну поверхню оболонки з системою ортогональних координат (α, β, γ) з початком в центрі отвору. Введемо також полярні координати (r, θ) , зв'язані з центром отвору.

Для розв'язку задачі використаємо метод скінченних елементів. Будемо виходити із варіаційного рівняння Лагранжа

Враховуючи, що для більшості випадків на віддалі одного-двох діаметрів отвору від контуру збурення практично зникають, будемо вважати, що границя області Ω віддалена не менш, як на два - три діаметри від контуру отвору і має форму круга, центр якого збігається з центром отвору.

Результати. Розіб'ємо область Ω на квадратичні ізопараметричні елементи. На кожному елементі введемо локальну систему координат (α, β) так, щоб $|\alpha| \leq 1$ і $|\beta| \leq 1$. Координатні функції φ_i вибираємо у вигляді

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \frac{1}{4}(1 + \alpha_0)(1 + \beta_0)(\alpha_0 + \beta_0 - 1), \quad (i = 1, 3, 5, 7), \\ \varphi_i &= \frac{1}{2}(1 - \alpha^2)(1 + \beta_0), \quad (i = 2, 6), \\ \varphi_i &= \frac{1}{2}(1 + \alpha_0)(1 - \beta^2), \quad (i = 4, 8),\end{aligned}\tag{1}$$

де $\alpha_0 = \alpha\alpha_i$, $\beta_0 = \beta\beta_i$, (α_i, β_i) - координати i -го вузла елемента в локальній системі координат.

Зв'язок з глобальною системою координат (x, y) виконується за допомогою співвідношень

$$x = \sum_{i=1}^8 x_i \varphi_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 y_i \varphi_i,\tag{2}$$

де (x_i, y_i) - глобальні координати i -го вузла елемента.

Шукані переміщення для кожного елемента подаються в вигляді інтерполяційних многочленів

$$u_x = \sum_{i=1}^8 u_x^i \varphi_i, \dots, \gamma_y = \sum_{i=1}^8 \gamma_y^i \varphi_i,\tag{3}$$

де $u_x^i, \dots, \gamma_y^i$ - значення переміщень в i -ому вузлі елемента. Зауважимо, що перехід від глобальних до локальних координат та інтерполювання шуканих функцій виконується за однаковими закономірностями.

Підставляємо шукані переміщення (3) в варіаційне рівняння з урахуванням формул зв'язку похідних в двох системах координат і граничних умов. Надалі виконується числове інтегрування по кожному елементу з використанням квадратичних формул Гауса. Для досягнення необхідної точності достатньо використати формулу з двома вузлами інтегрування по кожній змінній. Після того результати складаємо по всім елементам і вар'юємо по вузловим значенням шуканих величин, вважаючи їх незалежними. Збираючи коефіцієнти при

однакових варіаціях, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих. Вона буде мати вигляд

$$\sum_{n=1}^{5N} (A_i^n u_x^n + B_i^n u_y^n + C_i^n w^n + D_i^n \gamma_x^n + E_i^n \gamma_y^n) = F_i \quad (4)$$

де N – число вузлів сітки, $u_x^n, \dots, \gamma_y^n$ – шукані значення переміщень в n -ому вузлі області Ω . Величини $A_i^n, \dots, E_i^n$ визначають матрицю жорсткості. Матриця має стрічкову структуру, ширина якої залежить від способу нумерації вузлів.

Розбивка області Ω на елементи, інтегрування, формування матриці системи рівнянь (4) і її розв'язок виконуються на комп'ютері за допомогою програми, складеної на мові C++.

Розроблено алгоритм розрахунку напружено-деформованого стану в оболонках з отворами та складено програму на сучасній мові програмування C++.

Висновки.

1. Розроблена методика дозволяє обчислювати напружено-деформований стан в довільній точці оболонки довільної форми з отвором.

2. Ця методика дозволяє обчислювати напружено-деформований стан в апаратах відповідної форми хімічної, зокрема, харчової промисловості.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь, О.М. Концентрація напружень біля отворів в оболонках із композитних матеріалів / О.М. Гузь, І.С. Чернишенко, К.І Шнеренко. // Прикл. механіка. – 2001. – Т. 37, №2. - С.3-44.

2. Глинський, Я.М., C++ і C++ Builder / Я.М. Глинський, В.Є. Анохін, В.А.. Ряжська — Львів, 2003. — 192 с.

26. ПРО ОСОБЛИВОСТІ ДЕФОРМУВАННЯ ДОВГОЇ ТОНКОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Юрій Абросов, Володимир Максимюк

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

Анатолій Богатирчук

Національний університет харчових технологій

Вступ. Вже стало правилом використовувати так звані паталогічні тести [1] для верифікації програмних засобів в механіці, де формівного твердого тіла. Річ у тім, що традиційні чисельні методи спіткнулись з проблемою замикання (locking) або виродження, яка проявляється у сповільненій збіжності та в хибних результатах. Зразкові тестові задачі можуть мати як аналітичні, так і чисельні розв'язки. Таким паталогічним тестом може служити одновимірна задача про деформування під внутрішнім тиском нескінченно довгої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу. За таких умов в оболонці виникають великі згини за малих розтягів, що може бути причиною мембранного замикання. Ця одновимірна задача має півтора столітню історію [2, с. 326–338]. Проте коректні

результати, очевидно вперше (1933), були отримані Тимошенком і опубліковані в першому виданні монографії [3]. За допомогою таблиці деяких коефіцієнтів для ряду значень співвідношень півосей еліпса обчислювались тільки моменти. Процедура отримання коефіцієнтів не наводилась і залишилась невідомою. Наведемо розраховані чисельно моменти, напруження та угини оболонки.

Методи. Серединна поверхня замкнутої довгої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перетину з півосями a і b задана рівнянням

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 - 1 = 0$$

і віднесена до криволінійної системи координат (s, z, γ) , в якій координата γ направлена по нормалі до поверхні, а s – довжина дуги еліпса, що відраховується від точки $(x=0, y=b)$ за годинниковою стрілкою. За допомогою оригінального алгоритму чисельної дискретизації плоскої кривої [4] рівняння еліпса подано в параметричному вигляді

$$x = x(s), \quad y = y(s),$$

що спрощує в подальшому вигляд розв’язувальних рівнянь. Тоді кривина еліпса обчислюватиметься за формулою

$$k = x'y'' - x''y'.$$

Чисельний метод побудовано на основі варіаційних принципів з використанням змішаного функціонала, який є сумою енергії деформації оболонки та додаткової умови для реалізації геометричної частини гіпотез Кірхгофа-Лява методом множників Лагранжа. Функціонал залежить від чотирьох варійованих функцій: двох переміщень, кута повороту та зусилля, яке має фізичний зміст перерізуючої сили. Переваги такої побудови функціонала викладено в [5]. Для знаходження стаціонарних значень функціонала використано варіаційно-різницевий метод (ВРМ), який дає систему лінійних алгебраїчних розв’язувальних рівнянь з симетричною матрицею [5].

Результати. Розраховано напружено-деформований стан (НДС) оболонки з такими геометричними параметрами: $h=0,01$ м; $a=1$ м; $b=0,5$ м. Матеріал оболонки – сталь з $E=210$ ГПа; $\nu=0,3$. Навантаження – $p=10$ кПа. Внаслідок симетрії задачі відносно площин $x=0$ та $y=0$ розглядалась четвертина області $s \in [0, s_k]$, де $s_k=1,211$ м – чверть периметра еліпса, який обчислено згаданим алгоритмом [4] чисельної дискретизації кривої. Тим же алгоритмом ця дуга еліпса розбивалась на K вузлових точок з рівномірним кроком.

Практичну збіжність з точністю до трьох значущих цифр у максимальних значеннях компонент НДС досягнуто при $K=10241$. З такою ж точністю розраховані моменти $M(0)=1574$ Н ($s=0$, коротка піввісь) і $M(s_k)=-2171$ Н ($s=s_k$, довга піввісь) збіглись до моментів за формулами $M(0)=0,629pb^2$ і $M(s_k)=-0,870pb^2$, куди входять табличні числові коефіцієнти з монографії [3] для випадку $b/a=0,5$. Мембранні напруження в серединній поверхні $\sigma(0)=0,507$ МПа і $\sigma(s_k)=0,998$ МПа збігаються до точних значень

$\sigma(0) = pb/h = 0,5$ МПа і $\sigma(s_k) = pa/h = 1,0$ МПа з дещо меншою точністю, що характерно для малих (на 2 порядки менших від максимальних напружень на зовнішній поверхні) величин в чисельних методах. Такі результати є характерними для мембранного замикання.

Угини подібно моментам теж мали різні знаки біля короткої і довгої півосей: $w(0) = 0,0242$ м. і $w(s_k) = -0,0113$ м. Очевидно, замкнута оболонка намагається набрати близьку до кругової форму, що дає угини різних знаків і веде до великих згинів поблизу точок перетину еліпса площинами симетрії.

Висновок. За наявності мембранного замикання вдалося ВРМ без особливих цілеспрямованих заходів екстенсивним способом досягнути високої точності розрахунків НДС. Дана задача може доповнити колекцію патологічних тестів [1]. Очевидно, для покращення збіжності доцільно використати змішані функціонали, в яких додатково варіюється мембранна деформація.

ЛІТЕРАТУРА

1. Mallikarjuna, Rao K. A set of pathological tests to validate new finite elements / Mallikarjuna Rao K., Shrinivasa U. Sadhana. – 2001. – Vol 26. – P. 549 – 590.
2. Bresse, J. A. C. H. Cours de Mécanique Appliquée. Première Partie. Résistance des matériaux et stabilité des constructions. / J. A. C. H Bresse. – Deuxième Édition. – Paris: Gauthier-Villars, 1866. – 536 p.
3. Timoshenko, S. Strength of Materials. Part II, Advanced Theory and Problems / S. Timoshenko. – 2nd Ed. – New York: D. Van Nostrand Company, 1941. – 510 p.
4. Chernyshenko, I.S. On the stress-strain state of toroidal shells of elliptical cross section formed from nonlinear elastic orthotropic materials / I.S. Chernyshenko, V.A. Maksimyuk // Int. Appl. Mech. – 2000. – Vol 36, N 1. – P. 90–97.
5. Maksimyuk, V.A. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) / V.A. Maksimyuk, E.A. Storozhuk, I.S. Chernyshenko // Int. Appl. Mech. – 2012. – Vol 48, N 6. – P. 613 – 687.

27. МОДЕЛЮВАННЯ ТА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ПРИ РІЗНІЙ АПРІОРНІЙ ІНФОРМАЦІЇ

Олександр Савченко, Олена Лобода

Херсонський державний аграрний університет

Вступ. Для досягнення ефективних форм керування виробництвом, активізації підприємництва, ініціативи, тощо, потрібен пошук нових форм і методів управління виробництвом. У якості об'єкта дослідження нами обрано процес ідентифікації структури управління.

Методи. Для вирішення поставленої задачі використовували методи теорії системного аналізу, математичного моделювання, теорії ймовірностей та динамічного програмування. Рішення завдань ідентифікації підприємств ґрунтуються на рівняннях балансу, і, що впливають звідси, моделях витрати - випуск – виробництво. Є кілька підходів до рішення даного завдання залежно від

тих рішень, які потрібно буде приймати на основі побудованої в результаті ідентифікації моделі. Тут ми розглянемо чотири підходи:

1) на основі одержання систем диференціальних рівнянь, які описують динаміку зміни випуску продукції й основних виробничих фондів.

2) пов'язаний з дослідженням моделі в просторі станів.

3) комплексний метод ідентифікації пов'язаний з побудовою оптимізаційної моделі, кінцевим результатом якого при використанні знайдених виробничих функцій буде виробіток рекомендацій у реальному господарстві для прийняття рішень по розподілі засобів між галузями.

4) замкнута динамічна модель; модель замикання - модель ринку (система диференціальних рівнянь Вальрасу).

Результати. Розглянемо опис об'єкта у просторі станів:

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, u, \vec{b}), \quad y = g(\vec{x}, u, \vec{b}, n),$$

де $u = u(t)$ - вхідний сигнал; $y = y(t)$ - вихідний сигнал; $n = n(t)$ - перешкода; $\vec{x} = \vec{x}(t)$ - вектор станів об'єкта; $\vec{b}$ - вектор параметрів об'єкта.

Дії перешкоди віднесено на вихід системи. Потрібно за даними випробувань підібрати коефіцієнти моделі об'єкта (ідентифікувати об'єкт). Очевидно структура моделі повинна мати вигляд: $\dot{\vec{\xi}} = f(\vec{\xi}, u, \vec{\beta}), y_m = g(\vec{\xi}, u, \vec{\beta}, o)$, де $\vec{\xi} = \vec{\xi}(t)$ - вектор стану моделі; $\vec{\beta}$ - вектор параметрів моделі.

Завдання ідентифікації в цьому випадку зводяться до оцінки вектора невідомих параметрів об'єкта $\vec{b}$, точність оцінки якого будемо знаходити як функціонал від вихідної помилки $e = y - y_m$, або $e = M[y(\vec{x}) - y(\vec{\xi})]$, що визначає міру відповідності між векторами параметрів (або) станів об'єкта й моделі.

Так як величини b і x не можна безпосередньо виміряти, то можливо лише мінімізувати математичні очікування $M[\vec{b} - \vec{\beta}]$ або $M[\vec{x} - \vec{\xi}]$. Це можливо в загальному випадку, якщо є якась інформація про розподіл ймовірностей. Є кілька методів рішення цього завдання, що відрізняються за використовуваними критеріями й наявною апіорною інформацією. Залежно від апіорної інформації ці методи можуть бути визначені в такий спосіб:

1) Метод найменших квадратів - не вимагає ні якої апіорної інформації про види розподілу. Є тільки припущення, що динаміка об'єкта може бути апроксимована обраною моделлю.

2) Метод Марковських оцінок (узагальнений метод найменших квадратів) - вимагає знання коваріаційної матриці перешкоди.

3) Метод максимальної правдоподібності - необхідне знання щільності ймовірностей вимірюваного процесу.

4) Оцінки з мінімальним ризиком - вимагають знання щільності ймовірностей $u, \vec{b}, n$ і величини помилки.

Всі методи ідентифікації опираються на випадкові спостереження, випадковість яких пов'язана з наявністю перешкод.

Розглянемо види оцінок, одержуваних залежно від апіорної інформації. Уведемо позначення:

$$\bar{y}' = [y(\Delta t), y(2\Delta t), \dots, y(k\Delta t)]$$

- вектор спостережень на виході об'єкта ідентифікації;

$$b' = [b_0, b_1, b_m], \quad \beta' = [\beta_0, \beta_1, \beta_m]$$

- вектори параметрів об'єктів і моделі, тоді $\bar{y} = \bar{y}(\bar{u}, \bar{b}, n)$. Будемо виходити з того, що запропонована модель адекватна; тоді можна записати, що $\bar{y}_m = v\bar{\beta}$ й тоді $v = [v_0, v_1, \dots, v_m]$. Тоді оцінка $\bar{\beta}$ перебуває з мінімуму функції $S = \sum_{i=1}^k (y^i - y_m^i)^2$,

яку можна записати як $S = (\bar{y} - v\bar{\beta})' (\bar{y} - v\bar{\beta})$. S є розширеною квадратичною формою β_i . Якщо $k=m$, то в оцінці шум ідентифікації не буде згладжений, отже для адекватної ідентифікації потрібно, принаймні, $k+1$ вимірів, тобто число вимірів повинне бути більше числа вимірюваних параметрів.

Якщо записати модель динаміки у вигляді векторно-матричного диференціального рівняння

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \lambda^{-1}(E - A)\bar{x}(t) - \lambda^{-1}\bar{\Pi}(t)$$

$$\text{де: } \frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx^1(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx^n(t)}{dt} \end{pmatrix}; \quad \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix}; \quad \lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \dots & \lambda_n^1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix}; \quad \bar{\Pi}(t) = \begin{pmatrix} \Pi^1(t) \\ \vdots \\ \Pi^n(t) \end{pmatrix}.$$

Дослідження управлінських процесів підприємства за допомогою моделей зводиться до аналізу поведінки траєкторій моделі, що імітують реальні процеси.

Висновки. Показано, що для ефективного функціонування виробництва, на основі огляду сучасного стану і використання методів матеріального балансу, необхідно розробляти моделі у вигляді диференціальних рівнянь, які дозволяють вирішувати задачі ідентифікації. Запропоновані методики для створення критеріїв оцінки якості й реалізації принципів оптимальності при створенні автоматизованої системи керування необхідно використовувати взаємозв'язки елементів виробництва - фактори, що характеризують виробництво, а також ідею міжгалузевого балансу, що тісно пов'язана з дослідженням стійкості траєкторії моделі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Букетов, А.В. Ідентифікація і моделювання технологічних об'єктів та систем: навч. посіб. / А.В. Букетов. - Т. Тайп, 2009. - 260с.

3. Наконечний, М.В. Особливості ідентифікації динамічних об'єктів за допомогою рекурентних нейронних мереж: підручник / М.В. Наконечний, Ю.М. Наконечний. - Л.: НУЛП, 2009. - 260с.

28. СПЕКТРОФОТОМЕТРИЧНИЙ ТА ЛЮМІНЕСЦЕНТНИЙ АНАЛІЗ У ХАРЧОВІЙ ПРОМИСЛОВОСТІ ТА ФАРМАКОЛОГІЇ

Валерій Ящук, Ірина Лебедєва,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Олена Ващіліна

Національний транспортний університет

Вступ. Спектральний аналіз складу та якості харчових та фармакологічних продуктів є найбільш чутливим. У даній роботі розглянуто можливості застосування спектрофотометричних та спектролюмінесцентних методів у харчовій промисловості та фармакології. Показано, що вказані методи є експресними та надзвичайно чутливими, оскільки вони «спрацьовують» на рівні молекул та атомів. Зокрема, на основі спектроскопічних методів створюють сенсорні системи [1] з оптичним відгуком.

Одним із важливих компонентів, що застосовуються як у харчовій промисловості, так і у фармакології, є вода. Питання чистоти води, що використовується при виготовленні харчових продуктів та ліків, є надзвичайно актуальним для даних галузей. У той же час, поряд з хімічною чистотою мінеральний склад води є також важливим у виробництві алкогольних та безалкогольних напоїв.

Методи. Методика експериментів наведених результатів викладена у роботах [2,3,4,7]. Методи розрахунків та використані математичні моделі представлено у [2,6].

Результати. Прикладом застосування спектроскопії для вирішення проблеми експресного контролю чистоти води та сорбції домішок антропогенного походження деякими полімерами з води є роботи [2,3], де вивчалися спектральні прояви такого типу домішок як нітратів, хроматів, сульфатів та молекул фенолу. Варто відзначити, що нітрати мають потужну смугу поглинання в області 215 нм і є поширеною шкідливою домішкою, що з'явилася у великій кількості у воді як результат надмірного і неконтрольованого використання добрив у колишньому СРСР. Наші дослідження концентрації нітратів свідчать, що у питних джерелах з глибиною менше за 20 м, як правило, перевищують граничну санітарну норму 10 мг/л (у низці випадків – у десятки разів). Іншою надзвичайно небезпечною домішкою є фенол (характерна смуга в поглинанні 280 нм). Фенол – чи не єдиний нафтопродукт, який розчиняється у воді, тому очистка від нього досить складна.

Важливими компонентами у харчовій промисловості є різного типу органічні молекули, знання вмісту яких у харчовому продукті є проблемою номер один. Органічні сполуки, що проявляють себе в оптичному діапазоні довжин хвиль (200 – 1000 нм), є молекули, що містять так звані π -електронні системи. Саме ці системи зумовлюють поглинання та випромінювання світла у вказаному діапазоні. Спектроскопічні методи дають можливість зафіксувати відгук такого типу молекул на зондуєче випромінювання, що використовується для

встановлення типу молекул та їх концентрацій. Чутливість таких методик може бути доведена до рівня окремих молекул.

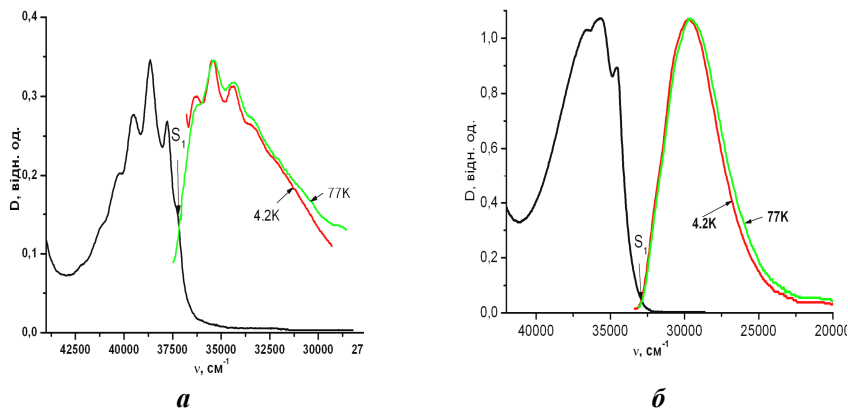


Рис. 1. Унормовані спектри поглинання та флюоресценції амінокислот:

а) фенілаланін, б) триптофан [4].

До важливих компонентів харчових продуктів належать білки, склад і концентрацію яких важливо знати виробникам. Спектрально [4, 5] білки проявляють себе через амінокислоти (рис.1), що містять у своєму складі π -електронні системи. Таких амінокислот є три: фенілаланін, тирозин та триптофан. Домінуючими в оптичних спектрах, як правило, є молекули триптофану, оскільки вони мають значно вищий коефіцієнт екстинції (в поглинанні) та квантовий вихід флюоресценції. Окрім того, енергетичні рівні триптофану розташовані нижче за відповідні рівні тирозину та фенілаланіну, що спричинює перенесення енергії електронного збудження цих молекул до молекул триптофану. Тому в більшості випадків про кількість білку у харчовому продукті можна судити за спектральним проявом саме триптофану. Молекули триптофану інтенсивно флюоресціюють при збудженні їх УФ світлом з довжиною хвилі 380 нм навіть за кімнатної температури. Це дає можливість експресного аналізу харчового продукту на наявність та кількість білків. У той же час, для встановлення присутності нуклеїнових кислот (наприклад, ДНК або РНК) виміри їхніх спектрів (флюоресценції, фосфоресценції) можливі лише за низьких температур ($< 77 \text{ K}$) [5]. Однак такі виміри є важливими не лише для фармакології [4], а й для харчової промисловості, оскільки їх результати також можуть свідчити про зараження харчових продуктів вірусами [6].

У фармакології спектрофотометрично-люмінесцентний аналіз можна застосовувати як для контролю складу фармпрепарату, так і при дизайні синтезу та дослідженні зв'язування молекул препарату з компонентами живих організмів. Як приклад першого застосування можуть бути наведені спектри аденінтрифосфату (АТФ) та аденінмонофосфату (АМФ), які за формою спектру подібні між собою, але їхні максимуми зсунуті один відносно одного. Саме такий зсув спостерігається при довгому зберіганні АТФ в аптеці, що приводить до втрати інтенсивності лікувальної дії. Як приклад другого застосування можна навести спектральний прояв взаємодії сполуки ААА (однієї з лікарських форм,

що випробовуються) [5] з людським альбуміном (рис.2,3). Зміни в спектрах свідчать про зв'язування препарату з альбуміном. Ще одним прикладом результатів дослідження ефектів зв'язування є робота [7], де вивчалися ефекти зв'язування молекул берберину з ДНК, і для опису процесів зв'язування застосовувалося модифіковане рівняння Гі-фон Хіппеля.

Висновки. У цілому можна зробити висновок, що застосування вище описаних методик та використання відповідного математичного апарату для обробки результатів вимірів є актуальним і необхідним для подальшого розвитку як харчової так і фармакологічної промисловостей а також для контролю якості фармакологічних препаратів та термінів їх зберігання [8].

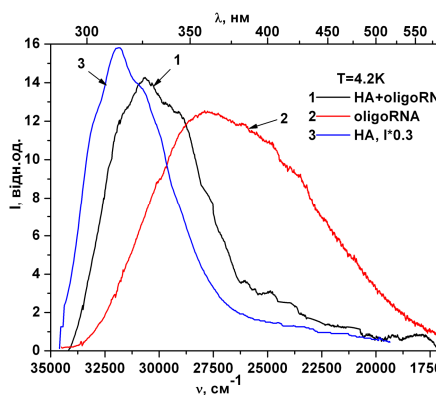


Рис. 2. Спектри флюоресценції дріжджової РНК, альбуміну та бінарного розчину даних сполук при $T=4.2K$. Водний розчин, $\lambda_{30}=260nm$, $C_{RNA}=10mM$, $C_{HA}=0.6mM$ [4].

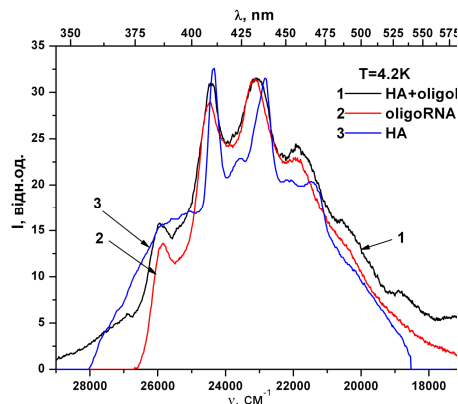


Рис. 3. Спектри фосфоресценції дріжджової РНК, альбуміну та бінарного розчину даних сполук $T=4.2K$. Водний розчин, $\lambda_{30}=260nm$, $C_{RNA}=10mM$, $C_{HA}=0.6mM$ [4].

ЛІТЕРАТУРА

1. Яшук, В.М. Фотоніка полімерів / В.М. Яшук. - К.: ВПЦ «Київський університет», 2004. - 112 с.
2. Lebedyeva, I. The Peculiarities of Sorption Mechanism of Phenole Molecules by Films of PVA-PAAN Interpolymer Complex / I. Lebedyeva, T. Zheltonozhskaya, V. Yashchuk, V. Kudrya, O. Demchenko // Macromolecular Symposia. – 2001. – Vol.166. – P. 243-247.
3. Yashchuk, V.M. Detection of Phenol Molecules in Water: Direct and Optical Sensors Methods / V.M Yashchuk., I.V. Lebedyeva, A.P. Naumenk [et al.] // Proceedings Thirty-fourth AMOP Technical Seminar on Environmental Contamination and Response, October 4 to 6, 2011. – Banff, Alberta, Canada. – P. 117-123.
4. Yashchuk, V.M., Proteins and Polyribonucleotides Luminescence. The possibility of Spectral Testing of their Interaction / V.M Yashchuk., Z.Yu. Tkachuk, S.M. Levchenko [et al.] // Biotechnology. – 2012. – Vol. 5. N. 4. – P. 104-111. (in Ukrainian).

5. Yashchuk, V.M. Optical Response of the Polynucleotides-Proteins Interaction / V.M. Yashchuk //Mol. Cryst. Liq. Cryst. – 2011. – Vol. 535. – P. 93–110.

6. Kravchenko, V.M. Spectroscopic studies of mosquito iridescent virus, its capsid proteins, lipids and DNA / V.M. Kravchenko., Yu.P. Rud., L.P. Buchatski., V.I. Mel'nik., K.Yu. Mogylchak, S.P. Ladan, V.M. Yashchuk //Ukr. J. Phys. – 2012 – Vol. 57, No. 2 – P. 183-186.

7. Н.В. Башмакова, С.Ю.Кутовий, Д.М. Говорун, Р.О. Жураківський, В.М. Ящук // Доповіді АН України (фізика) – 2009. – N9 – P. 781-787.

8. Yashchuk, V.M., The Spectral Response of New High-Effective Sensor on the Phenol Molecules Presence in Polluted Water / V.M. Yashchuk, V.Yu. Kudrva, A.P. Naumenko, I.V. Lebedyeva // XXI Galyna Puchkovska International School-Seminar "Spectroscopy of Molecules and Crystals", 2013.- Book of Abstracts. - P. 253-254.

29. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛЫХ ШАРОВ

Татьяна Бобылева

Московский государственный строительный университет

Введение. Непрерывное совершенствование современной техники выдвигает новые требования к исследованиям в области механики, получению все более точных представлений о механических свойствах упругих тел при динамическом нагружении. Важное место занимает теоретический анализ колебательных процессов в деформируемых объектах, в частности, анализ их собственных колебаний.

Методы. В работе представлена теория собственных колебаний полых упругих шаров, исходными уравнениями для которой являются уравнения движения Ламе трехмерной теории упругости. В работе [1] на основе векторного уравнения движения Ламе

$$2 \frac{m-1}{m-2} \text{grad div } \vec{u} - \text{rot rot } \vec{u} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

($\vec{u}$ – вектор упругих перемещений, m – число Пуассона, G – модуль сдвига, ρ – плотность материала, t – координата времени) и векторного разложения Ламе даны формулы общего решения динамических задач теории упругости в сферической системе координат (r, θ, ϕ) в случае гармонических колебаний во времени с круговой частотой ω :

$$\vec{u} = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^{k=n} \left[u_n^{(k)}(r, \omega) \vec{L}_n^{(k)}(\theta, \phi) + v_n^{(k)}(r, \omega) \vec{M}_n^{(k)}(\theta, \phi) + w_n^{(k)}(r, \omega) \vec{N}_n^{(k)}(\theta, \phi) \right], \quad (2)$$

где $\vec{L}_n^{(k)}(\theta, \phi)$, $\vec{M}_n^{(k)}(\theta, \phi)$, $\vec{N}_n^{(k)}(\theta, \phi)$ – векторные гармоники.

После подстановки этого разложения в уравнение движения (1) для неизвестных радиальных функций $u_n^{(k)}(r, \omega)$, $v_n^{(k)}(r, \omega)$, $w_n^{(k)}(r, \omega)$ получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой находится в функциях Бесселя полуцелого индекса [1]. В данной работе это

решение используется при рассмотрении осесимметричных колебаний полого изотропного упругого шара ($k = 0$). Из нулевых значений компонент напряжения $\sigma_r(\theta, \phi)$ и $\sigma_{r\theta}(\theta, \phi)$ на поверхностях граничных сфер радиусов r и R такого шара получено уравнение для определения его собственных частот колебаний. Чтобы записать его, обозначим для краткости:

$$n(n+2)(n-1) + k_2^2 r^2 = p; \quad n(n+2)(n-1) + k_2^2 R^2 = P;$$

$$(n+1)(n+2)(n-1) + d k_1^2 r^2 = f; \quad (n+1)(n+2)(n-1) + d k_1^2 R^2 = F;$$

$$r[k_2^2(n+1)(n+2) + 2dn(n+2)k_1^2 - d k_1^2 k_2^2 r^2] = h;$$

$$R[k_2^2(n+1)(n+2) + 2dn(n+2)k_1^2 - d k_1^2 k_2^2 R^2] = H;$$

$$n(n+1) - 2 = j, \quad d = \frac{m-1}{m-2},$$

$$B_1 = J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 R) - J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 R),$$

$$b_1 = J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 R) - J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 R),$$

$$B_2 = J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 R) + J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 R),$$

$$b_2 = J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 R) + J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 R),$$

$$B_3 = J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 R) - J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 R),$$

$$b_3 = J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 R) - J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 R),$$

$$B_4 = J_{n-\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 R) + J_{-n+\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 R),$$

$$b_4 = J_{-n-\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 R) + J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 R),$$

$$B_5 = J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 R) - J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 R),$$

$$b_5 = J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 R) - J_{-n+\frac{1}{2}}(k_2 r) J_{n-\frac{1}{2}}(k_2 R),$$

$$B_6 = J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 R) - J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) J_{-n-\frac{1}{2}}(k_1 R).$$

Здесь $k_1 = \frac{\omega}{a}, k_2 = \frac{\omega}{b}, a = \sqrt{\frac{2G(m-1)}{\rho(m-2)}}$ – скорость волн сжатия,

$b = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ – скорость волны сдвига. Тогда уравнение для нахождения собственных частот будет:

$$\begin{aligned} & \pi^2 r R (2k_1^2 p P b_1 B_1 + 2k_1 k_2 f P b_2 B_2 + 2k_1^2 k_2 j P b_2 B_3 + k_1 h P b_3 B_2 + 2k_1 k_2 p F b_4 B_4 + 2k_2^2 f F b_5 B_5 + \\ & + 2k_1 k_2^2 j r F b_6 B_4 + k_2 h F b_4 B_6 + 2k_1^2 k_2 p j R b_4 B_1 + 2k_1 k_2^2 f j R b_5 B_2 + 2k_1^2 k_2^2 j^2 r R b_6 B_1 - k_1 k_2 h j R b_4 B_2 + \\ & + k_1 p H b_1 B_4 + k_2 f H b_2 B_5 - k_1 k_2 j H r b_2 B_4 + 0, 5 h H b_3 B_5) + 4 n (n + 1) \{ (n + 2) (n - 1) [4 k_1^2 d r^2 - \\ & - 4 (n + 2) (n - 1) + k_2^2 (r^2 + R^2)] - 2 d k_1^2 k_2^2 r^2 R^2 \} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Из полученного уравнения (3) выводятся как частные случаи частотные уравнения радиальных колебаний сплошного и полого шаров, которые совпадают с уже имеющимися в литературе [1, 2].

Результаты. Получено уравнение для определения собственных осесимметричных колебаний упругого изотропного полого шара. Уравнения радиальных колебаний сплошного и полого шаров, уже имеющиеся в литературе, выводятся из данного уравнения как два частных случая.

Выводы. Полученное в работе уравнение может быть использовано, например, в динамических задачах для высокочастотных колебаний; при решении граничных задач для произвольно нагруженных пространственных тел, все три измерения которых примерно одинаковы. Постановка задачи принадлежит член-корреспонденту НАН Украины Улитко Андрею Феофановичу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Улитко, А.Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругост А.Ф. Улитко. – К.: Академперіодика, 2002. – 341 с.

2. Ляв, А.. Математическая теория упругости / А. Ляв. – М.-Л.: ОНТИ НКТИ СССР, 1935. – 674 с.

30. РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ З КРАЙОВИМИ УМОВАМИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО ТИПУ

Оксана Лагода

Київський національний університет технологій та дизайну

Вступ. В науці і техніці для моделювання реальних процесів широко використовуються різницеві рівняння вигляду

$$x_n = A_1 x_{n-1} + A_2 x_{n-2} + \dots + A_k x_{n-k} + y_n \quad (1)$$

при різних (в тому числі нескінченних) значеннях k .

Одним з найважливіших класів розв'язків подібних рівнянь є клас обмежених розв'язків, який адекватно відображає реальні явища. Крім того, наведене рівняння (1) розглядалося без початкових умов (тоді $n \in \mathbf{Z}$) (наприклад, [1]) або з початковими умовами на лівій півосі (тоді $n \geq 0$) (наприклад, [2]).

Результати. В цій роботі розглядається рівняння

$$x_n = A_1 x_{n-1} + A_2 x_{n-2} + y_n, \quad (2)$$

з крайовими умовами інтерполяційного типу, коли відомі значення x_{mp} , $m \in \mathbf{Z}$, при деякому фіксованому $p \geq 2$, а всі інші проміжні значення x_n мають бути визначені (інтерпольовані) з рівняння (2). Формалізуємо постановку задачі.

Задача 1. Нехай $(\mathbf{B}, \|\cdot\|)$ - комплексний банахів простір, $\{y_n : n \in \mathbf{Z}\}$ та $\{x_{mp} : m \in \mathbf{Z}\}$ - відомі обмежені послідовності в цьому просторі, $A_1, A_2 \in L(\mathbf{B})$ - обмежені оператори в $\mathbf{B}$. Знайти обмежену послідовність елементів цього простору $\{x_n : n \in \mathbf{Z}, n \neq mp, m \in \mathbf{Z}\}$ таку, що рівняння (2) задовольняється при $n \in \mathbf{Z}, n \neq mp, m \in \mathbf{Z}$.

Теорема 1. Задача 1 має єдиний розв'язок для будь-яких відомих обмежених послідовностей тоді і лише тоді, коли в просторі $\mathbf{B}^p$ з нормою, евклідово породженою нормою простору $\mathbf{B}$ матричний оператор

$$\begin{pmatrix} I & -A_1 & -A_2 & O & O & \dots & O \\ O & I & -A_1 & -A_2 & O & \dots & O \\ O & O & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & O \\ O & O & \dots & O & I & -A_1 & -A_2 \\ O & O & \dots & \dots & O & I & -A_1 \\ zA_2 & O & \dots & \dots & \dots & O & I \end{pmatrix}$$

має неперервний обернений при всіх $z \in \mathbf{C}$, $|z|=1$ (тут I - одиничний оператор, O - нульовий).

Теорема 2. У випадку $p=2$ задача 1 має єдиний розв'язок для будь-яких відомих обмежених послідовностей тоді і лише тоді, коли при всіх $z \in \mathbf{C}$, $|z|=1$ існує неперервний обернений до оператора $(I - zA_2A_1)$ в просторі $\mathbf{B}$.

Теорема 3. Введемо рекурсивні послідовності

$$F_n = A_2F_{n-2} + A_1F_{n-1}, \quad n \geq 2, \quad F_0 = O, \quad F_1 = I,$$

та $G_n = A_2G_{n-2} + A_1G_{n-1}$, $n \geq 2$, $G_0 = I$, $G_1 = O$.

Тоді задача 1 має єдиний розв'язок для будь-яких відомих обмежених послідовностей тоді і лише тоді, коли при всіх $z \in \mathbf{C}$, $|z|=1$ існує неперервний обернений до оператора $(I - zA_2(F_{p-2}A_1 + G_{p-2}))$ в просторі $\mathbf{B}$.

Висновки. В роботі отримано необхідні і достатні умови існування та єдиності обмежених розв'язків певного класу абстрактних лінійних різницьових рівнянь з крайовими умовами інтерполяційного типу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Слюсарчук, В. Е. Оценки спектров и обратимость функциональных операторов / В. Е. Слюсарчук // Матем. сборник. – 1978. – 105(147), №2. – С. 268–285.
2. Городний, М. Ф. Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве / М. Ф. Городний // Укр. матем. журн. – 1991. – 43, № 1. – С. 41 – 46.

31. ВАРІАЦІЙНИЙ ФУНКЦІОНАЛ В ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА $W^{1,p}$ НАД БАГАТОВИМІРНОЮ ОБЛАСТЮ: ОГЛЯД РЕЗУЛЬТАТІВ

Катерина Божонок

Національний педагогічний університет імені

М.П. Драгоманова

Вступ. Теоретичні основи варіаційного числення були закладені ще Л.Ейлером і Ж.Лагранжем в XVIII ст. Проте, у зв'язку з величезним інтересом з боку найрізноманітніших застосувань варіаційне числення і оптимальне управління є розділами аналізу, що продовжує активно розвиватися.

Методи. Окреме місце займають дослідження на екстремум варіаційних функціоналів в просторах Соболєва $W^{1,p}$, $p \in N$. Дослідження екстремальних задач в $W^{1,p}$, $p \in N$, привело в роботах І. В. Орлова ([1]) до введення понять компактних характеристик (K -характеристик).

Нехай E – дійсний банахів простір, $C(E)$ – система всіх абсолютно опуклих компактів в E , E_C – лінійна оболонка C , з банаховою нормою $\|\cdot\|_C$, що породжена C .

Означення 1. Функціонал $\Phi: E \rightarrow R$ називається K -неперервним (K -диференційовним, має K -екстремум) в точці $y \in E$, якщо всі звуження Φ на $y + E_C$ неперервні (диференційовні за Фреше, мають локальний екстремум) в y відносно $\|\cdot\|_C$.

Результати. У наших роботах ([2], [3]) були введені широкі класи інтегрантів, що названі K -псевдополіномами, для яких варіаційний функціонал

$$\Phi(y) = \int_D f(x, y, \nabla y) dx \quad (1)$$

в просторі Соболєва $W^{1,p}(D)$, $p \in N$, де D - компакт в R^N з ліпшицевою межею, буде мати відповідні K -аналітичні властивості.

Означення 2. Нехай $f \in C^m \cap K_p(z)$. Відображення f називається K -псевдо-поліномом класу $W^m K_p(z)$, якщо воно може бути зображено у вигляді

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^p R_k(x, y, z)(z)^k, \text{ де } R_k \text{ } (k = \overline{0, p}) \text{ є борелівськими відображеннями і}$$

всі джети порядку m ($R_k, \nabla_{yz} R_k, \dots, \nabla_{yz}^m R_k$) задовольняють умові домінантної за x, y мішаної неперервності.

Теорема 1. Якщо інтегрант f варіаційного функціонала (1) належить класу $W^m K_p(z)$, $m \in N$, то функціонал (1) m разів K -диференційовний в $W^{1,p}(D)$.

Для знаходження K -екстремуму варіаційного функціонала доведено аналог класичної необхідної умови локального екстремуму - узагальнене рівняння

Ейлера—Остроградського (див. [2]). Тут ми розглядаємо варіаційний функціонал (1) з додатковою граничною умовою

$$y|_{\partial D} = y_0, \quad y_0 \in W^{1,p}(\partial D). \quad (2)$$

Теорема 2. Нехай $f \in W^1 K_p(z)$, функціонал (1) за граничної умови (2) має K -екстремум в точці $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$ і відображення $(\partial f / \partial z)(x, y, \nabla y)$ належить $W^{1,1}(D)$. Тоді м.в. на D має місце узагальнене рівняння Ейлера-Остроградського

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \nabla y) - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i}(x, y, \nabla y) \right) = 0. \quad (3)$$

Розв'язки рівняння (3) - K -екстремалі варіаційного функціонала (1).

Далі, в роботі [3] отримана достатня умова K -екстремуму варіаційного функціонала (1)-(2) в $W^{1,p}(D)$ в термінах гессіана інтегранта.

Теорема 3. Нехай $y(\cdot)$ - K -екстремаль функціонала (1) в $W^{1,p}(D)$, $p \geq 2$ за граничної умови (2). Припустимо, що

$$f \in W^2 K_p(z), \quad (\partial f / \partial z)(x, y, \nabla y) \in W^{1,1}(D).$$

Якщо на K -екстремалі $y(\cdot)$ за всіх $x \in D$ виконана умова

$$\begin{pmatrix} (\partial^2 f / \partial y^2)(x, y, \nabla y) & (\partial^2 f / \partial y \partial z)(x, y, \nabla y) \\ (\partial^2 f / \partial z \partial y)(x, y, \nabla y) & (\partial^2 f / \partial z^2)(x, y, \nabla y) \end{pmatrix} \gg 0,$$

то варіаційний функціонал (1) має K -мінімум в точці $y(\cdot)$.

Висновки. Введені широкі класи інтегрантів, що названі K -псевдополіномами, для яких варіаційний функціонал в просторі Соболева буде мати відповідні K -аналітичні властивості. Отримана необхідна і достатня умова K -екстремуму варіаційного функціонала в просторі Соболева над багатовимірною областю.

ЛІТЕРАТУРА

1. Orlov, I.V. Compact extrema: general theory and its applications to the variational functionals / I.V Orlov // Operator Theory: Advances and Applications, Basel: Birkhauser. – 2009. – Vol. 190. – P. 397-417.
2. Орлов, И.В. Необходимые условия K -экстремума вариационного функционала в пространствах Соболева над многомерной областью / И.В. Орлов, Е.В Божонко., Е.М Кузьменко // Доповіді НАН України. – 2014. - №4. – С. 19-24.
3. Божонко, Е.В. Условия компактного экстремума основного вариационного функционала в шкале пространств Соболева над многомерной областью / Е.В. Божонко, Е.М. Кузьменко // Нелинейные граничные задачи. – 2012. – Т.21. – С. 9-26.

32. ВИЗНАЧЕННЯ В'ЯЗКОСТІ РУЙНУВАННЯ МАТЕРІАЛУ З ВИКОРИСТАННЯМ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗРАХУВАННЯ ПРОСТОРОВОГО ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ КОМПАКТНИХ ЗРАЗКІВ ПРИ УДАРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ З УРАХУВАННЯМ РОЗВАНТАЖЕННЯ МАТЕРІАЛУ

Владислав Богданов

*Serenidad Consulting Pty Ltd, PO Box 58, Milton, NSW,
Australia 2538*

Вступ. Чисельне моделювання процесів руйнування дає можливість оптимізувати програму реальних іспитів матеріалів, суттєво зменшити кількість достатньо дорогих експериментальних досліджень і прискорити їх завершення. При моделюванні процесів руйнування використовуються плоска [1–4] і просторова [5, 6] динамічні пружнопластичні постановки. В [3–5] за допомогою чисельного моделювання з використанням двовимірних рівнянь динаміки пружнопластичного деформування матеріалу з нерухомою тріщиною визначалась в'язкість руйнування. В [7] зроблена цікава спроба розвинути теорію розв'язування початково-краєвих задач для тіл обернення у пружнопластичній постановці при термосиловому навантаженні. Однак обмеженням використаного формулювання задачі є геометрична прив'язка опису процесу деформування до координатної площини (використовується розрахункова схема методу скінчених елементів по просторовим координатам) внаслідок чого малі деформації стаються по траєкторіям малої кривизни.

При експериментальному визначенні в'язкості руйнування K_{Ic} матеріалу необхідно провести велике число серій випробувань для великої кількості зразків, переважно в достатньо широкому діапазоні зміни температур. Тому теоретичні підходи, що дозволяють істотно зменшити число таких випробувань, заслуговують уваги. В [8] розвинуто імовірнісний підхід визначення в'язкості руйнування з використання квазістатичної пружнопластичної моделі. Подібним образом [9] розвинено імовірнісний підхід для визначення в'язкості руйнування, котрий дає можливість її визначати більш точно, ніж при використанні метода Майстер кривих. Випробування проводяться для невеликої кількості зразків при нормальній температурі. Параметри розподілення Вейбула майже не залежать від температури і, визначенні тільки один раз, використовуються для розрахунку залежностей в'язкості руйнування в широкому діапазоні температур.

В [5] і в даній роботі показано, що розроблена методика розв'язування просторових задач у динамічній пружнопластичній постановці дає можливість більш точно обчислювати пластичні деформації, ніж в [9], а тому і більш адекватно визначати в'язкість руйнування. Напружено-деформований стан брусків у формі паралелепіпеда з нерухомим плоским пропилом-тріщиною по середині (зразок з краєвою тріщиною для визначення в'язкості руйнування при

третичковому згині – SENB), що виготовлено з реакторної сталі, титану, алюмінію і срібла визначається на основі розв’язування просторової задачі, що сформульовано у пружнопластичній динамічній постановці з урахуванням можливого розвантаження матеріалу.

Методи. Брус контактує з двома нерухомими опорами. Зверху на брус падає абсолютно твердий ударник, що контактує з брусом на протязі короткого проміжку часу. Його дію замінюємо рівномірно розподіленим в області контакту нормальним навантаженням, що змінюється з часом за лінійним законом. На протязі всього проміжку часу взаємодії область контакту вважається постійною.

За фізичну модель матеріалу обрана модель, що основана на теорії неізотермічної пластичної течії для середовища зі зміцненням і умовою текучості Губера - Мізеса у поєднанні з гіпотезою короточасної повзучості.

При розрахунку динамічних полів напружень і деформацій не враховуємо взаємодії хвильових полів, відбиття від межі тіла і можливої при цьому контактної взаємодії між берегами розрізу.

Для чисельного інтегрування за часом використалася квадратурна формула Грегорі третього порядку.

Для урахування фізичної нелінійності застосовується метод послідовних наближень, який дає можливість нелінійну задачу звести до послідовності лінійних задач. Інтенсивність напружень і деформацій, що використовуються, визначалися для кожної елементарної комірки із числового розв’язку. Для розрахунків математичної моделі компактного зразка застосовано метод скінченних різниць зі змінюваним кроком розбиття.

Процес розвантаження матеріалу відбувався за таким алгоритмом. Якщо в будь-якій комірці абсолютне значення напруження ставало меншим ніж максимальне значення, тоді пластичні деформації зупиняють збільшуватися і зміцнення матеріалу припиняється. Знов пластичні деформації починають збільшуватися і зміцнення матеріалу продовжується, коли абсолютне значення напружень перевищує максимальних значень.

Результати. На основі розв’язування просторової задачі накопичення пластичних деформацій у зразку для визначення в’язкості руйнування при третичковому згині у динамічній пружнопластичній постановці з урахуванням процесу розвантаження матеріалу для чотирьох різних матеріалів показано, що чим менше відношення модулів зсуву і об’ємного стиску, тим більше пластичні деформації. Отримані криві в’язкості руйнування для реакторної сталі 15X2НМФА повністю охоплюють експериментальні результати, що наведені у публікації [9].

Висновки. Отримані результати точніше описують процес руйнування, ніж при використанні для цієї цілі розв’язування квазістатичних пружнопластичних задач в двовимірних і тривимірних постановках. Це дає можливість поліпшити методику розрахункового визначення в’язкості руйнування матеріалів, що запропоновано у [9], добре моделює процес розвитку пластичних деформацій і концентрації напружень в околі фронту тріщини.

ЛІТЕРАТУРА

1. Богданов, В.Р. Плоская деформация упругопластического материала с профилем формы компактного образца (динамическое нагружение) / В.Р.

Богданов, Г.Т. Сулим // Известия РАН: Механика твердого тела, Москва, - 2013. - № 3. - С. 111–120.

2. Богданов, В.Р. Моделирование роста пластических деформаций при ударе на основе численного решения задачи плоского напряженного состояния / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулим // Вестник МАИ, Москва. - 2013. - т.20. № 3. - С. 196–201.

3. Богданов, В.Р. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского напруженого стану / В.Р. Богданов // Вісник Київського національного університету. Серія фіз.-мат. науки. 2008. - № 3. - С. 51–56.

4. Богданов, В.Р. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі числового моделювання плоского деформованого стану / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулим // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2010. – № 6. – С. 16–24.

5. Богданов, В.Р. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання тривимірної динамічної задачі / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулим // Международный научно-технический сборник «Надежность и долговечность машин и сооружений». - 2010. № 33. - С. 153–166.

6. Богданов, В.Р. Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини / В.Р. Богданов // Вісник Київського ун-ту, Київ. - 2009. № 2. - С. 51–56.

7. Пискун, В.В. Динамические упругопластические процессы деформирования тел вращения при импульсном нагружении / В.В. Пискун, Ю.Н. Шевченко // Ін-т гідромеханіки НАНУ: Зб. наукових праць «Актуальні аспекти фізико-механічних досліджень. Механіка», Київ: Наукова думка. - 2007. - С. 239–251.

8. Махненко, В.И. Совершенствование методов оценки остаточного ресурса сварных соединений конструкций длительного срока эксплуатации / В.И. Махненко, // Автоматическая сварка, Киев. - 2003. № 10–11. - С. 112–121.

9. Margolin, B.Z. Fracture toughness predictions for a reactor pressure vessel steel in the initial and highly embrittled states with the Master Curve approach and a probabilistic model / B.Z. Margolin, V.A. Shvetsova, A.G. Gulenko, A.V. Ilyin., V.A. Nikolaev, V.I. Smirnov // Pressure Vessels and Piping. - 2002. Jan. P. 219–231.

33. PROBABILITY MEASURES ON THE ONE FRACTAL CURVES

Valeriy Kovalenko

National Pedagogical Dragomanov University

Introduction. Self-similar curves and their combinations (curves of Serpinskiy, Koch, Osgood and other) are one of the simplest class of fractal curves on the plane. Measures with support on the fractal curves attracts special attention among the measures with difficult local structure in $\mathbb{R}^2$. There are methodological difficulties in the well definition and investigation of such measures. One means of their definitions are different coding systems and distributions of random elements in the space, which are induced by distributions of symbols of coding systems. This work is devoted to one class of such measures, which focus on an interesting self-similar curve (Vichek fractal), every point of which has the branching index equal to 2 or 4.

We study the structural, topological, metric and fractal properties of the distribution of complex-valued random variable

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} \varepsilon_{\eta_k} \equiv \Delta_{\eta_1 \dots \eta_k \dots},$$

where indices η_k are independent random variables which assume the values 0, 1, 2, 3, 4 with corresponding probabilities $p_{0k}, p_{1k}, p_{2k}, p_{3k}, p_{4k}$, $p_{ik} \geq 0$, $\sum_{i=0}^4 p_{ik} = 1 (\forall k \in \mathbb{N})$, and $\varepsilon_m = e^{\frac{m\pi i}{2}} = i^m$ ($m = 0, 1, 2, 3$) is a root of unity, $\varepsilon_4 = 0$.

Methods. We use the methods of probability theory, fractal analysis.

Results. Lemma 1. The random variable ζ takes values from the set

$$V = \left\{ z : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} \varepsilon_{i_k} \equiv \Delta_{i_1 \dots i_k \dots} \right\}$$

where sequences (i_k) runs over space $A_5^\infty := A_5 \times \dots \times A_5 \times \dots$ ($A_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$).

Set V is a self-similar fractal curve, its dimension is equal $\frac{\ln 5}{\ln 3}$.

Corollary 1. If the conditions of Lemma 1 holds, then fractal Hausdorff-Besicovitch dimension of the set of possible values of the random variable ζ is equal to $\frac{\ln 5}{\ln 3}$.

Corollary 2. If all the elements of the matrix $\|p_{ik}\|$ are not equal to zero, then the spectrum S_ζ (minimal closed support) of distribution of the random variable ζ coincides with the set V .

Theorem 1. The distribution of the random variable ζ has a pure discrete Lebesgue type if and only if

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max_{0 \leq j \leq 4} \{p_{jk}\} > 0.$$

In this case, the point spectrum D_ζ of distribution of the random variable ζ can be represented as a union

$$D_\zeta = \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k,$$

where D_k is a set of all points of the form $z = \sum_{j=1}^k \frac{2}{3^j} \varepsilon_{i_j} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^j} \varepsilon_{m_j}$, and the indices i_j ($j = \overline{1, k}$) are taking all possible values from the set A_5 , and m_n is an index such that $\max_{0 \leq q \leq 4} \{p_{qn}\} = p_{m_n n}$ ($n = 1, 2, \dots$).

Corollary 3. The distribution of the random variable ζ is continuous if and only if $M = 0$.

Theorem 2. The spectrum S_ζ of distribution of random variable ζ is the set

$$C = \{z : z = \Delta_{i_1 \dots i_k \dots}, p_{i_j j} > 0 (\forall j \in \mathbb{N})\}.$$

Corollary 4. If $M = 0$, then the distribution of the random variable ζ is a singular continuous, i.e. it is orthogonal to the two-dimensional Lebesgue measure.

Lemma 2. If the random variables ζ are equally distributed, i.e. $p_{ik} = p_i (\forall k \in \mathbb{N}, i = \overline{0,4})$, then the expectation and variance of ζ are calculated by formulas:

$$M\zeta = p_0 - p_2 + i(p_1 - p_3),$$

$$D\zeta = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_3^2 - p_0^2 - p_2^2 + 2p_0p_2 - 2p_1p_3 + p_0 - p_1 + p_2 - p_3 - 2(p_0 - p_2)(p_1 - p_3)i)$$

Lemma 3. Suppose $p_{ik} = p_i (\forall k \in \mathbb{N}), i = \overline{0,4}$; then S_ζ is a self-similar set and its self-similar dimension is equal to $\log_3 m$, where m is the number of positive coordinates probability vector $\bar{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)$. Moreover,

1. if $p_0 = p_2 = 0, p_1p_3p_4 \neq 0$, then S_ζ is a line segment;
2. if $p_4 = 0, p_0p_1p_2p_3 \neq 0$, then S_ζ is a totally disconnected set.

Conclusions. It is proved that the distribution of ζ is concentrated on a fractal, which is self-similar curve, every point of which has the branching index equal to 2 or 4. The distribution of ζ is discrete, or singular continuous (with respect to the two-dimensional Lebesgue measure). We obtain conditions under which the distribution belongs to each of these types. Described point spectrum in the case of a discrete distribution, and in the case of the singularity distribution described topological, metric and fractal properties of minimal closed support (spectrum). We studied in detail the case of equal distribution of indices, in particular found the mathematical expectation and variance of the random variable.

REFERENCES

1. Працьовитий, М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М.В. Працьовитий. - К: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. - 296 с.
2. Працьовитий, М.В. Фрактальність і канторовість розподілу однієї комплекснозначної випадкової величини типу Джессена-Вінтнера / М.В. Працьовитий, М.С. Чумак // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. - 1999. - № 1. - С. 244-250.
3. Кроновер, Р. Фракталы и хаос в динамических системах / Р. Кроновер. - М.: Техносфера, 2006. - 488 с.
4. Фракталы в физике: Тр. VI Междунар. симпоз. по фракталам в физике, Триест, 9-12 июля 1985. - М.: Мир, 1988. - 672 с.
5. Serge, D. Courbes de von Koch et courbes d'Osgood / D. Serge // Math. Repts Acad. Sci. Can. - 1983. - Vol. 5, № 4. - P.173-178.
6. Hutchinson, J.E. Fractals and self-similarity / J.E Hutchinson // Indiana Univ. Math. J. - 1981. - № 30. - P. 713-747.

34. НОРМАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ У ЇХ Δ^μ -ЗОБРАЖЕННІ

Тетяна Ісасва

Національний педагогічний університет імені
М.П. Драгоманова

Вступ. Досліджуються тополого-метричні і фрактальні властивості множин дійсних чисел з обмеженнями на використання символів їх Δ^μ -зображення. Таке зображення є кодуванням дійсних чисел з нескінченним алфавітом за допомогою знакозмінних рядів спеціального виду і породжено єдиним параметром $\mu \in (0;1)$. В деякій мірі це зображення має схожі топологічні властивості з зображенням дійсних чисел елементарними ланцюговими дробами [1], але має принципові відмінності, зокрема, N-самоподібну геометрію.

Методи. Для розв'язання поставлених задач використовуються методи математичного аналізу, теорії чисел та фрактального аналізу.

Результати. Нехай $(0,1) \ni \mu$ фіксоване число (параметр).

Теорема 1. [2] Для будь-якого $x \in (0,1)$ існує скінченний набір $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ або послідовність натуральних чисел (a_n) такі, що x є сумою знакозмінного ряду

$$x = \sum_n (B_n - B'_n), \quad (1)$$

де $B_n = (1-\mu)^{a_1+a_3+\dots+a_{2n-1}-1} \mu^{a_2+a_4+\dots+a_{2n-2}}$, $B'_n = (1-\mu)^{a_1+a_3+\dots+a_{2n-1}-1} \mu^{a_2+a_4+\dots+a_{2n}}$.

Подання числа x у формі (1) ми називаємо Δ^μ -представленням числа, а його символічний запис $\Delta^\mu_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}$ у випадку нескінченної суми та $\Delta^\mu_{a_1 a_2 \dots a_n (\emptyset)}$ у випадку скінченного розкладу числа x його Δ^μ -зображенням. При цьому число (символ) $a_n = a_n(x)$ називається n -ою цифрою (символом) цього зображення.

Дане зображення (кодування) дійсних чисел, алфавітом якого є множина натуральних чисел, породжується однопараметричним узагальненням класичної сингулярної строго зростаючої функції Мінковського [3], яке побудоване в роботі [4].

Означимо множину

$$C[\Delta^\mu; (V_n)] \equiv \left\{ x : x = \Delta^\mu_{a_1(x) a_2(x) \dots a_n(x) \dots}, a_n(x) \in V_n \subseteq N, n \in N \right\},$$

де (V_n) - фіксована послідовність непорожніх підмножин множини N .

Лема 1. Якщо $|V_n|=1$ при всіх n , більших деякого $n_0 \in N$, то множина $C[\Delta^\mu; (V_n)]$ є зліченною; якщо $|V_n|>1$ нескінченну кількість разів, то вона є континуальною.

Теорема 2. Множина $C[\Delta^\mu; (V_n)]$ має властивості:

- 1) є об'єднанням відрізків, якщо $V_n \neq N$ скінченну кількість разів;
- 2) ніде не щільною множиною, якщо $V_n \neq N$ нескінченну кількість разів;

3) міра Лебега множини $C[\Delta^\mu; (V_n)]$ обчислюється за формулою:

$$\lambda(C[\Delta^\mu; (V_n)]) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2k-2})} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2k})}{\lambda(F_{2k-2})} \right),$$

де F_{2k} - замикання об'єднання циліндрів рангу $2k$, серед внутрішніх точок яких є точки множини $C[\Delta^\mu; (V_n)]$, $\overline{F}_{2k+2} = F_{2k} \setminus F_{2k+2}$.

Наслідок 1. Міра Лебега множини $C[\Delta^\mu; V]$ рівна нулю, якщо $V \neq N$.

Наслідок 2. Множина $C[\Delta^\mu; V]$ є самоподібною, якщо V скінченна і N -самоподібною, якщо V нескінченна. Її самоподібна розмірність співпадає з фрактальною розмірністю Хаусдорфа-Безиковича α_0 , яка задовольняє умову:

$$\alpha_0(C[\Delta^\mu; V]) = \sup_n \left\{ x : \sum_{u,v \in V \cap N_n^1} \left((1-\mu)^u \mu^v \right)^x = 1 \right\},$$

де $N_n^1 = \{1, 2, \dots, n\}$.

Властивість дійсного числа називають *нормальною* [5], якщо вона має місце для майже всіх (у розумінні міри Лебега) дійсних чисел.

Теорема 3. Міра Лебега множини всіх чисел півінтервала $(0;1]$ з обмеженими Δ^μ -символами дорівнює нулю.

Теорема 4 (Про нормальну властивість числа). Майже всі (у розумінні міри Лебега) числа півінтервалу $(0;1]$ задовольняють умову

$$\overline{\lim_{k \rightarrow \infty}} a_k(x) = \infty.$$

Висновки. Отримані нормальні властивості дійсних чисел у їх Δ^μ -зображенні можуть бути використані при дослідженні лебегівської структури та спектральних властивостей розподілів випадкових величин, Δ^μ -символи яких є незалежними або утворюють однорідний ланцюг Маркова. Вони також можуть бути в нагоді при дослідженні тополого-метричної структури атракторів динамічних систем, індукованих цим зображенням, та функцій з нетривіальними локальними властивостями.

Запропоноване зображення має ряд змістовних переваг поряд з іншими нескінченносимвольними зображеннями дійсних чисел з допомогою знакозмінних рядів (наприклад, рядів Остроградського-Сerpінського-Піrsa [5] та рядів Остроградського 2-го виду), що пов'язано зі швидкістю збіжності рядів. Його тополого-метричні властивості дещо схожі з зображенням за допомогою знакозмінних рядів Лjюрота [6].

ЛІТЕРАТУРА.

1. Хинчин, А. Я. Цепные дроби. / А. Я. Хинчин - М.: Наука, 1978. – 116 с.
2. Працьовитий, М.В. Одна однопараметрична сім'я систем кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом / М.В. Працьовитий, Т.М. Ісаєва // П'ятнадцята

Міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15-17 травня, 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т.2. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. - К.: НТУУ «КПІ», 2014. - С. 154.

3. Minkowski, H. *Gesammelte Abhandlungen* / H. Minkowski // - Berlin, 1911. – Vol. 2. - P. 50-51.

4. Працьовитий, М.В. Сингулярність функцій однопараметричного класу, який містить функцію Мінковського / М.В. Працьовитий, А.В. Калашніков // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. - 2011. - № 12. - С. 59-65.

5. Барановський, О.М. Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їхні застосування / Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М. - Київ: Наукова думка, 2013. – 268 с.

6. Працьовитий, М.В. Основи метричної теорії зображення дійсних чисел знакомінними рядами Люрота та найпростіші застосування / М.В. Працьовитий, Ю.В. Хворостіна // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. - 2010. - № 11. - С. 102-118.

35. EXACT SOLUTION OF THE MULTIDIMENSIONAL LIOUVILLE EQUATION

Ivan Yuryk

National University of Food Technologies

Introduction. Let us consider the multidimensional Liouville equation

$$\square u + \lambda \exp u = 0, \quad (1)$$

where $u = u(x)$ is a scalar function of the variable $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+2})$,

$\square u = u_{11} + u_{22} - u_{33} - \dots - u_{n+2, n+2}$, $u_{ab} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_a \partial x_b}$; $a, b = 1, 2, \dots, n+2$. The equation (1) is

invariant under the extended Poincare algebra $A\tilde{P}(2, n)$, which is generated by the following vector fields

$$P_a = \partial_a, \quad J_{ab} = g^{ac} x_c \partial_b - g^{bc} x_c \partial_a, \quad D = -x^a \partial_a + 2\partial_u,$$

where $\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x_a}$, $\partial_u \equiv \frac{\partial}{\partial u}$, $g_{11} = g_{22} = -g_{33} = \dots = -g_{n+2, n+2} = 1$, $g_{ab} = 0$ when $a \neq b$;

$a, b = 1, 2, \dots, n+2$. Using subalgebras of the rank 3 of the algebra $A\tilde{P}(2, 2)$ the symmetry ansatzes reducing the equation (1) to ordinary differential equations are built. With the help of the reducing equations some classes of exact solutions of equation (1) are constructed.

Methods. In the present work classes of exact of equation (1) are constructed for arbitrary n .

Let us consider the symmetry ansatz $u = u(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, where $\omega_1 = x_1 - x_4$, $\omega_2 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \dots - x_{n+2}^2$, $\omega_3 = (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)^{-1}$. The ansatz reduces the equation (1) to the equation

$$4\omega_1 u_{12} + 4\omega_2 u_{22} + 2(n+2)u_2 + \lambda \exp u = 0. \quad (2)$$

Let us investigate symmetry of the equation (2).

Theorem 1. The maximal invariance algebra of the equation (2) in Lie sense is infinitely-dimensional Lie algebra $A_\infty(3)$, which is generated by such operators $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$, where

$$X_1 = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} - \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} - \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_3 = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_2},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ are arbitrary smooth functions of the variable ω_3 .

Results. Let us consider the 3-dimensional subalgebra $A(3) = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle$ of the algebra $A_\infty(3)$ and carry out reduction of the equation (1) by 1-dimensional subalgebras of the algebra $A(3)$. Let L be an one-dimensional subalgebra of the algebra $A(3)$. Then L is conjugated to one of the following algebras:

$$L_1 = \langle X_1 + \alpha X_2 \rangle \quad (\alpha \in R), \quad L_2 = \langle X_2 \rangle, \quad L_3 = \langle X_1 + \varepsilon X_3 \rangle \quad (\varepsilon = \pm 1), \quad L_4 = \langle X_3 \rangle.$$

1) Subalgebra $L_1 = \langle X_1 + \alpha X_2 \rangle \quad (\alpha \in R)$. The ansatz $u = \varphi(\omega) - \ln \omega_1^{\alpha+1}$, $\omega = \omega_2 \omega_1^{-\alpha-1}$ reduces the equation (2) to $4\alpha\omega\ddot{\varphi} + 2(n+2)\dot{\varphi} + \lambda \exp \varphi = 0$.

2) Subalgebra $L_3 = \langle X_1 + \varepsilon X_3 \rangle \quad (\varepsilon = \pm 1)$. The ansatz $u = \varphi(\omega) - \ln \omega_1$, $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1} - \varepsilon \ln \omega_1$ reduces the equation (2) to $-4\varepsilon\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \lambda \exp \varphi = 0$.

Now let us consider a symmetry ansatz $u = u(x_1 - x_{n+2}, x_2, \dots, x_{n+1})$. The ansatz reduces the equation (1) to the equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n+1}^2} + \lambda \exp u = 0. \quad (3)$$

Theorem 2. Algebra of invariance of the equation (3) in Lie sense is infinitely-dimensional Lie algebra $AP_\infty(1, n-1)$ which is generated by such operators

$$\alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_{n+1} P_{n+1} + \sum_{a,b} \beta_{a,b} J_{ab} + \gamma D,$$

where

$$P_a \equiv \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{2a} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_a} + x_a \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$J_{ab} = x_b \frac{\partial}{\partial x_a} - x_a \frac{\partial}{\partial x_b}, \quad D = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - \dots - x_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} + 2 \frac{\partial}{\partial u},$$

$a, b = 3, \dots, n+1$; $\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}, \beta_{a,b}, \gamma$ are arbitrary smooth functions of the variable $x_1 - x_{n+2}$.

Let us carry out reduction of the equation (3) on subalgebras of the rank $n-1$ of the algebra $AP(1, n-1) = \langle P_2, \dots, P_{n+1}, J_{23}, \dots, J_{n,n+1}, D \rangle$. We write out the ansatzes corresponding to such subalgebras

$$1) u = \varphi(\omega) - 2 \ln(x_1 + x_{n+1}), \quad \omega = \frac{x_1}{x_{n+1}};$$

$$2) u = \varphi(\omega) + \frac{2\alpha}{1-\alpha} \ln(x_1 + x_{n+1}), \quad \omega = (1+\alpha) \ln(x_1 + x_{n+1}) + (1-\alpha) \ln(x_1 - x_{n+1});$$

$$3) u = \varphi(\omega) - \ln(x_1 - x_{n+1}), \quad \omega = x_1 + x_{n+1} + \ln(x_1 - x_{n+1});$$

$$4) u = \varphi(\omega) - 2 \ln x_1, \quad \omega = \frac{x_3^2 + \dots + x_m^2}{x_2^2}, \quad m = 3, \dots, n+1.$$

Conclusions. Using solutions of reduced equations we find exact solutions of the Liouville equation. Let us adduce some of them

$$u = -\ln \left\{ -\frac{1}{2m\theta} \left[x_2 - x_{n+1} - \theta (x_3^2 - \dots - x_m^2 - x_{n+1}^2) \right] \right\},$$

where θ is an arbitrary twice differentiable function of the variable $x_1 - x_{n+2}$; $m = 3, \dots, n$;

$$u = \ln \frac{1 + \frac{\omega}{\omega + \lambda_3} + \dots + \frac{\omega}{\omega + \lambda_t}}{\lambda \left[-x_2^2 + \frac{\omega}{\omega + \lambda_3} x_3^2 + \dots + \frac{\omega}{\omega + \lambda_t} x_t^2 + x_{n+1}^2 \right]},$$

where $\omega = x_2 - x_{n+1}$, $\lambda_3, \dots, \lambda_t$ are arbitrary functions of the variable $x_1 - x_{n+2}$; $t \leq n$.

36. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РЕОЛОГІЧНИХ КРИВИХ СТРУКТУРОВАНИХ РІДИННИХ СИСТЕМ

Ольга Гуцол

Національний технічний університет НТУУ «КПІ»

Вступ. Реологія, як наука про деформації і текучість речовини, розглядає процеси, пов'язані з незворотними залишковими деформаціями і течінням різноманітних в'язких і пластичних матеріалів (неньютонівських рідин, дисперсних систем і ін.), а також явища релаксації напруги, пружності післядії і таке інше. Реологічні проблеми виникають як в найрізноманітніших виробничих технологічних процесах, пов'язаних з різними матеріалами (металами, композиційними матеріалами, полімерними системами, нафтопродуктами, будівельними матеріалами, фарбами, харчовими продуктами і тому подібне), так і в біосистемах (течіння біологічних рідин - крові, синовіальної і плевральної рідини; деформації різних тканин - м'язів, кровоносних судин і тому подібне). Можна вважати аксіомою реології положення про те, що будь-який реальний матеріал має всі реологічні властивості, виражені різною мірою.

Наявність повної кривої реології течії дозволить використовувати її при виборі оптимальних параметрів різних технологічних процесів. Побудувати криву реології для заданого матеріалу по найменшому числу механічних характеристик дозволяє фізично обґрунтована математична модель. За відсутності універсального рівняння реології важливою є можливість правильно визначити необхідну

характеристику речовини за заданих умов або спрогнозувати поведінку матеріалу на основі вибору адекватної для цих умов моделі.

Методи. В поліграфії в'язкість друкарської фарби є однією із найбільш технологічно важливих фізичних характеристик і відноситься до групи структурно-механічних властивостей фарб, які визначають їх технологічну придатність для вибраного способу друку, стійкість при зберіганні, деформації в процесі друку, взаємодію фарби із папером або іншим задруковуваним матеріалом. Разом з цим в'язкість є реологічним параметром друкарської фарби, що визначає її здатність текти по комунікаціях друкарської секції машини, розподілюватися рівномірним шаром на її фарбових валах, а потім - друкарській формі та задруковуваному матеріалі.

Відомо, що в'язкість фарби залежить від її хімічного складу, концентрації пігменту у зв'язуючому, характеру міжчасткової взаємодії у дисперсно-колоїдній системі, будови структурованої дисперсії (або розчину), консистенції (стану) фарби – рідка, геле- або пастоподібна або ж тверда (у вигляді порошку), та від робочої температури друкарської секції.

Одним з напрямів виявлення властивостей фарб є дослідження залежності в'язкості фарби від температури, яке важливе тому, що температура фарби може змінюватися у процесі її експлуатації, починаючи з моменту її виготовлення та зберігання у певних умовах до завершального процесу перенесення фарби на задруковуваний матеріал.

Метод аналізу залежності логарифма в'язкості $\ln \eta$ від оберненої температури $1/T$ дозволяє отримати якісні характеристики досліджуваної речовини на основі активаційної теорії в'язкого течіння. Середовище уявляється безліччю груп кінетичних одиниць течії, об'єднуючих частинки однакового розміру з однаковим періодом релаксації. Передбачається, що структура системи не змінюється в процесі течії, а тому параметри системи (зокрема період релаксації) прийняті постійними. Ур'єв Н.Б. відмічав, що прийняті допущення обмежують область застосування теорії течіння неньютонівських середовищ Рі і Ейрінга в'язкими рідинами, в яких механізм нелінійності не пов'язаний з руйнуванням структури, і запропонований механізм течії може бути застосований для структурованих систем тільки в області лінійної залежності $\dot{\epsilon}-P$, тобто в зоні найбільшої в'язкості практично незруйнованої структури η_0 і в зоні найменшої в'язкості гранично зруйнованої структури η_m .

Але представляється абсолютно природним припущення про справедливості такої моделі на будь-якому інтервалі, де залежність $\dot{\epsilon}-P$ є лінійною, а не тільки в областях максимальної і мінімальної в'язкості. Кожна така область (інтервал) характеризуватиметься своєю енергією активації, своїм розміром частинок (переважаючих за даних умов), своїм часом «осілого» життя, середньою відстанню між частинками і тому подібне. У такому разі завдання полягає в апроксимації нелінійної в загальному випадку залежності набором лінійних функцій. Представлений метод отримання інтервалів, де функція поводить майже лінійно, і відповідних лінійних залежностей, заснований на перевірці того, чи не відхиляються точки досліджуваної функції від пропонованої прямої на величину більшу, ніж це допускається похибкою вимірювань: якщо для чергової

точки це відхилення більше похибки, від неї починається побудова наступної прямолінійної ділянки (перед цим з таблично заданої функції потрібно виключити аномальні точки). Оцінка такої моделі за критерієм Фішера дозволяє зробити висновок про її адекватність.

Дослідження температурної залежності проведено у відповідності до алгоритму:

1. Будується графік вихідної залежності в'язкості від температури для попереднього аналізу поведінки аналітичної функції.

2. Підбирається апроксимуюча функція (або наближуючий поліном) для подальшої процедури інтерполяції або, при необхідності, екстраполяції (екстраполювання можна поширювати на невеликі температурні інтервали, тому що зі збільшенням інтервалу втрачається точність представлення).

3. У результаті інтерполяції одержуємо новий масив з достатньо великою кількістю необхідних значень (наприклад, прорахувавши значення в'язкості з інтервалом в один градус).

4. Якщо масив даних був представлений в шкалі Цельсія, то необхідно перевести значення відповідних їм температур у шкалу Кельвіна. Після цього будується графік залежності натурального логарифма в'язкості фарби від оберненої температури (в шкалі Кельвіна).

5. В отриманому логарифмічному представленні виділяються ділянки, які з достатньою точністю (до 0,1%) описуються лінійною залежністю. Отже, одержаний з заданою точністю графік представляється сукупністю прямолінійних ділянок.

6. Нахил кожної з цих прямих визначає певні множники у аналітичній формулі залежності в'язкості (або її натурального логарифма) від температури. Виходячи з цього, стає можливим визначити зміни початкової в'язкості та енергії активації в'язкої течії фарби в залежності від оберненої температури $1/T$ або температури T .

Результати. На прикладі чорної фарби для залежності $\ln(\eta)$ як функції від $1/T$ після застосування функції поліноміальної регресії Mathcad розширено діапазон дослідження екстраполювання наявних рядів значень поліномами четвертого степеня в області низьких температур і поліномами другого степеня в області високих температур, з визначенням відповідних функцій регресії. Після застосування процедур інтерполяції та екстраполяції отримано достатню кількість точок для подальшого дослідження. За наведеним вище алгоритмом автором була створена програма в системі Mathcad, яка на s-образній кривій дозволила виділити п'ять температурних інтервали, тобто представити залежність $\ln(\eta)$ як функції від $1/T$ з прямими лінійної регресії на певних (визначених) інтервалах температур.

Висновки. Аналіз такої моделі дозволяє визначити температурні інтервали, на яких структура речовини зберігається достатньо стабільною і зробити висновок, що зміна енергетичних структурних властивостей фарби відбувається у визначених п'яти температурних інтервалах по суті дискретно і залежить від того, які компоненти структури видозмінюються або руйнуються під дією температури, як на макроструктурному, так і на міжмолекулярному та

міжатомному рівні. Щоб більш детально визначити характер таких змін і класифікувати їх, доцільно було б порівняти інші структурно-чутливі властивості речовини, які отримані іншими експериментальними методами дослідження, у таких самих температурних інтервалах.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гуцул, О.О. Моделирование реологических кривых структурированных систем./ О.О. Гуцул, А.К. Дорош // Вісник СевНТУ. Вип. 110: Механіка, енергетика, екологія: зб.наук. праць. – Севастополь: Вид-во СевНТУ, 2010. – С.186-191
2. Дорош, А.К. Реологічні властивості червоних (Magenta) уніфікованих офсетних фарб HEASET серії IRGASTAR GF виробництва компанії CIBA / А.К. Дорош, А.В. Шевчук, О.О. Гуцул // Збірник наукових праць „Технологія і техніка друкарства». – 2013. - № 1 – С. 92-105; „Технологія і техніка друкарства». – 2013. – № 2 - С. 83-98

37. ЗГИН ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ І ДВОМА ПРЯМОЛІНІЙНИМИ НАСКРІЗНИМИ ТРІЩИНАМИ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇХ БЕРЕГІВ

**Віктор Опанасович, Микола Слободян,
Василь Бедрій**

*Львівський національний університет імені
Івана Франка*

Вступ. Розвиток машинобудівних, авіаційних, будівельних, суднобудівних та інших технологій в багатьох випадках пов'язаний із використанням пластинчастих елементів, що обумовлено їх порівняною легкістю. Під час експлуатації таких елементів можуть виникати тріщини, і важливо знати, яким чином вони впливають на міцність конструкцій. Одним із основних завдань при оцінці міцності конструктивного елементу з тріщинами є визначення коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів, з допомогою яких характеризується напружено-деформований стан в околі вершин тріщин та проводиться оцінка його міцності.

Методи. В роботі досліджена задача про двосторонній згин безмежної ізотропної пластини завтовшки $2h$ з двома співвісними прямолінійними тріщинами завдовжки $2l$ і еліптичним отвором з півосями a та b , межі яких вільні від зовнішнього навантаження (див. рис. 1). Під дією згинальних моментів на нескінченності M_x^∞ і M_y^∞ береги тріщин приходять у гладкий контакт поблизу верхньої основи пластини по області сталої ширини h_1 по всій її довжині. Виберемо декартову систему координат $Ox\tilde{y}$ так, щоб координатні осі Ox та Oy лежали в серединній площині пластини, а початок координат O співпадав з центром еліптичного отвору, причому вісь Ox напрямлена по півосі еліпса a і проходить через центри тріщин. Вважатимемо, що центри тріщин O_j знаходяться на відстані x_{0j} від точки O , причому $x_{0j} > l_j + a$, $j = 1, 2$. Пов'яжемо

з тріщинами декартові системи координат $O_j x_j y_j$ (див. рис. 1). Лінії, де розміщені тріщини позначимо через L_j , а межу еліптичного отвору – через L .

Оскільки береги тріщини контактують, то розв'язок задачі будемо шукати у вигляді розв'язків двох задач: задачі згину пластини, використовуючи класичну теорію згину, та плоскої задачі.

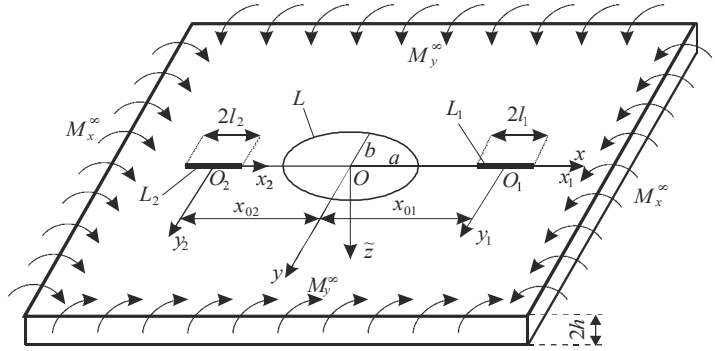


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

Згідно формулювання задачі маємо такі крайові умови:

$$M_n = 0, P_n = 0, \sigma_{nn} = 0, \sigma_{nt} = 0, x \in L,$$

$$\sigma_{y_m y_m}^+ = \sigma_{y_m y_m}^- = -0.5 N_m / h, \sigma_{x_m y_m}^+ = \sigma_{x_m y_m}^- = 0, x_m \in L_m, m = 1, 2,$$

$$M_{y_m}^+ = M_{y_m}^- = M_{y_m}, P_m^+ = P_m^- = 0, x_m \in L_m, m = 1, 2,$$

$$v_m^+ - v_m^- + \tilde{\alpha} h (\partial w_m^+ / \partial y_m - \partial w_m^- / \partial y_m) = 0, M_{y_m} = \beta h N_m, x_m \in L_m, m = \overline{1, 2},$$

$$\beta = 1 - \gamma / 3, \tilde{\alpha} = 0.5 (1 + (1 - \gamma)^2) \square, \gamma = h_1 / h,$$

де N_m – контактне зусилля між берегами тріщини, w – прогин пластини, σ_{nn} , σ_{yy} і σ_{nt} , σ_{xy} – нормальні і дотичні напруження, M_y , M_n – згинальний момент, P , P_n – узагальнені в сенсі Кірхгофа перерізувальні сили, знаками «+» і «-» позначимо граничне значення відповідної величини при $y_j \rightarrow \pm 0$, ($j = 1, 2$).

За допомогою теорії функції комплексної змінної, комплексних потенціалів та задач лінійного спряження, з використанням плоскої задачі та класичної теорії згину пластин, розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, як на отворі так і на тріщинах відносно невідомих функцій $X(v)$, $Y(v)$ на межі отвору та $X_j(v)$, $Y_j(v)$ на тріщинах, які пов'язані стрибками кутів повороту на їх берегах. Наведемо деякі із них

$$\int_0^{2\pi} [X(v)K'(v, \theta) + \overline{X(v)}M'(v, \theta)] dv + \sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 [X_j(v)K'_j(v, \tilde{t}_j) + \overline{X_j(u)}M'_j(v, \tilde{t}_j)] dv + B' = ic,$$

$$\int_0^{2\pi} [Y(v)\tilde{K}'(v, \theta) + \overline{Y(v)}\tilde{M}'(v, \theta)] dv + \sum_{j=1}^M \int_{-1}^1 [Y_j(v)\tilde{K}'_j(v, \tilde{t}_j) + \overline{Y_j(v)}\tilde{M}'_j(v, \tilde{t}_j)] dv = 0,$$

$$\operatorname{Im} \left[\int_{-1}^1 \left[Y_m(v) \tilde{R}'_m(v, \rho) \right] dv + \int_0^{2\pi} \left[Y(v) \tilde{R}'(v, \tilde{z}) + \overline{Y(v)} \tilde{T}'(v, \tilde{z}) \right] dv + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^M \int_{-1}^1 \left[Y_j(v) \tilde{R}'_j(v, z'_j) + \overline{Y_j(v)} \tilde{T}'_j(v, z'_j) \right] dv \right] = 0, \quad m = \overline{1, M}, \\ \operatorname{Re} \left[Y_m(\rho) + \tilde{\beta}' X_m(\rho) \right] = 0, \quad m = \overline{1, M},$$

$$\int_{-1}^1 Y_m(v) dv = 0, \quad \int_{-1}^1 X_m(v) dv = 0, \quad \operatorname{Im} \left[\int_{-1}^1 v X_m(v) dv \right] = 0, \quad m = \overline{1, M}, \quad \int_0^{2\pi} X(v) dv = 0,$$

де ядра цієї системи відомі і їх не наводимо.

Результати. Отримана система сингулярних інтегральних рівнянь розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведений числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності моментів та зусиль, контактного зусилля між берегами тріщин, на основі енергетичного критерію визначено критичне навантаження при якому тріщина поширюватиметься.

Висновки. На основі числового аналізу встановлено такі закономірності: величина контактної зусилля є більшою у ближніх вершинах тріщин до отвору, а наявність двох тріщин призводить до зменшення величини контактної зусилля на їх берегах в порівнянні з випадком взаємодії отвору з однією тріщиною; урахування контакту берегів тріщин призводить до зменшення КІМ та збільшення критичного навантаження.

38. МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ БАГАТОШАРОВИХ КОНСТРУКЦІЙ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Юрій Глухов

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

Вступ. У роботі розглянута постановка і метод розв'язку просторової динамічної задачі про збурення двошарового заздалегідь напруженого напівпростору поверхневим навантаженням, що рухається з постійною швидкістю. Аналогічні плоскі задачі для двошарового стисливого і нестисливого напівпростору розглянуті відповідно в роботах [1, 2].

Дослідження проведені в рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями [3].

Методи. Розглянемо шар товщиною $2h$, що лежить на пружній основі з початковими напруженнями. Граничні поверхні шару і напівпростору паралельні між собою. До вільної поверхні шару прикладено навантаження, що рухається з постійною швидкістю на протязі великого проміжку часу. Відносно рухомої системи координат, пов'язаної з цим навантаженням, існує усталений деформований стан. Навантаження рухається по прямій.

Припускаємо, що рух шару може бути описаний системою рівнянь з теорії пластин, що враховує інерцію обертання і поперечний зсув.

Для пластини, що перебуває під впливом поперечних і тангенціальних поверхневих сил, рівняння руху в рухомій системі координат можуть бути записані так:

$$\begin{aligned} \frac{2G_1 h^2}{3(1-\nu)} \left[(1-\nu) \nabla^2 \Psi_1 + (1+\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \right] + \tau_1 - \kappa G_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y_1} + \Psi_1 \right) &= \frac{2\rho_1 h^2}{3} v^2 \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y_1^2}; \\ \frac{2G_1 h^2}{3(1-\nu)} \left[(1-\nu) \nabla^2 \Psi_2 + (1+\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \right] + \tau_2 - \kappa G_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y_2} + \Psi_2 \right) &= \frac{2\rho_1 h^2}{3} v^2 \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y_1^2}; \\ \kappa G_1 h (\nabla^2 w + \Phi) + q &= 2h\rho_1 v^2 \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} + P_3 \delta(y_1) \delta(y_2). \end{aligned}$$

Тут

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}; \quad \Phi = \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2};$$

ρ_1 - щільність матеріалу пластини; G_1 - модуль зсуву; ν - коефіцієнт Пуасона; κ - коефіцієнт зсуву Тимошенко; Ψ_1 і Ψ_2 - повороти відносно осей y_1 і y_2 ; w - переміщення серединної площини пластини; τ_1 , τ_2 , q - дотичні і нормальні навантаження, що діють на поверхні розділу пластини і основи; P_3 - нормальне навантаження на вільній поверхні пластини, v - швидкість поверхневого навантаження; φ - кут, що визначає напрям руху поверхневого навантаження відносно нерухомої системи координат.

Підстилаючий напівпростір має початкові напруження і складається із стисливого або нестисливого матеріалу з довільним пружним потенціалом.

Вважаємо, що початковий напружений стан є однорідним і визначається співвідношеннями

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3; \quad S_0^{11} = S_0^{22} \neq S_0^{33}.$$

Також вважаємо, що напруження, які виникають за рахунок дії навантаження, значно менші початкових напружень. Це припущення дозволяє застосувати лінеаризовану теорію пружності [3] для опису додаткового напруженого стану, викликаного дією навантаження.

В координатах рухомої системи координат рівняння руху основи можна записати в загальному вигляді таким чином:

$$\begin{aligned} &\left(\tilde{A} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \zeta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \Psi = 0; \\ &\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \zeta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \zeta_3^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) - \sqrt{2} \right\} \end{aligned}$$

$$-\left[\tilde{B}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right) + \tilde{C}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right]\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{D}\frac{\partial^4}{\partial y_1^4}\left\}\chi^{\{s\}} = 0;$$

де коефіцієнти $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, \zeta_j$ є функціями параметрів, що характеризують поверхневе навантаження, і параметрів, що характеризують матеріал основи [3].

Розглянуто нежорсткий контакт між пластиною і основою при $y_3 = -h$

$$\tilde{Q}_{31} = 0; \quad \tilde{Q}_{32} = 0; \quad \tilde{Q}_{33} = q; \quad \tau_1 = 0; \quad \tau_2 = 0; \quad u_3 = w.$$

Для розв'язку задачі використовується подвійне перетворення Фур'є по координатах y_1 і y_2 .

Розв'язок задачі про усталений рух двошарового заздалегідь напруженого напівпростору під впливом рухомого навантаження в області зображень Фур'є зводиться до розв'язку системи алгебраїчних рівнянь.

Висновки. В просторі зображень Фур'є в загальному вигляді для рівних і нерівних коренів характеристичних рівнянь та різних швидкостей руху поверхневого навантаження отримано фундаментальний розв'язок задачі.

Приведені формули для трансформант характеристик напружено-деформованого стану двошарового напівпростору.

Для отримання оригіналів трансформант відповідних компонентів напружено-деформованого стану слід скористатися зворотним перетворенням Фур'є.

Отримані результати можуть бути використані при дослідженні напружено-деформованого стану елементів шаруватих конструкцій.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бабич, С.Ю. Об одной динамической задаче для слоистого сжимаемого полупространства с начальными напряжениями / С.Ю. Бабич, Ю.П. Глухов, А.Н. Гузь // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 3. – С. 36 – 54.
2. Бабич, С.Ю. Динамика слоистого несжимаемого полупространства с начальными напряжениями при воздействии подвижной загрузки / Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н. // Прикл. механика. - 2008. - 44, № 4. - С. 35 - 55.
3. Гузь, А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: «А.С.К.», 2004. – 672 с.

39. ГЕОМЕТРІЯ ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ КАНОНІЧНИМИ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Артем Чуйков

Інститут математики НАН України

Вступ. Існують системи кодування дійсних чисел з скінченним та нескінченним алфавітами. Зображення чисел елементарними ланцюговими дробами $[a_0; a_1, a_2, \dots]$, $a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{N}$ породжує складну несамоподібну геометрію та складні метричні відношення. Двосимвольний алфавіт кодування дійсного числа за допомогою ланцюгового дроби може розширити можливості вивчення

$$[d_1, d_2, \dots, d_{n-3}, d_{n-2}, 0]^{D_2} = [d_1, d_2, \dots, d_{n-3}, d_{n-2} + \infty]^{D_2} = [d_1, d_2, \dots, d_{n-3}]^{D_2}.$$

І цей процес продовжується, якщо $d_{n-3} = 0$.

Лема 3. Має місце співвідношення:

$$[1, 1, d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2} + [1, 0, 1, d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2} = 1.$$

↓ Нехай $a = 1 + [d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2}$, тоді

$$[1, 1, d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{a}{a+1}; [1, 0, 1, d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{0 + \frac{1}{a}}} = \frac{1}{a+1},$$

$$\text{Звідси } [1, 1, d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2} + [1, 0, 1, d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2} = \frac{a}{a+1} + \frac{1}{a+1} = 1. \uparrow$$

Наслідок. $\left| \Delta_{d_1 d_2 \dots d_n}^{D_2} \right| = \left| \Delta_{d_1 0 d_2 \dots d_n}^{D_2} \right|, (d_1 = d_2 = 1).$

Зауваження. З леми 3 також випливає, що циліндри виду $\Delta_{11d_3 \dots d_n}^{D_2}$ n -го рангу розташовані симетрично відносно точки $x = \frac{1}{2}$ до циліндрів виду $\Delta_{101d_3 \dots d_n}^{D_2}$ $n+1$ -го рангу.

Висновки. Досліджено геометрію канонічних ланцюгових дробів, виявлені певні співвідношення між циліндрами різних рангів. У доповіді також пропонується застосування канонічних ланцюгових дробів для конструювання об'єктів зі складною локальною структурою: функцій, множин, розподілів тощо.

ЛІТЕРАТУРА

1. Iosifescu, M. Metric properties of Denjoy's canonical continued fraction expansion / M. Iosifescu, C. Kraaikamp // Tokyo J. Math. – 2008. – Vol. 31, № 2. – P. 495-510.

40. НЕСКІНЧЕННО-СИМВОЛЬНЕ q_0^∞ - ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ, ЙОГО ГЕОМЕТРІЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ

Яніна Гончаренко, Ірина Лисенко

*Національний педагогічний університет імені
М.П. Драгоманова*

Вступ. В математиці розробляються і використовуються різні системи представлення та зображення (кодування) дійсних чисел. Одні з них використовують скінченний, інші – нескінченний алфавіт; одні – суттєво надлишкові, інші мають нульову надлишковість; геометрія одних самоподібна, інших – ні. Потреба в створенні та дослідження таких систем продиктована різними факторами, одним з яких є забезпечення засобів для моделювання та дослідження об'єктів зі складною локальною будовою.

Методи. В роботі вводиться континуальна сім'я нескінченно-символьних кодувань (q_0^∞ -зображень) дробової частини дійсного числа з алфавітом $A = \{1, 2, \dots, n, \dots\} \equiv N$, визначених параметром $q_0 \in (0; 1)$, яке має нульову надлишковість (кожне число має єдине зображення). Вказується його зв'язок з Q_2 -зображенням [1], описується геометрія, закладаються основи метричної, фрактальної та ймовірнісної теорій.

Результати. Обґрунтовано існування та єдність введеного q_0^∞ -зображення для будь-якого дійсного числа з проміжку $(0; 1]$.

Теорема 1. Якщо q_0 – фіксоване дійсне число, $q_0 \in (0; 1)$, то для будь-якого $x \in (0; 1]$ існує єдина послідовність натуральних чисел (a_k) така, що

$$x = q_0^{a_1} + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - q_0)^n q_0^{a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} - n} \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{q_0^\infty}. \quad (1)$$

Зауважимо, що розклад числа x в ряд (1) є Q_2 -зображенням цього числа, яке формально записується $x = \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{a_1-1} \underbrace{10\dots 01}_{a_2-1} \dots \underbrace{0\dots 01}_{a_n-1} \dots}^{Q_2} = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{q_0^\infty}$. Цей запис встановлює

взаємозв'язок між Q_2 -зображенням числа $x \in (0; 1]$ з двосимвольним алфавітом $A_2 = \{0, 1\}$ і його кодуванням засобами нескінченного алфавіту $A = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$.

В роботі встановлено умови раціональності числа у його q_0^∞ -зображенні.

Якщо q_0 – раціональне число, то q_0^∞ -зображення називатимемо *раціональним q_0^∞ -зображенням*.

Теорема 2. Якщо раціональне q_0^∞ -зображення числа x є періодичним, то x – раціональне число.

Виникає питання: чи правильне твердження, обернене до теореми 2? Негативна відповідь на нього отримана шляхом побудови контрприкладу, в якому показано, що при $q_0 = \frac{1}{3}$ число $x = \frac{1}{2}$ має неперіодичне q_0^∞ -зображення.

В роботі досліджено геометрію введеного зображення, зокрема властивості циліндричних множин, та отримано основне метричне відношення:

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{q_0^\infty}|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{q_0^\infty}|} = (1 - q_0) q_0^{i-1},$$

де $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{q_0^\infty} = \left\{ x : x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m a_{m+1} a_{m+2} \dots}^{q_0^\infty}, a_{m+i} \in N, i = 1, 2, 3, \dots \right\}$.

В роботі також досліджено властивості оператора зсуву цифр, хвостових множин та розв'язано задачу Гаусса-Кузьміна для q_0^∞ -зображення чисел.

Отримано ряд результатів щодо дослідження метричних властивостей множин, породжених q_0^∞ -зображенням дійсних чисел.

Теорема 3. Множина $C = C[q_0^\infty, (V_n)] = \left\{ x : x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n}^{q_0^\infty}, a_n(x) \in V_n \subseteq N \right\} \in$:

- 1) об'єднанням півінтервалів, якщо $V_n = N$ для всіх n , більших деякого n_0 ;
- 2) ніде не щільною множиною, якщо нерівність $V_n \neq N$ виконується нескінченну кількість разів;
- 3) міра Лебега множини C обчислюється за формулою

$$\lambda(C) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{k+1})}{\lambda(F_k)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\bar{F}_{k+1})}{\lambda(\bar{F}_k)} \right),$$

де $F_0 = (0;1]$, $F_k = \bigcup_{c_1 \in I_1} \dots \bigcup_{c_{k-1} \in I_{k-1}} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m^i}}^{q_0^\infty}$, $\bar{F}_{k+1} = F_k \setminus F_{k+1}$.

З останньої теореми отримано ряд наслідків, зокрема встановлено властивість нуль-мірності за Лебегом для певних класів множин.

В роботі також представлено результати дослідження фрактальних властивостей множин, породжених q_0^∞ -зображенням дійсних чисел. Зокрема доведено наступний факт та ряд наслідків з нього.

Теорема 4. Множина $C = C[q_0^\infty, V] = \left\{ x : x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty}, a_n(x) \in V \neq N \right\}$ є самоподібною, якщо V скінченна і N -самоподібною, якщо V нескінченна, самоподібна і фрактальна розмірність Хаусдорфа-Безиковича якої є розв'язком рівняння: $\sum_{v \in V} \left((1 - q_0) q_0^{v-1} \right)^x = 1$.

Висновки. В роботі представлено новий спосіб зображення (кодування) дійсних чисел з нескінченним алфавітом та нульовою надлишковістю. Доведено ряд властивостей такого зображення. Застосовано отримані результати до задавання та дослідження метричних та фрактальних властивостей множин зі складною будовою (ніде не щільних, нульової міри Лебега, дробової розмірності Хаусдорфа-Безиковича). Отримані результати в перспективі планується використати до розробки нових методів задавання та дослідження математичних моделей процесів та явищ, що мають складну мікроструктуру та хаотичну поведінку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Працьовитий, М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М.В. Працьовитий – К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. – 296 с.

41. ПРО ПРОСТІ ЕЛЕМЕНТИ КІЛЕЦЬ $Z[\sqrt{d}]$

Оксана Требенко, Наталія Цибульська
Національний педагогічний університет імені
М.П. Драгоманова

Вступ. Активне дослідження кілець $O_{Q[\sqrt{d}]}$ цілих елементів полів алгебраїчних чисел $Q[\sqrt{d}]$ розпочалось ще у XIX столітті. Вивченню їх

властивостей присвячені роботи таких відомих математиків як Gauss (1801), Kummer (1844), Heegner (1952), Stark (1967), Baker (1966), Weinberger (1973), Clark (1994), Harper (2000). Однак і досі для даних кілець залишається чимало відкритих питань.

Серед таких питань і проблема факторизації елементів даних кілець. Відмітимо важливість даної проблеми з огляду на широкі застосування алгебраїчних чисел в криптографії. Відомими в цьому напрямі є роботи Theodorus J. Dekker's [1,2], Zachary Scherr's [3], John Kopper's [4], Franz Lemmermeyer's [5], в яких досліджуються прості елементи кільця $O_{\mathbb{Q}[\sqrt{d}]}$. Зокрема, повний опис простих елементів кільця цілих гаусових чисел можна знайти в роботі B. Van der Pol [6]; а в роботі [2] пропонується один із можливих способів відшукування всіх простих елементів довільного кільця $O_{\mathbb{Q}[\sqrt{d}]}$, водночас, цей спосіб не дає повного опису простих елементів.

Методи. В даній роботі розглядаються прості елементи числових кілець $Z[\sqrt{d}]$, де $d \neq 1$ – вільне від квадратів ціле число. Зауважимо, що під $Z[\sqrt{d}]$ ми розуміємо мінімальне кільце, що містить кільце Z і елемент $\sqrt{d}$, тобто кільце $Z[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in Z\}$. Кільце $Z[\sqrt{d}]$ збігається із кільцем $O_{\mathbb{Q}[\sqrt{d}]}$ при $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ і є його власним підкільцем при $d \equiv 1 \pmod{4}$.

Авторами пропонується повний опис простих елементів кільця $Z[\sqrt{d}]$. В дослідженні використані методи теорії чисел та теорії кілець.

Результати. Основними теоретичними результатами є теореми 1-3 та наслідок.

Теорема 1. Нехай $d \neq 1$ – вільне від квадратів ціле число. Якщо $(a, b) = 1$, то фактор-кільце $Z[\sqrt{d}] / \langle a + b\sqrt{d} \rangle$ ізоморфне кільцю Z_m , де $m = |a^2 - b^2d|$.

Наслідок. Нехай кільце $Z[\sqrt{d}]$, де $d \neq 1$ – вільне від квадратів ціле число, є кільцем головних ідеалів. Елемент $a + b\sqrt{d}$, де $(a, b) = 1$, – простий в $Z[\sqrt{d}]$ тоді і лише тоді, коли простим є число $|a^2 - b^2d|$.

Нехай $\left(\frac{a}{p}\right)$ – символ Лежандра для числа a за простим модулем $p > 2$.

Теорема 2. Нехай кільце $Z[\sqrt{d}]$, де $d \neq 1$ – вільне від квадратів ціле число, є кільцем головних ідеалів і p – просте натуральне число. Тоді в $Z[\sqrt{d}]$:

- 1) якщо $p \mid d$, то p – складений елемент;
- 2) якщо $p \neq 2, p \nmid d$, то p є простим елементом тоді і лише тоді, коли $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$;
- 3) якщо $p = 2$, то при $d \equiv 1 \pmod{4}$ є простим елементом, а при $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ є складеним елементом.

Теорема 3. Нехай кільце $Z[\sqrt{d}]$, де $d \neq 1$ – вільне від квадратів ціле число, є кільцем головних ідеалів, ε – дільник одиниці в $Z[\sqrt{d}]$. Простими елементами кільця $Z[\sqrt{d}]$ є:

- 1) $\pm\sqrt{d}$;
- 2) числа $\varepsilon \cdot a$, де a – просте непарне число, $a \nmid d$ і $\left(\frac{d}{a}\right) = -1$;
- 3) числа $\varepsilon \cdot 2$, якщо $d \equiv 1 \pmod{4}$;
- 4) елементи $a + b\sqrt{d} \in Z[\sqrt{d}]$, якщо $(a, b) = 1$ і $|a^2 - b^2d|$ – просте число; і лише вони.

Зауважимо, що отриманий повний опис (Теорема 3) буде цінним не лише для фахівців з алгебраїчної теорії чисел і теорії кілець, але й для прикладних застосувань, оскільки дає алгоритм перевірки елемента на простоту, який можна реалізувати в будь-якому програмному середовищі. Одну із таких програмних реалізацій в СКМ Maple буде запропоновано в доповіді.

Висновки. В доповіді пропонується повний опис простих елементів кільця $Z[\sqrt{d}]$, де $d \in Z \setminus \{1\}$ – вільне від квадратів, та наводиться програмна реалізація алгоритму дослідження елементів кільця $Z[\sqrt{d}]$ на простоту.

ЛІТЕРАТУРА

1. Dekker, T.J. Primes in quadratic fields // arXiv:1001.5214 [math.NT]. – 2010. – 30 p.
2. Dekker, T. J. Prime numbers in quadratic fields / T. J. Dekker // CWI Quarterly 7, 1994. – P.367-394.
3. Scherr, Z. The ring $Z[\sqrt{d}]$ / Z. Scherr // Math 371: Algebra II, 2014. – P.1-7.
4. Kopper, J. The theory of numbers in Dedekind rings / J. Kopper // Department of Mathematics University of Chicago, 2011. – P.1-16.
5. Lemmermeyer, F. Algebraic number theory / F. Lemmermeyer // Bilkent University Faculty of Science, 2011. – 20 p. – Режим доступу: <http://www.fen.bilkent.edu.tr/~franz/ant-st.pdf>
6. B. Van der Pol, The primes in $k(\zeta)$ / B. Van der Pol, P. Speziali // Indag. Math. – 1951. - № 13. – P.9-15.

42. ON GROUPS WITH SOME FINITE SUPERCOMPLEMENTED SUBGROUP

Oxana Trebenko

National Pedagogical Dragomanov University

Introduction. One of the main branches of investigations in abstract group theory is a study of groups in which some subgroups or systems of subgroups satisfy particular restricting requirements, e.g. are complemented. Recall that a subgroup A of the group G is called complemented in G , if there exists some subgroup B of G such that $G = AB$ and $A \cap B = 1$. Finite groups in which all subgroups are complemented were first considered by Ph.Hall [1]. A complete constructive

description of arbitrary groups in which all subgroups are complemented has been obtained by N.V.Chernikova [2,3]. Note that in view of N.V.Chernikova's Theorem [2,3] such groups are solvable (more precisely, metabelian) and locally finite.

From that time a systematic investigation of groups in which all subgroups satisfying particular additional conditions are complemented (e.g. all abelian subgroups, all finite, all normal subgroups) began.

Considered in this report are groups G in which every subgroup containing some fixed subgroup H is complemented. Such subgroup is called supercomplemented in G (V.A.Kreknin, 2005). In [4,5] and [6,7] locally-graded p -groups and RN -groups with a supercomplemented p -subgroup respectively were considered. It turned out that such groups also are solvable and locally finite.

It was natural to consider the general case of arbitrary finite supercomplemented subgroup. Results obtained are presented in the report.

Methods. Used in investigation were methods of abstract group theory.

Results. Recall that a group is said to be locally graded, if its every nonidentity finitely generated subgroup has a proper subgroup of finite index (S.N.Chernikov, 1970). The class of all RN -groups is an important and extremely wide subclass of the class of locally-graded groups. For example, all solvable and locally solvable, radical (in the sense of B.I.Plotkin) and locally radical groups, groups of all Kurosh-S.N.Chernikov's classes are RN -groups.

Main results are the following Theorems 1-3.

Theorem 1. RN -group with a finite supercomplemented subgroup is locally finite and solvable.

Corollary. In each of the following cases 1)-3) a group G with a finite supercomplemented subgroup is locally finite and solvable:

- 1) G – locally solvable;
- 2) G – hyperabelian;
- 3) G – radical (in the sense of B.I.Plotkin).

Note that the requirement in Theorem 1 for a supercomplemented subgroup to be finite is essential (as shows the following proposition).

Theorem 2. There exist nonsolvable RN -groups with an infinite supercomplemented subgroup.

Note that in view of the following proposition the requirement in Theorem 1 for a group G to belong to the class of RN -groups is also essential.

Theorem [8]. There exists a nonsolvable locally-graded group with a supercomplemented cyclic p -subgroup.

However under certain restrictions in the case of locally-graded groups a result similar to Theorem 1 may be obtained.

Theorem 3. Periodic locally-graded group, having no involutions, with a finite supercomplemented subgroup is locally finite and solvable:

Corollary 1. Periodic locally finite group, having no involutions, with a finite supercomplemented subgroup is solvable.

Corollary 2. Periodic residually finite group, having no involutions, with a finite supercomplemented subgroup is locally finite and solvable.

Conclusions. Results presented in the report generalize considerably the results of the previous investigations [4-7]. They may be used in further investigations of groups with some system of complemented subgroups.

REFERENCES

1. Hall, Ph. Complemented groups / Ph. Hall // J. London Math. Soc. – 1937. – Vol. 12, № 3. – P. 201-204.
2. Черникова, Н.В. Вполне факторизуемые группы / Н.В. Черникова // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 92, № 5. – С. 877-880.
3. Черникова, Н.В. Группы с дополняемыми подгруппами / Н.В. Черникова // Мат. сб. – 1956. – Т. 39, № 3. – С. 273-292.
4. Chernikov, N.S. A generalization of completely factorizable groups / N.S. Chernikov, V.A. Kreknin, O.O. Trebenko // Matematychni Studii. – 2005. – Vol. 23, № 2. – P. 129-135.
5. Крекнин, В.А. Локально ступенчатые 2-группы со сверхдополняемой циклической подгруппой / В.А. Крекнин // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – Т. 2, № 3. – С. 137-209.
6. Chernikov, N.S. RN -groups with a supercomplemented cyclic p -subgroup / N.S. Chernikov, O.O. Trebenko // Bull. Univ. Kiev. – Ser. Phys. Math. – 2007. – №1. – P. 46-49.
7. Trebenko, O.O. On groups with a supercomplemented cyclic p -subgroup / O.O. Trebenko // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – Т. 3, №4. – С. 153-164.
8. Trebenko, D.Ya. On solvability of groups with a finite nilpotent supercomplemented subgroup / D.Ya. Trebenko, O.O. Trebenko // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 169, Issue 5. – P. 713-716.

43. АДЕКВАТНІСТЬ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ В ТЕХНОЛОГІЯХ ПОЛІГРАФІЧНОГО ВИРОБНИЦТВА

Богдан Кушлик

Національний технічний університет НТУУ «КПІ»

Вступ. Малотиражна продукція нині визначає структуру і склад технологічних процесів, їх матеріальне і технічне забезпечення, апаратно-програмне управління. Ілюстровані книги, альбоми, газети, журнали, буклети, проспекти, плакати, календарі, листівки випускаються накладом в межах 500-5000 примірників, а подекуди й значно менше. При цьому вимоги до цих видань, зазвичай, залишаються високими. В сучасних реаліях України та світу більшість поліграфічних підприємств у своєму розпорядженні має одну-дві одиниці друкарського обладнання, при цьому використовують для виконання багатьох замовлень різні типи матеріалів, що необхідно задруковувати. Тому є актуальною задача забезпечення стабільності технологічного процесу незалежно від зміни того чи іншого фактора для отримання високоякісної друкованої продукції.

Методи. Побудовано математичну модель руху певної точки валів фарбового апарата друкарської машини, яка описується системою лінійних диференціальних рівнянь з запізненням та фазовим обмеженням. Отримано розв'язок задачі у загальному вигляді із наведенням траєкторій зміни кількості фарби при керуваннях

«збільшення» та «зменшення». Також розроблено комплексну методику оцінки адекватності моделі, яка включає: розробку та детальний опис тест-форми для забезпечення ефекту подавання на відбиток різної кількості фарби та однакової кількості зволожувального розчину у площині друкарської форми; детальний поетапний опис методики здійснення експерименту; моделювання технологічного процесу друку у друкарській машині Komori Enthrone 529.

Результати. Перевірено підлягання отриманих значень у вибірках нормальному закону розподілу за критерієм Пірсона (перевірено вибірку з вимірювання значень, отриманих на ділянці дії фарбового ножа № 3 для тесту, друкованого 05.10.2011, обрано відбиток № 90, для якого значення можна вважати стабілізованими).

Згідно з методикою розрахунку за критерієм Пірсона, визначено інтервали для кожної з вибірок (для ΔE , D , ΔS відн 80 % та ΔS відн 40 %, де ΔE – колірні відмінності, D – оптична густина, ΔS відн – розтискування, зміна відносної площі друкувальних елементів) та кількість значень, що у них потрапляють, розраховано ймовірності потрапляння випадкового значення у задані інтервали відповідно до очікуваного середнього значення та середньоквадратичного відхилення, використовуючи функцію пакету MS Excel НОРМРАСП($x; x_{cp}; \sigma; 0$).

Розраховане значення величини χ^2 -статистики порівнюється з критичним, яке також знаходиться за формулою в MS Excel ХІ2ОБР($\alpha; k$). Для кожної з вибірок кількість ступенів вільності дещо відрізняється, наприклад, у даному випадку для вибірки за ΔE $k = 2$, для вибірки за D $k = 9$, а для вибірок за ΔS відн 80 % та ΔS відн 40 % $k = 1$.

У всіх випадках розрахунки показують, що оскільки значення величин χ^2 є меншими за значення $\chi^2_{крит}$ ($5,723 < 5,99146$; $12,39 < 16,9189$; $2,837 < 3,8414$; $1,007 < 3,8414$), то гіпотеза про відповідність вибірок нормальному закону розподілу приймається.

Висновки. На основі отриманих даних зроблено висновок про те, що дійсно дані вимірювань, отримані за запропонованою методикою, підлягають нормальному розподілу. Тому проведено вимірювання основного масиву даних для побудови контрольних карт Шугарта.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кушлик, Б.Р. Математичний опис точки друкувального елементу у друкарському контакті офсетного друку / Б.Р. Кушлик // Технологія і техніка друкарства. — К: НТУУ «КПІ» ВПІ, 2010. — №4. — С. 92-100.

2. Кушлик, Б.Р. Удосконалення технології друкування малотиражної продукції плоским офсетним друком: дис. ... канд. техн. наук: 05.05.01/Київ, НТУУ «КПІ», 2014.–190с. – Бібліогр.: с. 134-148.

3. Кушлик, Б.Р. Модель «друкувальний елемент – офсетне полотнище – відбиток» у плоскому офсетному друці / Б.Р. Кушлик // Тези доповідей конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації». — К.-П.: Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2010. — С. 118-121.

44. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЗАДАЧ В ПОЛІГРАФІЧНОМУ ВИРОБНИЦТВІ

Ольга Кушлик-Дивульська

Національний технічний університет НТУУ «КПІ»

Вступ. Відома велика кількість задач в поліграфічному виробництві, побудова для яких математичних моделей є задачами диференціальних рівнянь із частинними похідними. Такими є, наприклад, задачі:

- визначення математичної залежності розподілу тиску в робочому шарі фарби при використанні валик-ракеля, що дозволяє збільшити швидкість друку і знизити графічні спотворення зображення на відбитку;
- перенесення теплоти в рідині, зміну зовнішнього тиску, вплив теплофізичних параметрів, поля швидкостей і тиску біля бульбашки, відповідно, моделювання процесу перенесення фарби;
- розподіл температури в середовищі з нелінійною поведінкою матеріалу; вплив температури на коефіцієнти тепло- та температуропровідності матеріалів компонент;
- теоретичні питання кількісної оцінки параметрів електричної дуги та їхній вплив на електричну ерозію контактів;
- зниження матеріаломісткості неоднорідних елементів конструкцій, вивчення фізико-механічних властивостей матеріалів приповерхневих шарів елементів поліграфічного обладнання (нанесення на них спеціальних захисних покриттів) та ряд інших задач.

Методи. Важливе значення має побудова математичних моделей описаних фізичних процесів, які відбуваються на виробництві. Не менш важливим також є розв'язування таких задач, як задач рівнянь математичної фізики, їх аналіз і впровадження отриманих результатів дослідження у виробництво. Розв'язують такі задачі, користуючись відомими теоретичними методами (методом Фур'є) теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними.

Результати. Для мішаної задачі рівняння коливань обмеженої струни

$$\begin{aligned}u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \\u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \\u(0, t) &= 0, \quad u_x(l, t) = 0\end{aligned}$$

є актуальною задачею підбору початкових умов $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$ таким чином, щоб коефіцієнти ряду Фур'є A_n, B_n набували одного числового значення при конкретному n та запису розв'язку із його побудовою в деякі моменти часу. Аналітично отримано розв'язок в залежності від довжини струни, від часу та в залежності від вигляду початкових функцій.

Зображення отриманого результату не є простим, тому часто використовують програми Mathcad. Цікавим та достатньо простим і, водночас, потужним є математичний пакет MathStudio, який дозволяє для розв'язаної аналітично задачі будувати 3D-графіки, анімовані графіки (дають змогу впорядковувати значення параметрів за чотирма показниками одночасно), які змінюються в просторі в залежності від часу. Тоді можна побачити реальну залежність змодельованої

мішаної задачі для рівнянь коливань обмеженої струни (мембрани), мішаної задачі рівняння теплопровідності від початкових умов.

Висновки. Отже, стає практичною можливість впливу на технологічний процес, наприклад, завдяки підбору початкового положення та початкової швидкості руху фарби її економне перенесення на сітчасту трафаретну форму. Доцільним є застосування класичних методів математичного моделювання із використанням сучасних програмних засобів з метою вивчення та вдосконалення технологічних процесів реального поліграфічного виробництва.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кушлик-Дивульська, О.І. Рівняння математичної фізики для опису процесів поліграфічної технології. Навчальний посібник: [ел. навч. вид.] / О.І. Кушлик-Дивульська / – К.: НТУУ «КПІ», 2012. – 177 с. (НМУ № Е 11/12-218).

2. Кушлик-Дивульська, О.І. Використання рівнянь математичної фізики в технологіях поліграфічного виробництва./ О.І. Кушлик-Дивульська // Тези доповідей Всеукраїнської науково-методичної конференції "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі". – К., НУХТ, 2013. – С. 81-83.

45. МНОЖИНИ НЕПОВНИХ СУМ ДЕЯКИХ ЗБІЖНИХ РЯДІВ

Ігор Савченко

*Національний педагогічний університет імені
М.П. Драгоманова*

Вступ. Вивченням тополого-метричних властивостей множини $E\{a_n\}$ неповних сум (підсум) числового ряду науковці займаються майже століття. І в цьому відношенні здобуто ряд цінних результатів, але опис її властивостей далекий до повного. На сьогодні все ще невідомі необхідні й достатні умови нуль-мірності (у розумінні міри Лебега), а також ніде не щільності множини неповних сум збіжного знакододатного ряду. Найбільші труднощі при дослідженні множин неповних сум виникають для рядів, у яких нерівності $a_n > r_n$ і $a_n \leq r_n$ виконуються нескінченну кількість разів.

Методи. При отриманні основних результатів використовувались методи загальної теорії міри, теорії чисел, теорії функцій дійсної змінної, фрактального аналізу та теорії наближень.

Результати. Розглядається збіжний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + r_n, \quad (1)$$

для членів якого виконується умова $a_n \geq a_{n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Нехай M – довільна підмножина множини натуральних чисел $\mathbb{N}$. Число

$$x(M) = \sum_{n \in M} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \text{ де } \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \in M, \\ 0, & \text{якщо } n \notin M, \end{cases}$$

називається *неповною сумою (підсумою)* ряду (1). Множину всіх неповних сум ряду (1) позначатимемо через

$$E\{a_n\} \equiv \left\{ x \mid x = \sum_{n \in M} a_n, M \in 2^{\mathbb{N}} \right\}.$$

Відомо [1], що множина підсум ряду (1) є або скінченним об'єднанням відрізків, або множиною, гомеоморфною множині Кантора, або множиною, гомеоморфною множині

$$T \equiv C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n-1} = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n},$$

де C – класична множина Кантора, G_k – об'єднання всіх центральних третин, які вилючаються з множини C на k -му кроці її побудови.

Твердження. Множина неповних сум ряду

$$\frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{4}{6^2} + \frac{3}{6^2} + \frac{2}{6^2} + \dots + \frac{4}{6^n} + \frac{3}{6^n} + \frac{2}{6^n} + \dots$$

гомеоморфна множині T .

Висновки. Досліджено тополого-метричні властивості множин неповних сум деяких класів рядів, у яких нерівності $a_n > r_n$ і $a_n \leq r_n$ виконуються нескінченну кількість разів. Доведено, що досліджувані множини підсум містять цілі відрізки, але не є скінченними об'єднаннями відрізків.

ЛІТЕРАТУРА

1. Guthrie, J.A. The topological structure of the set of subsums of an infinite series / J.A. Guthrie., J.E. Nyman // *Studia Math.* – 1988. – Т. 55, №. 2. – Р. 323-327.
2. Працьовитий, М.В. Структура досконалих множин і сингулярних розподілів ймовірностей в R_n / М.В. Працьовитий // *Наук. Часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. Науки.* – 2009. - № 10. – С. 179-189.

46. КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ДВОХ СМУГ З ПОЧАТКОВИМИ (ЗАЛИШКОВИМИ) НАПРУЖЕННЯМИ З НЕСКІНЧЕННИМ СТРИНГЕРОМ

Микола Діхтярук

Хмельницький національний університет

Вступ. Задачі, що виникають при передачі навантаження від стрингера скріпленого з пружними смугами (пластинами) – класичної теорії пружності знову привернули увагу у випадках, коли в останніх виникають початкові (залишкові) напруження. Особлива необхідність їх розгляду виникає внаслідок їх важливості при дослідженні конструкцій взагалі і особливо в зв'язку з проектуванням конструкції літальних апаратів.

Досить широкий список літератури, що відноситься до згаданих статистичних задач класичної теорії пружності, приводить до роботи [3], у якій розглядаються дві фундаментальні задачі, що тісно пов'язані з даним дослідженням.

Методи. В даній роботі в рамках лінеаризованої теорії пружності викладається постановка і розв'язок задачі про контактну взаємодію двох однакових пружних смуг з початковими (залишковими) напруженнями, защемлених по одному краю, з нескінченним стрингером.

Всі дослідження виконані для стисливих і нестисливих тіл у випадку пружних потенціалів довільної структури в загальному вигляді для теорії великих (кінечних) початкових деформацій. Для переходу до різних варіантів теорії малих початкових деформацій необхідно ввести спрощення, зазначене в [1].

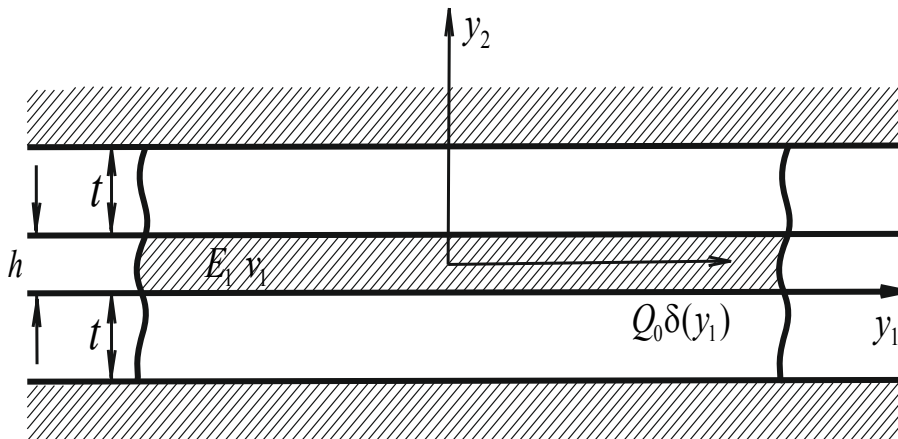


Рис.1

Результати. Так як стрингер в вертикальному напрямку згинається як звичайна балка, а в горизонтальному розтягується як звичайний стрижень, отримаємо:

$$\frac{\partial u^{(1)}(y_1)}{\partial y_1} = \frac{1}{E_1 h} \int_{-\infty}^{y_1} [2q(t) - Q_0 \delta(t)] dt, \quad (-\infty < y_1 < \infty) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v^{(i)}(y_i)}{\partial y_i} = 0 \quad \forall y_i \in (-\infty < y_i < \infty) \quad (2)$$

За умови повного контакту слід відмітити, що по лінії контакту мають виконуватись умови :

$$\frac{\partial v^{(1)}(y_1)}{\partial y_1} = \frac{\partial u_2^{(2)}(y_1)}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial u^{(1)}(y_1)}{\partial y_1} = \frac{\partial u_1^{(2)}(y_1)}{\partial y_1}, \quad (-\infty < y_1 < \infty) \quad (3)$$

де $u^{(1)}(y_1)$, $v^{(1)}(y_1)$ - компоненти вектора переміщень в пружному стрингері, $u_1^{(2)}(y_1)$, $u_2^{(2)}(y_1)$ - компоненти вектора переміщень в пружних смугах з початковими напруженнями.

Враховуючи контактні умови (3) разом з (1), (2), а також вирази для вертикальних і горизонтальних переміщень граничних точок вільних від заземлення, отримаємо

$$\begin{aligned} u_1(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1 - t|) p(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(y_1 - t) q(t) dt. \\ u_2(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(y_1 - t) p(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1 - t|) q(t) dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Врахувавши (1)-(4) відносно невідомих контактних напружень $p(t)$, $q(t)$, отримаємо наступну систему інтегро-диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy_1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1 - t|) p(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(y_1 - t) q(t) dt \right] &= 0 \\ \frac{d}{dy_1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(y_1 - t) p(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1 - t|) q(t) dt \right] &= \int_{-\infty}^{y_1} [2q(t) - Q_0 \delta(t)] dt, \end{aligned} \quad (5)$$

де h_{ij} ($i, j = 1, 2$) – функції впливу для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями, вирази яких задаються [2]. В подальшому система зводиться до системи алгебраїчних рівнянь відносно трансформант Фур'є і розв'язується в замкнутому вигляді.

Висновки. В загальному випадку при рівних і нерівних коренях визначального рівняння (1) для розглядуваного в рамках лінеаризованої теорії класу задач сформульовано загальний метод їх розв'язування, що дає можливість отримати розв'язок поставлених задач, якщо відомий розв'язок аналогічних лінійних (без початкових напружень) задач. Контактні напруження по лінії контакту з стрингером суттєво залежать від початкових напружень. Більш суттєвий вплив кількісного характеру початкових напружень проявляється у високо еластичних матеріалах порівняно з більш жорсткими матеріалами. Якісний вплив має аналогічний характер.

При наближенні початкових напружень до значення, що відповідає поверхневої нестійкості, виникають явища «резонансного» характеру, які полягають в тому, що напруження і переміщення в області контакту різко змінюють свої величини, а пружні смуги з початковими напруженнями перебувають в стані нейтральної рівноваги.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь, А.Н. Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями / А.Н. Гузь, С.Ю. Бабич, В.Б. Рудницький. - К.: Вища школа, 1995. – 305с.
2. Дихтярук, Н.Н. О равновесии полосы с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками / Н.Н. Дихтярук // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40, № 3. – С. 63 – 70
3. Melan, E. Theorie geschweiss der Verbindungen / E. Melan, Ein Beitrag zur // Ingenieur Archiv. – 1932. - Bd. 3, Negt 2. - S 126-128.

47. СТРУМ ПРОВІДНОСТІ В ЕЛЕКТРОДНИХ ПОКРИТТЯХ ДИСКОВОГО П'ЄЗОПЕРЕТВОРЮВАЧА НА РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАННЯХ

**Володимир Андрущенко, Олександр Борисейко,
Ігор Улітко**

*Київський національний університет імені
Тараса Шевченка*

Вступ. Задачі математичного моделювання спряжених електропружних процесів в твердих тілах з п'єзоелектричним ефектом [1] складають актуальний науковий напрямок в сучасних розробках п'єзоактивних МЕМС сенсорів та актуаторів [2]. Оскільки в п'єзоактивних МЕМС передбачається реалізація кількох різних режимів електромеханічного навантаження на одному й тому ж елементі за рахунок його складної структури з багатоелектродним покриттям, то питання розрахунку таких не традиційних характеристик, як струм провідності в електродних покриттях тіла [3] та індуковане ним магнітне поле набувають принципової ваги. Зазначимо, що струм провідності в електродних покриттях генерується не зовнішніми джерелами електричної енергії, а зміщеними електричними зарядами в матеріалі п'єзоелектрика на динамічній деформації. Цей суто «п'єзоелектричний» струм має складний неоднорідний геометричний розподіл, який визначається напруженим станом у об'ємі тіла. Індуковане ним просторове магнітне поле також відтворює НДС п'єзoeлемента.

Методи та результати. Найпростіша математична реалізація висловлених положень уже досягається в моделі планарних осесиметричних коливань дискової пластини радіуса a , поляризованої по товщині $2h$, з суцільними електродними покриттями лицевих граней $S^\pm$ у випадку механічного збудження гармонічних коливань однорідними радіальними напруженнями $\sigma_r = \sigma_0 \exp(i\omega t)$ на контурі $r = a$ з розімкненим зовнішнім електричним колом, $I(t) = -d/dt \iint_{S^+} D_z dS = 0$. Розв'язок крайової задачі електропружності для амплітуд основних характеристик поля: переміщень u_r , напружень σ_r, σ_θ та товщинної компоненти електричної індукції D_z подається співвідношеннями

$$\frac{u_r}{a} = \frac{(\sigma_0 s_{11}^E)(1-\nu^2)}{\Delta_1(\alpha a)} J_1(\alpha r), \quad \alpha = \frac{\omega}{c}, \quad c = [\rho s_{11}^E(1-\nu^2)]^{\frac{1}{2}}, \quad \nu = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E},$$

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_0} = \left(\frac{a}{r}\right) \frac{(\alpha r)J_0(\alpha r) - (1-\nu)J_1(\alpha r)}{\Delta_1(\alpha a)} + (1+\nu) \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \frac{J_1(\alpha a)}{\Delta_1(\alpha a)},$$

$$\frac{\sigma_\theta}{\sigma_0} = \left(\frac{a}{r}\right) \frac{\nu(\alpha r)J_0(\alpha r) + (1-\nu)J_1(\alpha r)}{\Delta_1(\alpha a)} + (1+\nu) \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \frac{J_1(\alpha a)}{\Delta_1(\alpha a)},$$

$$D_z = d_{31}(\sigma_r + \sigma_\theta) - \frac{\varepsilon_{33}^T}{2d_{31}} \frac{k_p^2}{1-k_p^2} \frac{1}{S^+} \iint_{S^+} \operatorname{div} \mathbf{u} dS = \frac{d_{31}\sigma_0(1+\nu)}{\Delta_1(\alpha a)} [(\alpha a)J_0(\alpha r) - 2J_1(\alpha a)],$$

$$\Delta_1(\alpha a) = \Delta(\alpha a) + (1 + \nu) \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} J_1(\alpha a), \quad \Delta(\alpha a) = (\alpha a) J_0(\alpha a) - (1 - \nu) J_1(\alpha a), \quad (1)$$

де α – хвильове число, c – планарна швидкість акустичних хвиль, ν – коефіцієнт Пуассона, $k_p^2 = (2d_{31}) / [(1 - \nu)s_{11}^E s_{33}^T]$ – планарний КЕМЗ, s_{11}^E, s_{12}^E – пружні податливості, ρ – густина, d_{31} – п'єзомодуль ε_{33}^T – діелектрична проникливість матеріалу.

Розрахунок радіальної компоненти струму провідності $\mathbf{j} = \mathbf{e}_r j_r$ в електродних покриттях диска, згідно з [3], зводиться до розв'язування крайової задачі Неймана для рівняння Пуассона для невідомої функції потенціалу електричного струму Φ

$$j_r = \frac{d\Phi}{dr}, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) = i\omega D_z, \quad j_r|_{r=a} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0, \quad (2)$$

де визначена в (1) компонента D_z несе в собі вичерпну інформацію про НДС диску.

Так, на верхньому електродному покритті $z = +h$ маємо

$$j_r^+ = \frac{i\omega}{r} \int_0^r D_z r dr = i\omega \frac{(1 - \nu)d_{31}\sigma_0 a}{\Delta_1(\alpha a)} \left(J_1(\alpha r) - \frac{r}{a} J_1(\alpha a) \right) \quad (3)$$

та протилежний за знаком вираз на нижньому електроді $z = -h$. Роз'язок (3) суттєво відрізняється від виразу для струму зміщення у об'ємі диска

$$j_z = i\omega D_z = i\omega \frac{(1 + \nu)d_{31}\sigma_0}{\Delta_1(\alpha a)} [(\alpha a) J_0(\alpha r) - 2J_1(\alpha a)], \quad 0 \leq r \leq a, -h \leq z \leq h, \quad (4)$$

Під час розрахунку магнітного поля, індукованого обома струмами j_r та j_z , за рахунок осової симетрії, ненульовою виявилася лише кругова компонента $\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi H_\varphi$

$$H_\varphi = i\omega \frac{(1 + \nu)d_{31}\sigma_0 a}{\Delta_1(\alpha a)} \left(J_1(\alpha r) - \frac{r}{a} J_1(\alpha a) \right) \quad 0 \leq r \leq a, -h \leq z \leq h, \quad (5)$$

тобто магнітне поле (5) є цілком локалізованим всередині об'єму диска.

Висновки. З точних розв'язків (1), (3), (5) видно, що струм провідності j_r та магнітне поле H_φ не відтворюють поведінку радіальних переміщень u_r , а відрізняються від них на величину, пропорційну $r \cdot J_1(\alpha a) / a$. Тобто, розподіли нормальних мод коливань та такі ж розподіли полів j_r та H_φ будуть різними. Наприклад, на третьому резонансі $(\alpha a)_R^{(3)} = 8.5815$ вузлові кола переміщень u_r / a розміщуються при $r_1 = 0.44a$ та $r_2 = 0.81a$, а магнітне поле H_φ та струм провідності j_r обертаються в нуль при $r_1^* = 0.41a$ та $r_2^* = 0.94a$. На нашу думку цей факт слід враховувати під час точного розрахунку багатоелектродних п'єзоактивних МЕМС, наприклад, при вирішенні питань поділу електродного

покрыття п'єзоелемента при керованому підводі електричного поля для підсилення або пригнічення нормальних мод коливань.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гринченко, В.Т. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К.: Наукова думка, 1989. – 280 с.
2. Bao, M.-H. Micro mechanical transducers: pressure sensors, accelerometers and gyroscopes. Handbook of sensors and actuators / M.-H. Bao. – Amsterdam: Elsevier, – 2004. – 371 p.
3. Андрущенко, В.А. Ток проводимости в электродных покрытиях деформируемых пьезокерамических тел. / В.А. Андрущенко., Я.В. Крысак., А.Ф. Улитко // Докл. АН УССР. Сер. А., – 1989. – № 11. – С. 33-37.

48. SOME REMARKS ON HALL ALGEBRA OF BOUND QUIVER

Kostiantyn Iusenko

Institute of Mathematics and Statistics, USP, São Paulo, Brazil

Let Q be a quiver, g be a symmetric Kac-Moody algebra associated with Q , and $Rep_Q(q)$ be the category of finite-dimensional representations of Q over a field F_q . In his remarkable papers [1,2] C. Ringel proved that if Q is a Dynkin quiver then there exists an isomorphism between the Hall algebra associated with $Rep_Q(q)$ and the positive part of quantized universal enveloping algebra $U_i(g)$ with $t^2 = q$.

We consider the case of a bound quiver Q assuming that the global dimension of Q is at most 2. To each such quiver we associate an associative algebra $U_q(Q)$ given by relations and generators. In the case when Q is a representation-directed we show that there exists an isomorphism between $U_q(Q)$ and the corresponding twisted Hall algebra of $Rep_Q(q)$.

As the limiting case of this construction we also study representations of commutative quivers over the so-called field with one element: F_1 . Such a field is not defined per se, but there is agreement on what should be the definition and basic properties of the category of vector spaces over F_1 as a limiting case of the categories of vector spaces over F_q (see for example [3]). Following the ideas of M. Szczesny we show that the category $Rep_Q(F_1)$ has enough structure to define its Hall algebra and prove that there exists an epimorphism $U_1(Q) \rightarrow H_{Rep_Q(F_1)}$.

Based on joint work [4] with Evan Wilson.

REFERENCES

1. Ringel, C. M. From representations of quivers via Hall and Loewy algebras to quantum groups. Proceedings Novosibirsk Conference 1989, Contemporary Mathematics 131, (Part 2): P. 381–401.

2. Ringel C. M. Hall algebras and quantum groups. Invent. Math. 1990, 101, No. 3. - P. 583–591.

3. Szczesny M. Representations of Quivers Over F_1 and Hall Algebras. International Mathematics Research Notices. 2012, No. 10. - P. 2377–2404.

4. Iusenko K. and Wilson E. Some remarks on Hall algebra of bound quiver. SP Journal of Mathematical Sciences. 2014, 8, No. 1. - P. 83–94.

49. ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ РІВНІВ ОДНОГО КЛАСУ НЕПЕРЕРВНИХ НІДЕ НЕ МОНОТОННИХ ФУНКЦІЙ, ПОВ'ЯЗАНИХ З ДВІЙКОВИМ ЗОБРАЖЕННЯМ ЧИСЕЛ

Олег Жабровець, Ірина Лисенко

*Національний педагогічний університет імені
М.П. Драгоманова*

Вступ. Сьогодні серед актуальних об'єктів дослідження в галузі математичного аналізу і теорії функцій зі складною локальною будовою є неперервні функції, що не мають жодного як завгодно малого проміжку монотонності (їх називають ніді не монотонними). Це дещо ширший клас, ніж клас неперервних недиференційованих функцій. Хоча уже останні у просторі неперервних на $[0,1]$ функцій з неперервною метрикою є множиною другої категорії Бера (теорема Банаха-Безиковича, 1931 р.).

Засоби фрактального аналізу та фрактальної геометрії дозволяють проводити аналіз глобальних і локальних властивостей ніді не монотонних функцій, зокрема фрактальних властивостей їхніх рівнів та графіків. Такі функції використовуються при моделюванні антен, в теорії передачі сигналів та ін.

Доповідь присвячена одній з таких функцій, яка є ніді не монотонною і має ряд автомодельних властивостей.

Методи. Дієсно відомо, що доцільне число $x \in [0;1]$ можемо подати у двійковій системі числення рядом

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \dots \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2,$$

де $\alpha_n \in A_2 = \{0,1\}$, скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2$ кого називається двійковим зображенням.

Після перекодування

$$x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2 = \Delta_{\underbrace{1\dots 1}_{a_1} \underbrace{01\dots 10}_{a_2} \dots \underbrace{1\dots 1}_{a_n} 0\dots}^2 \equiv \bar{\Delta}_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^2,$$

де $a_n \in Z_0 = \{0,1,\dots,n,\dots\}$, отримуємо зображення $\bar{\Delta}_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^2$ того числа у системі з нескінченним алфавітом $A = Z_0$, яке називається $\bar{\Delta}^2$ -зображенням. Зауважимо, що кожна точка півінтервалу $[0;1)$ має єдине $\bar{\Delta}^2$ -зображення, тобто саме

кодування має екстранульову надлишковість, а тому її цифри $a_n = a_n(x)$ є функціями числа, що зображається.

Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ називається

$$\bar{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^2 = \{x : a_i(x) = c_i, i = \overline{1, m}\}.$$

Циліндр є відрізком, довжина якого обчислюється за формулою:

$$\left| \bar{\Delta}_{a_1 a_2 \dots a_n}^2 \right| = \frac{1}{2^{a_1 + a_2 + \dots + a_n + n}}.$$

Розглядається дійсно членний нормований числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right) = 1, \text{ тобто } u_0 = \frac{1}{2}, \quad u_{3n-2} = \frac{1}{2^n} = u_{3n}, \quad u_{3n-1} = -\frac{1}{2^n},$$

$$u \in N.$$

$$S_0 \equiv 1, \quad S_1 \equiv u_0 = \frac{1}{2}, \quad S_m \equiv u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2^n} & \text{при } m = 3n - 2, \quad n \in N; \\ 1 - \frac{1}{2^{n-1}} & \text{при } m = 3n - 1, \quad n \in N; \\ 1 - \frac{1}{2^n} & \text{при } m = 3n, \quad n \in N. \end{cases}$$

Тоді

Основним об'єктом дослідження є визначена на $[0; 1]$ функція

$$f(x) = f(\bar{\Delta}_{a_1(x) a_2(x) \dots a_n(x) \dots}^2) = S_{a_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} (S_{a_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} u_{a_j(x)}) \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^*.$$

Доозначимо її в точці $x=1$, поклавши $f(1)=1$.

Результати. Теорема 2. Функція $f(x)$ є

- неперервною в кожній точці відрізка $[0; 1]$;
- набуває всіх значень з відрізка $[0; 1]$;

• найбільшого і найменшого значення на циліндрі n -го рангу $\bar{\Delta}_{a_1 a_2 \dots a_n}^2$ вона набуває на його кінцях, причому її приріст обчислюється за формулою:

$$\mu_f(\bar{\Delta}_{a_1 a_2 \dots a_n}^2) = \prod_{j=1}^n u_{a_j};$$

- ніде не монотонною.

Теорема 3. Якщо $x - \bar{\Delta}^2$ – раціональна точка, тобто $x = \bar{\Delta}_{a_1 a_2 \dots a_n}^2(0)$, множина

$P_x = f^1(f(x))$ є скінченною; де P_x – рівень функції f , породжений точкою x .

Якщо $x - \bar{\Delta}^2$ – ірраціональна точка, то рівень P_x – континуальний.

У доповіді пропонується опис тополого-метричних властивостей всіх рівнів функції f .

Теорема 4. Графік Γ функції $f \in N$ -самоподібною множиною зі структурою:

$$\Gamma = \bigcup_{i=0}^{\infty} \phi_i(\Gamma), \text{ де } \phi_i - \text{афінне перетворення.}$$

Висновки. У доповіді пропонується результати дослідження диференціальних та інтегральних властивостей функції f .

ЛІТЕРАТУРА

1. Працьовитий, М.В. Геометрія дійсних чисел у їх кодуваннях засобами нескінченного алфавіту як основа топологічних, метричних, фрактальних і ймовірнісних теорій / М. В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки, 2013.– №14. - С. 189-216.

2. Працьовитий, М.В. Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел / М. В. Працьовитий – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. – 68 с.

50. РОЗПОДІЛ ЗНАЧЕНЬ ОДНІЄЇ ФРАКТАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ, ПОВ'ЯЗАНОЇ З ДВІЙКОВИМ ЗОБРАЖЕННЯМ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Софія Ратушняк

*Національний педагогічний університет імені
М.П. Драгоманова*

Вступ. Засоби теорії фракталів дозволяють проводити фрактальний аналіз локальних і глобальних властивостей функцій з нетривіальною локальною будовою. Це детальне вивчення властивості області визначення, множини значень, множин рівнів та множин особливостей функцій, а також самоподібні, самоафінні і автомодельні властивості їхніх графіків. Для функції розподілу випадкової величини це властивості спектра, носіїв та множин недиференційовності. Розподіл значень неперервних функцій з фрактальними властивостями від випадкового аргумента часто має складні властивості, породженні нетривіальними властивостями аргумента або ж самої функції. Ще більш складною є динаміка породжена ніде не монотонними функціями, зокрема неперервними.

У доповіді пропонується результати дослідження розподілу значень однієї фрактальної функції з випадковим аргументом, розподіл якого наперед заданий. Сама функція визначена в термінах двійкової системи числення, а аргумент є випадковою величиною з незалежними однаково та різнорозподіленими двійковими цифрами. Детальний аналіз тополого-метричних і фрактальних властивостей функції став основою для структурного опису (лебегівської структури та спектральної струтури) і дослідження властивостей розподілу її значень.

Об'єкт і методи дослідження. На піввідрізку $[0;1)$ розглядається функція f , яка числу

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \frac{a_4}{2^4} + \dots + \frac{a_{2k-1}}{2^{2k-1}} + \frac{a_{2k}}{2^{2k}} + \dots = \Delta_{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{2k-1} a_{2k} \dots}^2, \quad a_k \in A = \{0; 1\}, k \in \mathbb{N}$$

ставить у відповідність число $y = f(x) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k \dots}^2$, де $\beta_k = a_{2k-1} a_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Дана функція є не коректно визначеною в двійково-раціональних точках, оскільки значення її від різних представлень x , тобто точках виду $\Delta_{a_1 \dots a_{m1}(0)}^2 = \Delta_{a_1 \dots a_{m0}(1)}^2$, не співпадають. Тому надалі домовимося не використовувати зображення аргумента з періодом (1).

Нехай X — випадкова величина з незалежними двійковими цифрами, така що

$$x = \frac{\eta_1}{2} + \frac{\eta_2}{2^2} + \frac{\eta_3}{2^3} + \frac{\eta_4}{2^4} + \dots + \frac{\eta_{2k-1}}{2^{2k-1}} + \frac{\eta_{2k}}{2^{2k}} + \dots = \Delta_{\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \dots \eta_{2k-1} \eta_{2k} \dots}^2,$$

де η_k - незалежні випадкові величини, які набувають значень 0 та 1 і мають розподіли $P\{\eta_k = i\} = p_{ik} \geq 0$, $p_{1k} = 1 - p_{0k}$.

Основним об'єктом дослідження є розподіл значень функції $Y = f(X)$ від випадкової величини X , тобто

$$Y = f(X) = \frac{\xi_1}{2} + \frac{\xi_2}{2^2} + \dots + \frac{\xi_k}{2^k} + \dots = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k \dots}^2,$$

Результати. Теорема 1. Функція $y = f(x)$ володіє такими властивостями:

- 1) Область визначення: $D(y) = [0; 1]$.
- 2) Множина значень: $E(y) = [0; 1]$.
- 3) Множиною нулів функції є множина

$$Q = \{x : (a_{2k-1}(x), a_{2k}(x)) \in \{(0, 0); (0, 1); (1, 0)\}\}.$$

- 4) Графік функції

$$\Gamma_f : \{M(x, y) : x = \Delta_{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{2k-1} a_{2k}}^2, y = \Delta_{[a_1 a_2][a_3 a_4] \dots [a_{2k-1} a_{2k}] \dots}^2\}$$

$y = f(x)$ є самоподібною множиною з такою структурою:

$$\Gamma_f = \Gamma_{00} \cup \Gamma_{01} \cup \Gamma_{10} \cup \Gamma_{11},$$

де множини $\Gamma_{00} : \{(x, y) : a_1(x) = 0, a_2(x) = 0, y = f(x)\}$

$$\Gamma_{10} : \{(x, y) : a_1(x) = 1, a_2(x) = 0, y = f(x)\}$$

$$\Gamma_{01} : \{(x, y) : a_1(x) = 0, a_2(x) = 1, y = f(x)\}$$

$$\Gamma_{11} : \{(x, y) : a_1(x) = 1, a_2(x) = 1, y = f(x)\}$$

подібні всьому графіку з коефіцієнтом подібності $k = 4$.

- 5) Функція $y = f(x)$ є всюди розривною.

- 6) Функція f є інтегрованою за Лебегом і має місце рівність

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$$

Теорема 2. Випадкова величина $Y = f(X) = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k \dots}^2$ є випадковою величиною з незалежними двійковими цифрами, які набувають значень 0 і 1 з ймовірностями

$$p'_{ok} = p_{o(2k-1)}p_{o(2k)} + p_{1(2k-1)}p_{0(2k)} + p_{o(2k-1)}p_{(2k)}, \quad p'_{1k} = 1 - p'_{ok}$$

Наслідок 1. Випадкова величина $Y = f(X) = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k \dots}^2$ при однаковій розподіленості двійкових цифр випадкової величини X є випадковою величиною з незалежними однаково розподіленими двійковими цифрами, які набувають значень 0 і 1 з ймовірностями $p'_0 = p_0^2 + 2p_0p_1$, $p'_1 = 1 - (p_0^2 + 2p_0p_1) = p_1^2$ відповідно, тобто при $p_{ok} = p_o, p_{1k} = p_1$.

Наслідок 2. Розподіл випадкової величини Y має чистий лебегівський тип.

Теорема 3. Випадкова величина $Y = f(X)$ є:

- 1) випадковою величиною, що має сингулярно неперервний розподіл, якщо X є рівномірно розподіленою випадковою величиною;
- 2) випадковою величиною, що має рівномірний розподіл, якщо X є сингулярно неперервна випадкова величина, причому $p'_{ok} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$, $p'_{1k} = 1 - p'_{ok}$;
- 3) випадковою величиною з незалежними двійковими цифрами, які мають розподіли:

$$p'_{1k} = \frac{1}{(1 + e^{\frac{\beta}{2^{2k-1}}})(1 + e^{\frac{\beta}{2^{2k}}})}, \quad p'_{ok} = 1 - p'_{1k}$$

(це можливо, коли X має експоненційний розподіл з параметром β).

Наслідок. Розподіл випадкової величини Y є чисто неперервним, причому переважна більшість розподілів випадкової величини Y є сингулярно неперервними.

Теорема 4. Випадкова величина $Y = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k \dots}^2$ має чистий лебегівський тип розподілу, причому:

- чисто дискретний – тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max \{p'_{ok}, p'_{1k}\} > 0;$$

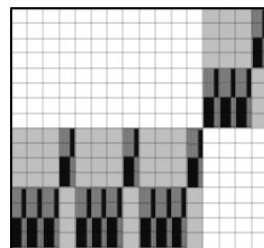
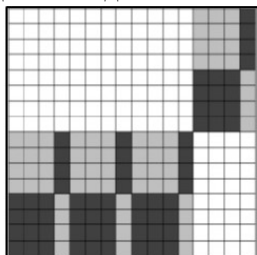
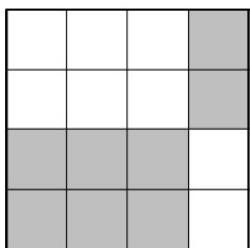
- абсолютно неперервний – тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - 2p'_{ok})^2 < 0;$$

- сингулярно неперервний в решті випадках.

Висновки. Розподіли значень функцій випадкових аргументів є непротим об'єктом для дослідження, якщо функція має складні локальні властивості,

наприклад, є ніде не монотонною, недиференційовною або такою, що має фрактальні рівні. Одній з таких, пов'язаній з двійковим зображенням числа, присвячена дана доповідь. Добре вивчена геометрія двійкового зображення дала вичерпну відповідь про розподіли випадкових величин.



ЛІТЕРАТУРА

1. Барановський, О.М. Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їхні застосування / О.М. Барановський, М.В. Працьовитий, Г.М. Торбін – Київ: НВП «Виробництво «Наукова думка» НАН України», 2013. – 286 с.
2. Працьовитий, М. В. Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел / М. В. Працьовитий – Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. – 68 с.
3. Працьовитий, М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М.В. Працьовитий – Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

51. SUPERINTEGRABLE SYSTEMS WITH POSITION DEPENDENT MASS

Tetiana Zasadko

Taras Shevchenko National University of Ukraine

Introduction. Schrödinger equations are perfect subjects for demonstration of the richness and profundity of the conception of symmetry. In addition to symmetries with respect to continuous groups, they admit supersymmetries and hidden symmetries like the Fock symmetry of the Hydrogen atom. Moreover, just Schrödinger equations belong to the nice field of the inverse problem approach with its infinite number of symmetries and constants of motion. The task was to start a systematic investigation of integrable and superintegrable systems with position dependent mass. The first step was classified PDM Schrödinger equations which admit the first order integrals of motion.

Methods. We consider a stationary PDM Schrödinger equation.

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad (1)$$

where H is the following generic Hamiltonian

$$\hat{H} = -\partial_a f(x) \partial_a - V(x). \quad (2)$$

Here $x = (x_1, x_2, x_3)$, $V(x)$ and $f(x) = \frac{1}{m(x)}$ are arbitrary functions associated with the effective potential and inverse effective PDM, and summation from 1 to 3 is imposed over the repeating index a . We will search for first order integrals of motion

for equation (1) i.e., for commuting with H differential operators of first order which we write in the form:

$$Q = -i(\xi^2 \partial_a + \mu) \quad (3)$$

where μ are functions of x .

We see that the required integrals of motion should belong to algebra $c(3)$. To obtain a non-trivial equation (1) it is necessary to impose some constraints on these parameters and reduce the algebra $c(3)$ to some of its subalgebra (the first order integrals of motion have to form a Lie algebra (5)). The optimal system of such subalgebras can be defined up to the group of internal isomorphisms of group $C(3)$.

It was conjectured earlier that all maximally superintegrable systems with two degrees of freedom are exactly solvable, and till now there are no counterexamples for this conjecture. For 3d systems the connections between superintegrability and exact solvability is much more complicated.

Results. Shown that the maximally superintegrable PDM systems admitting first order integrals of motion are exactly solvable too, and find the corresponding exact solutions explicitly. PDM Schrödinger equations which admit the first order integrals of motion was classified. Some of these equations have unusual symmetries being invariant w.r.t. the Lie algebra of Lorentz group $SO(1,3)$ and w.r.t. the Lie algebra of group $SO(1,2)$. These "relativistic aspects" of the PDM Schrödinger equations are rather inspiring.

The equivalence group of our classification problem is the 3d conformal group whose generators are defined by equation (1). Using this group any of the presented system can be propagated to an entire family of equations.

Conclusions. It was shown that there exist seventeen non-equivalent classes of PDM Schrödinger equations with non-trivial integrals of motion. Among them there are superintegrable systems invariant with respect to the Lie algebra of Lorentz group and group $SO(4)$. We present solutions of these systems which appears to be exactly solvable. Moreover, the spectra of the related Hamiltonians can be found algebraically like in the case of the Hydrogen atom.

REFERENCES

1. Hagen, C. R. Scale and conformal transformations in Galilean-invariant conformal field theory" / C. R. Hagen // Phys. Rev. D 5. - 1972. - P. 377-388.
2. Niederer, U. The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equations / U. Niederer // Helv. Phys. Acta. - 1972. - Vol. 45. - P. 802-810.
3. Anderson, R. L Invariants of the equations of wave mechanics. I. / R. L. Anderson, S. Kumei, C. E. Wulfman // Rev. Mex. Fis. - 1972. - Vol. 21. - P. 1-33.
4. Boyer, C. P The maximal kinematical invariance group for an arbitrary potential / C.P. Boyer // Helv. Phys. Acta. - 1974. - Vol. 47. - P. 450-605.
5. Miller, W. Symmetry and separation of variables / W. Miller. - Cambridge University Press, 1984.

52. IMPORTANCE OF LYAPUNOV'S FUNCTION FOR THE EXISTENCE OF INVARIANT SETS OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL AND CORRESPONDING DIFFERENCE EQUATIONS

Alla Tkachuk

National University of Food Technologies

Iryna Semenishina

Podilsky State Agrarian Technical University

Introduction. Important results about existence invariant sets of differential systems in terms of zeros of non-negative Lyapunov's functions have been obtained by mathematicians. Later these outcomes were generalized and developed for the various classes of systems, for example, such as systems of non-autonomous differential equations and equations with random disturbance. There was proved that zeros of some non-negative defined Lyapunov's function $V(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in D \subset R^m$ are an invariant set, if their projection on R^n is compact in D and the derivative with respect to the system of the function $V(t, x)$ is non-positive defined.

Also there was researched whether an existence of non-negative defined Lyapunov's function, whose derivative with respect to the system is non-positive, is necessary for existence and stability of invariant sets.

The main idea of this work is getting of analogous results but for systems of difference equations. Besides it, a connection between invariant sets of differential and corresponding difference equations in terms of zeros of positive Lyapunov's functions is researched.

Methods. Authors applied methods of researching of differential and corresponding difference equations in terms of Lyapunov's functions of constant signs.

Results. We consider a system of differential equations of the following form

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \quad (1)$$

and its corresponding system of difference equations

$$x_{n+1} = x_n + X_n(x_n), \quad (2)$$

where $n \geq 0$, $x \in D \subset R^m$, $h=1$ is a step of the difference equation,

$$x_n = x_n(t_0 + n), \quad x_0(t_0) = x_0.$$

The function $X_n(x) = X(n, x)$ is defined for $x \in D$, $n \geq 0$, it is continuous and lipshitseva with respect to x . Let $M \subset Z^+ \times R^m$, M_{n_0} is a section of M by a plane $n = n_0$, $n_0 \in Z^+$.

Definition. A set $M \subset D$ is said to be a positive invariant set of system (2), if its solution $x_n(x)$, such that $x_n(x_0) \in M_{n_0}$, has the following property:

$$x_n(x) \in M_n \text{ for } n \in Z^+.$$

Definition. A positive invariant set M of system (2) is said to be stable for $n \geq n_0$, if for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta = \delta(\varepsilon, n) > 0$, such that $\rho(x_{n_0}, M_{n_0}) < \delta$ implies

$$\rho(x_n(x), M_n) < \varepsilon \text{ for } n \in Z^+.$$

Definition. Let a function $V(x)$ be defined in $\overline{D_1}$. It is said to be ϕ function of a constant sign in D_1 , if non-zero values of $V(x)$ have the same sign for all $x \in D_1$.

Theorem 1. Let system (2) has a positively invariant, uniformly stable manifold M for $n \geq 0$, $x \in D$ and its projection $\text{Proj}_{R^m} M$ is compact in D . Then there exists a sequence of functions $V_n(x)$ in some neighborhood D_1 of M with properties:

1) $V_n(x)$ is positively defined uniformly with respect to $n \geq 0$:

$$\inf_{k \geq 0; x: \rho(x, M_k) > \varepsilon} V_k(x) = V_\varepsilon > 0 \text{ for any } \varepsilon > 0 \quad (3)$$

2) $\Delta V_n(x)$ is non-positively defined:

$$\Delta V_n(x) = V_{n+1}(x_{n+1}) - V_n(x_n) \leq 0 \text{ for } n \geq 0, x \in D_1;$$

3) a set of zeros of $V_n(x)$ coincides with M , that is

$$M = \{(n, x_n) : V_n(x) = 0, n \geq 0, x \in D\}.$$

Assume that functions $V_h(x) \in C^1(D_1)$ for each $0 < h < h_0$ and for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta(\varepsilon) > 0$, such that $\|V_h(x') - V_h(x'')\| < \varepsilon$, if $|x' - x''| < \delta$, $x', x'' \in D_1$, $\forall h \leq h_0$.

In this case, the result about a connection between invariant sets of differential and corresponding difference equations can be expressed in the following theorem.

Theorem 2. Let a set of zeros of $V_h(x)$ is not empty and compact in D_1 and $\Delta V_h(x)$ is of constant signs in D_1 , such that

$$\Delta V_n(x) = V_{n+1}(x_{n+1}) - V_n(x_n) \leq 0.$$

Assume that $V_h(x)$ uniformly converges with respect to x (as $h \rightarrow 0$) to $V(x) \in C^1(D_1)$ and the set of zeros $N_0(h)$:

$$V_h(x) = 0, \quad x \in D_1$$

is uniformly separated with respect to h from a bound of the region ∂D_1 , that is, there exists a step $h_0 > 0$ and a number $\gamma > 0$, such that

$$\rho(N_0(h), \partial D_1) > \lambda, \quad \forall h \leq h_0.$$

Then a system of differential equations has an invariant set, if sings of $V_h(x)$ and $\Delta V_h(x)$ are different.

Corollary. If in the theorem, instead of the following conditions:

a) for any $\varepsilon > 0$ there exists $\delta(\varepsilon) > 0$, such that

$$\|V_h(x') - V_h(x'')\| < \varepsilon, \text{ if } |x' - x''| < \delta, \quad x', x'' \in D_1, \quad \forall h \leq h_0,$$

b) uniform convergence of $V_h(x)$ with respect to x .

We will write down these ones:

1) functions $V_h(x)$ are uniformly bounded, that is

$$\exists C_1 > 0 : \|V_h(x)\| \leq C_1, \quad \forall h \leq h_0, \quad \forall x \in \bar{D}_1,$$

2) here exist constants $C_2 > 0, C_3 > 0$ such that

$$\left\| \frac{\partial V_h(x)}{\partial x} \right\| \leq C_2, \quad \left\| \frac{\partial^2 V_h(x)}{\partial x^2} \right\| \leq C_3, \quad \forall h \leq h_0, \quad \forall x \in \bar{D}_1.$$

Then the statement of the theorem will stay true.

The main result of our researching is a study of an inverse problem, that is, we will obtain conditions of existence and stability of an invariant set for a system of difference equations in terms of constant signs Lyapunov's functions of a system of differential equations.

We consider an autonomous system of differential equations of the following form

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \quad (4)$$

and its corresponding system of difference equations

$$x_{n+1} = x_n + hX(x_n), \quad (5)$$

where $n \geq 0, x \in D \subset R^m, h > 0$ is a step of the difference equation, the function $X(x)$ is bounded and lipshitseva in D . In this case the following theorem is true.

Theorem 3. Assume that a positively defined smooth function $V = V(x)$ exists, in addition, $\frac{\partial V}{\partial x}$ is lipshitseva and $\dot{V} = \dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} X(x)$ is a non-positively defined function in D .

Then system (5) has a positively invariant stable set, if signs of functions $V(x)$ and $\dot{V}(x)$ are different.

REFERENCES

1. Ткачук, А. М. Зв'язок між інваріантними множинами систем диференціальних та відповідних різницевих рівнянь / А. М. Ткачук // Нелінійні коливання. т. 9, № 2 – 2006. - 280 – 285 с.
2. Ткачук, А. М. Інваріантні множини різницевих систем та їх стійкість / А. М. Ткачук // Нелінійні коливання. т. 8, № 2 – 2005. - 258 – 264 с.
3. Ткачук, А. М. Дослідження інваріантних множин різницевих рівнянь за допомогою функцій Ляпунова / А. М. Ткачук, Т.В. Добродзій // Вісник Київського університету. Випуск №3. – 2008. - 95 – 98 с.
4. Романко, В. К. Разностные уравнения. Учебное пособие. / В. К. Романко. Изд-во: Бином. Лаборатория знаний. – 2006. – 113с.

5. Бурд, В.Ш. Дискретное операторное исчисление и линейные разностные уравнения. Учебное пособие. / В.Ш. Бурд. ЯрГУ. - 2009. – 156 с.
6. Треногин, В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Учебник. / В.А. Треногин. ФИЗМАТЛИТ. 2014. – 312 с.
7. Агафонов, С. А. Дифференциальные уравнения. / С. А. Агафонов, А.Д. Герман, Т. В. Муратова. – МГТУ. 2004. – 348 с.
8. Демидович, Б. П. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. / Б.П. Демидович, В. П. Моденов. - 3-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань». 2008. – 288 с.
9. Бойков, И.В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений. / И.В. Бойков, – Пенза: Изд-во Пенз. гос. Ун-та. 2008. – 244 с.

53. АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ІНТЕГРАЛЬНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ МАРТИНГАЛЬНОГО ТИПУ ВІД НЕСТІЙКИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОВИМІРНИХ НЕОДНОРІДНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІТО

Світлана Кушніренко

*Київський національний університет імені
Тараса Шевченка*

Вступ. Нехай на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ визначений одновимірний вінерівський процес $W(t)$ відносно зростаючого, повного за мірою P потоку σ – алгебр $\sigma(W(s), s \leq t)$. Нехай дійсна функція $a(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ – вимірна і обмежена. Відомо, що стохастичне диференціальне рівняння Іто

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))dt + dW(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

має єдиний сильний розв'язок $\xi(t)$, $\xi(0) = x_0$ (див. [1], Теорема 4).

Припустимо, що для функції $a(t, x)$ додатково виконуються умови:

(A_1) існує вимірна функція $\hat{a}(x)$ така, що $|x\hat{a}(x)| \leq C$ і

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \sup_x |a(s, x) - \hat{a}(x)| ds = 0;$$

(A_2) існує стала c_0 така, що $2c_0 + 1 > 0$ і $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x} \int_0^x v \hat{a}(v) dv - c_0 \right] = 0$.

Означення 1.1. Розв'язок $\xi(t)$ рівняння (1) називається нестійким, якщо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P\{|\xi(s)| < N\} ds = 0$$

для довільної сталої $N > 0$.

При виконанні умов (A_1) і (A_2) розв'язок $\xi(t)$ рівняння (1) нестійкий (див. [2], Лема 2.2).

Означення 1.2. Важаємо, що сім'я процесів $\{\zeta_T(t), t \geq 0\}$ слабо збігається при $T \rightarrow \infty$ до процесу $\{\zeta(t), t \geq 0\}$, якщо для довільного $L > 0$ міри $\mu_T[0, L]$, які відповідають процесам $\zeta_T(\cdot)$ на відрізку $[0, L]$, слабо збігаються до міри $\mu[0, L]$, яка відповідає процесу $\zeta(\cdot)$.

За умов (A_1) і (A_2) процес $r_T(t) = T^{-\frac{1}{2}} |\xi(tT)|$ (параметр $T > 0$) при $T \rightarrow \infty$ слабо збігається до процесу $r(t)$ (див. [2], Лема 2.4), який є розв'язком стохастичного диференціального рівняння Іто

$$dr^2(t) = (2c_0 + 1)dt + 2r(t)d\hat{W}(t). \quad (2)$$

Процес $r(t)$ є бesselівським дифузійним процесом (див. [3]) із індексом $2c_0 + 1$ і перехідною щільністю

$$\rho(t, x, y) = \frac{1}{t(xy)^{\nu-1}} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right\} y^{2\nu-1} I_{\nu-1}\left(\frac{xy}{t}\right),$$

де $\nu = c_0 + \frac{1}{2}$, I_ν – модифікована бesselівська функція. Цей процес при $-1 < 2c_0 < 1$ з відбиттям у точці нуль, при $2c_0 \geq 1$ точка нуль для нього недосяжна.

Відомо (див. [4]), що асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь тісно пов'язана з граничною при $|x| \rightarrow \infty$ поведінкою функції

$$f(x) = \exp\left\{-2\int_0^x \hat{a}(u)du\right\}. \quad (3)$$

Позначимо Ψ – клас функцій $\psi = \psi(x) > 0, x \geq 0$ неспадних, регулярно змінних на нескінченності порядку $\alpha > 0$, тобто $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\psi(|x|T)}{\psi(T)} = |x|^\alpha$ для всіх $x \neq 0$.

Результати. Теорема 2.1. Нехай $\xi(t)$ – розв'язок стохастичного диференціального рівняння (1), де $a(t, x)$ – дійсна, обмежена, вимірна функція, $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$, що задовольняє умови (A_1) і (A_2) . Нехай також локально інтегровна з квадратом дійсна функція $g(x)$ є непарною і існують функції $\psi_i \in \Psi$ порядку $\alpha_i > 0, i = 1, 2$ відповідно і сталі b, C такі, що виконуються умови

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{\psi_1(|x|)} \int_0^x \frac{g^2(u)}{f(u)} du - b \operatorname{sign} x \right] = 0, \quad \left| \frac{f(x)}{\psi_2(|x|)} \int_0^x \frac{|g(u)|}{f(u)} du \right| \leq C, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\psi_2(\sqrt{T})}{\sqrt{\sqrt{T}\psi_1(\sqrt{T})}} = 0,$$

де $f(x)$ визначена в (3).

Тоді випадковий процес

$$\beta_T(t) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{T}\psi_1(\sqrt{T})}} \int_0^t g(\xi(s)) dW(s),$$

де процеси $\xi(t)$ і $W(t)$ пов'язані через рівняння (1) слабо (у рівномірній топології простору неперервних функцій) збігається при $T \rightarrow \infty$ до процесу $\beta(t) = W^*(\beta^{(1)}(t))$. Тут $W^*(t)$ – вінерівський процес,

$$\beta^{(1)}(t) = 2b \left[\frac{r^{\alpha_1+1}(t)}{\alpha_1+1} - \int_0^t r^{\alpha_1}(s) d\hat{W}(s) \right],$$

де процеси $r(t)$ і $\hat{W}(t)$ пов'язані через рівняння (2), $W^*(t)$ і $\beta^{(1)}(t)$ – незалежні.

Висновки. Досліджено асимптотичну поведінку при $T \rightarrow \infty$ нормованих відповідним чином функціоналів $I(tT)$, де $I(t) = \int_0^t g(\xi(s)) dW(s)$, $t \geq 0$, $\xi(t)$ – нестійкий розв'язок стохастичного диференціального рівняння (1). Для певного класу вказаних рівнянь знайдено нормуючий множник, що забезпечує слабку збіжність у рівномірній топології простору неперервних функцій нормованих випадкових процесів $\beta_T(t)$, та явний вигляд граничних процесів.

Наведений результат є продовженням досліджень роботи [6], у якій розглядалась поведінка при $t \rightarrow \infty$ функціоналу $I(t)$ від розв'язку рівняння типу (1) з однорідним коефіцієнтом переносу ($a(t, x) \equiv a(x)$). У роботах [5], [6] зроблено детальний огляд результатів інших авторів у цьому напрямку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Веретенников, А. Ю. О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений / А. Ю. Веретенников // Теория вероятностей и ее применения, т. XXIV, № 2 (1979), 348–360.
2. Кушніренко, С. В. Асимптотична поведінка функціоналів інтегрального типу від нестійких розв'язків одновимірних неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь Іто / С. В. Кушніренко // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика, №1-2 (2013), 95–101.
3. Кулініч, Г. Л. Асимптотичний аналіз нестійких розв'язків одновимірних стохастичних диференціальних рівнянь: Навчальний посібник / Г. Л. Кулініч. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2003.
4. Гихман, И. И. Стохастические дифференциальные уравнения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. – К.: Наукова думка, 1968.
5. Kulinich, G. L. Asymptotic behavior of the integral functionals for unstable solutions of one-dimensional Itô stochastic differential equations / G. L. Kulinich, S. V. Kushnirenko and Y. S. Mishura // Theory Probab. Math. Stat. 89 (2013), 91–103.
6. Кулініч, Г. Л. Асимптотична поведінка інтегральних функціоналів мартингального типу від нестійких розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь / Г. Л. Кулініч, С. В. Кушніренко, Ю. С. Мішура // Теорія ймовір. та матем. статист. 90 (2014), 102–112.

54. АПРОКСИМАЦІЯ ОБМЕЖЕНОГО НА $\mathbf{Z}$ РОЗВ'ЯЗКУ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ, ЩО ВІДПОВІДАЄ РІВНЯННЮ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ, РОЗВ'ЯЗКАМИ ВІДПОВІДНИХ РІЗНИЦЕВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Вікторія Романенко

Національний університет харчових технологій

Вступ. Нехай $\mathbf{B}$ – комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$, $L(\mathbf{B})$ – банахів простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють з $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}$, I – одиничний, O – нульовий оператори в $\mathbf{B}$. Розглянемо $A: D(A) \rightarrow \mathbf{B}$ – замкнений оператор з областю визначення $D(A) \subset \mathbf{B}$.

Теорема 1. Якщо відрізок $[-2, 2]$ міститься в резольвентній множині оператора A то знайдуться такі залежні тільки від оператора A сталі $M > 0$, $R > 1$, що для довільної обмеженої в $\mathbf{B}$ послідовності $\{y(n): n \in \mathbf{Z}\}$, відповідного їй єдиного розв'язку $\{x(n): n \in \mathbf{Z}\}$ різницевого рівняння

$$x(n+1) + x(n-1) = Ax(n) + y(n), \quad n \in \mathbf{Z}, \quad (1)$$

довільних $\{p, q\} \subset \mathbf{N}$ та відповідного набору $\{a, b, y(-p+1), \dots, y(q-1)\}$ єдиного розв'язку $\{u(n): -p \leq n \leq q\}$ крайової різницевої задачі

$$\begin{cases} u(n+1) + u(n-1) = Au(n) + y(n), & -p+1 \leq n \leq q-1, \\ u(-p) = a, & u(q) = b. \end{cases} \quad (2)$$

довільного натурального числа k , $1 \leq k \leq p+q-1$, справджується нерівність

$$\|x(-p+k) - u(-p+k)\| \leq M \left(\frac{\|x(q) - b\|}{R^{p+q-k}} + \frac{\|x(-p) - a\|}{R^k} \right).$$

Основні результати. Розглянемо рівняння теплопровідності відносно комплекснозначних функцій при деякому $\varepsilon > 0$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t, s) = \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}(t, s) - \varepsilon z(t, s) + f(t, s), \quad s \in [0, 2\pi], \quad t \in \mathbf{R},$$

що є аналогом різницево-диференціального рівняння

$$\frac{z(n+1, s) - z(n-1, s)}{2\tau} = \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}(n, s) - \varepsilon z(n, s) + f(n, s), \quad s \in [0, 2\pi], \quad n \in \mathbf{Z},$$

де $\tau > 0$ – крок дискретизації. Покладемо $\mathbf{B} = L_2([0, 2\pi])$ і перепишемо наше рівняння у вигляді

$$x(n+1) + x(n-1) = Ax(n) + y(n), \quad n \in \mathbf{Z},$$

позначивши

$$x(n)(s) := i^n z(n, s), \quad n \in \mathbf{Z}, \quad s \in [0, 2\pi],$$

$$(Au)(s) = 2\tau i \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s) - 2\tau \varepsilon i u(s), \quad s \in [0, 2\pi]$$

$$y(n)(s) := i^{n+1} f(n, s), \quad s \in [0, 2\pi], \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Спектр оператора A є зсувеним і домноженим на сталу спектром оператора другої похідної в $L_2([0, 2\pi])$ і рівний

$$\sigma(A) = \{iz \mid z \in (-\infty, -2\tau\varepsilon]\}.$$

Застосуємо теорему 1: включення відрізка $[-2, 2]$ у резольвентну множину оператора A виконується, бо спектр оператора A лежить на уявній осі на додатній відстані від початку координат. Згідно з теоремою, існують такі сталі $M_1 > 0$, $R_1 > 1$, що для довільної послідовності визначених на $[0, 2\pi]$ вимірних функцій $\{y(n) : n \in \mathbf{Z}\}$, що задовольняє умову

$$\sup_{k \in \mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} |y(k, s)|^2 ds < +\infty,$$

відповідного їй єдиного розв'язку $\{x(n) : n \in \mathbf{Z}\} \subset L_2([0, 2\pi])$ різницевого рівняння (2), довільних $\{p, q\} \subset \mathbf{N}$ та відповідного $\{a, b; y(-p+1), \dots, y(q-1)\} \subset L_2([0, 2\pi])$ єдиного розв'язку $\{u(n) : -p \leq n \leq q\}$ крайової різницевої задачі (3), довільного k , $1 \leq k \leq p+q-1$, справджується нерівність

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |x(-p+k, t) - u(-p+k, t)|^2 dt &\leq M \left(\frac{1}{R^{p+q-k}} \left(\int_0^{2\pi} |b(t)|^2 dt + \sup_{k \in \mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} |y(k, t)|^2 dt \right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{R^k} \left(\int_0^{2\pi} |a(t)|^2 dt + \sup_{k \in \mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} |y(k, t)|^2 dt \right) \right). \end{aligned}$$

Таким чином, при довільних функціях $a, b \in L_2([0, 2\pi])$, які за нормою не перевищують норми $y(k)$ при деякому k , точність наближення на деякому відрізку всередині $[-p, q]$, що знаходився на достатньо великій відстані l від його країв, буде обернено пропорційна величині $\sup_{k \in \mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} |y(k, s)|^2 ds$ і прямо пропорційна R^l .

Висновки. Показана можливість наближення обмеженого на Z розв'язку різницевого рівняння, що відповідає рівнянню теплопровідності, розв'язками

відповідних різницевих крайових задач та знайдено оцінку точності наближення. Наведений результат є продовженням досліджень роботи [1]

ЛІТЕРАТУРА

1. Романенко, В. М. Апроксимація обмежених розв'язків лінійних різницевих рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами / В. М. Романенко // Вісник Київського університету, серія фізико-математичні науки. – 2011. – Вип.4. – С. 103–106.

55. ФІЗИЧНИЙ ПІДХІД ДО ПОШУКУ ЧАСТИННОГО РОЗВ'ЯЗКУ НЕОДНОРІДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Ганна Циганкова

Національний університет харчових технологій

Вступ. Розвиток електромеханічних систем потребує вдосконалення методів їх дослідження та розрахунку електромагнітних полів з врахуванням особливостей конструкції електротехнічного устаткування. У зв'язку з цим розв'язання крайових задач розрахунку магнітного поля в нерівномірному повітряному зазорі електротехнічних пристроїв та електромагнітного поля в електропровідному середовищі, що обертається в цьому зазорі є актуальною на теперішній час.

Методи. У роботі використано методи математичної фізики та методи розв'язання диференціальних рівнянь.

Результати. Електромагнітні процеси в електропровідному дископодібному середовищі, яке обертається в неоднорідному магнітному полі повітряного зазору індуктора електродинамічного гальма можна описати системою диференціальних рівнянь Максвелла [1].

Вважаючи, що диск має скінченну товщину, необмежений діаметр, осьова компонента вектора магнітної індукції є незмінною по радіальній координаті r в робочій області, систему рівнянь електромагнітного поля в електропровідному середовищі в циліндричній системі координат r, φ, z можна привести до рівняння відносно гармонічних складових густини струму:

$$-\frac{\partial^2 \dot{\delta}_{\text{поверх}}}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \dot{\delta}_{\text{поверх}}}{\partial r} + \frac{p^2 - 1}{r^2} \dot{\delta}_{\text{поверх}} = \frac{p^2 \omega \sigma \dot{B}_{\text{спз}}}{r},$$

де r – радіус, p – число пар полюсів гармонічної складової, ω – вектор кутової швидкості обертання, σ – електропровідність матеріалу диску, $\dot{\delta}_{\text{поверх}}$ – радіальна компонента гармонічної складової густини струму на поверхнях диску, $\dot{B}_{\text{спз}}$ – осьова компонента гармонічної складової магнітної індукції на поверхні нерухомого диску.

Помножимо на r^2 обидві частини рівняння і отримаємо рівняння вигляду $-r^2 y'' - 3ry' + Ay = Br$, де A і B – постійні коефіцієнти ($A = p^2 - 1$, $B = p^2 \omega \sigma B_{\text{спз}}$), а r – невідома. Це рівняння Ейлера – лінійне диференціальне рівняння зі змінними

коефіцієнтами з правою частиною, рішенням якого буде сума загального розв'язку відповідного однорідного та частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Розглянемо спочатку однорідне рівняння:

$$r^2 y'' + 3ry' - Ay = 0.$$

Його характеристичним рівнянням буде $\lambda(\lambda - 1) + 3\lambda - A = 0$, звідки $\lambda = -1 \pm \sqrt{1 + A}$. Пам'ятаючи, що $A = p^2 - 1$, отримаємо $\lambda = -1 \pm p$. Загальним розв'язком однорідного рівняння Ейлера буде функція $y = C_1 r^{-1+p} + C_2 r^{-1-p}$. Таким чином, $\dot{\delta}_{\text{новпр}} = \dot{C}_1 r^{-1+p} + \dot{C}_2 r^{-1-p}$.

Неоднорідне рівняння Ейлера можна проінтегрувати за допомогою варіації сталих, або методу невизначених коефіцієнтів, або іншими методами, які базуються на застосуванні рядів, тощо. В даному випадку частинне рішення неоднорідного рівняння можна знайти на основі аналізу фізичних процесів в електропровідному середовищі. Для цього знаходиться закономірність розподілу густини струму по всій товщині диску. Знайдено середнє значення густини струму $\dot{\delta}_{\text{сепр}}$ по товщині диску. Використовуючи закон повного струму та нехтуючи розсіюванням магнітного поля в повітряному зазорі, знаходиться напруженість та результуюча індукція магнітного поля на поверхні диску в повітряному зазорі та диску, а через вищевказані величини і значення густини струму на бокових поверхнях диску $\dot{\delta}_{\text{новпр}}$. Остаточнo знайдено загальний розв'язок неоднорідного рівняння Ейлера

$$\dot{\delta}_{\text{новпр}} = \dot{C}_1 r^{-1+p} + \dot{C}_2 r^{-1-p} + \frac{\sigma \omega \dot{B}_{\text{срз}} r}{1 + Q(s + jm)r^2},$$

де коефіцієнти Q, s, m – постійні величини, які залежать від розмірів, параметрів та магнітних властивостей електропровідного диску.

За межами робочої області зовнішнє магнітне поле відсутнє ($\dot{B}_{\text{срз}} = 0$), а тому густина струму описується рівнянням $\dot{\delta}_{\text{новпр}} = \dot{C}_3 r^{-1+p} + \dot{C}_4 r^{-1-p}$. Коефіцієнти $\dot{C}_1, \dot{C}_2, \dot{C}_3, \dot{C}_4$ знаходяться із граничних умов: обидві компоненти вектора густини струму при $r \rightarrow 0$ та $r \rightarrow \infty$ дорівнюють нулю, а на межах робочої області – нормальні компоненти густини струму і тангенціальні компоненти напруженості електричного поля (а при однаковій електропровідності і тангенціальні компоненти густини струму) однакові по обидві сторони меж.

Висновки. Отримані рішення дозволяють розрахувати втрати та визначити електромагнітний момент електродинамічного гальма, оскільки вся підведена до гальма механічна потужність іде на втрати в гальмі.

Варіація розмірів, параметрів та магнітних властивостей електропровідного диску, які визначають коефіцієнти Q, s, m , дозволяють проаналізувати їх вплив на характеристики гальма на підставі розрахунків без необхідності проведення дорогих експериментів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Демирчян, К.С. Теоретические основы электротехники / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин -Т.1. – Санкт-петербург: Питер, 2004. – 462 с.

56. ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ІНЖЕНЕРНИХ РОЗРАХУНКАХ

Віктор Гуць, Сергій Резніков

Національний університет харчових технологій

Вступ. У харчовій промисловості для аналізу і оптимізації технологічних процесів використовують різноманітні математичні моделі, побудовані на основі диференціальних рівнянь, зокрема другого порядку. Пов'язано це перш за все з можливостями їхнього аналітичного дослідження методами символічної комп'ютерної математики та наявністю фундаментальних, доступних для фахівців з інженерною освітою, методів аналізу.

Методи. В інженерних розрахунках часто необхідно, маючи математичну модель процесу у вигляді диференціального рівняння другого порядку, визначити параметр оптимізації як функцію декількох незалежних характеристик. Якщо при визначенні одного з них виникають технічні труднощі, запропоновано визначати його після простих математичних перетворень того ж рівняння. Це значно спрощує проведення досліджень.

Результати. Як приклад розв'язання такої задачі розглянемо процес проколювання м'яса, хлібу, сиру та деяких інших харчових продуктів голчастим індентором. Такий процес має місце, коли продукт під дією сили гравітації занурюється в індентор або навпаки індентор занурюється у продукт, наприклад, при тендеризації, шприцюванні продукту або дослідженні його структурно-механічних властивостей (консистенції).

У технології м'яса проколювання індентором шматка м'яса відбувається з метою пом'якшення його структури (тендеризації) або введення сольового розчину всередину. Важливим для оптимізації процесу та визначення конструктивних параметрів спеціального технологічного обладнання є розрахунок зусилля, яке необхідне для занурення індентора на визначену технологічним регламентом глибину, та розрахунок енерговитрат на цей процес.

Знайдемо зусилля проколювання, використавши диференціальне рівняння руху індентора. У спрощеному вигляді це рівняння записується так

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + P_{np} = mg, \quad (1)$$

де m – маса індентора, x – глибина занурення, t – тривалість занурення, P_{np} – зусилля проколювання.

Розв'язок рівняння (1) за початкових умов $x(0) = 0$, $x'(0) = V(0) = V_0$ має такий вигляд

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{(mg - P_{np})t^2}{m} + V_0 t. \quad (2)$$

Із рівняння (2) знайдемо параметр оптимізації – зусилля проколювання P_{np} як функцію від t, m, x, V_0

$$P_{np} = mg - \frac{2m}{t^2}(x - V_0 t) \quad (3)$$

Для розрахунку зусилля P_{np} проколювання треба знати: масу індентора m , максимальну глибину занурення $x_{\max}$, тривалість занурення t_3 , початкову швидкість V_0 .

Необхідні параметри знаходяться експериментально: маса індентора m – зважуванням, максимальна глибина занурювання $x_{\max}$ – вимірюванням довжини голки після зупинки індентора, початкова швидкість V_0 з рівняння $V_0 = \sqrt{2gH}$ через висоту H , з якої падає індентор. Складності виникають при визначенні тривалості t_3 занурення індентора. Для цього, враховуючи короткочасність процесу, треба мати складну вимірювальну апаратуру. Тому будемо вважати тривалість занурення t_3 невідомим параметром рівняння (3).

Для його визначення використаємо рівняння (2) та знайдемо швидкість занурення індентора

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(mg - P_{np})t}{m} + V_0. \quad (4)$$

Індентор зупиняється, коли $\frac{dx}{dt} = 0$. За цієї умови з рівняння (4) знайдемо тривалість занурення t_3

$$t_3 = \frac{V_0 m}{P_{np} - mg}. \quad (5)$$

Підставивши t_3 у рівняння (2), знайдемо зусилля проколювання після повної зупинки індентора

$$P_{np}(t_3) = mg \left(\frac{H}{x_{\max}} + 1 \right), \quad (6)$$

де $x_{\max}$ – максимальне занурення індентора, $H = \frac{V_0^2}{2g}$ – висота падіння індентора.

Спростимо формулу (5), використавши рівняння (3). Після нескладних перетворень одержимо

$$t_3 = \frac{2x_{\max}}{V_0}. \quad (7)$$

Важливим для оптимізації процесу тендеризації є визначення енергетичної складової. Роботу в будь який момент часу t визначимо як інтеграл

$$A(t) = \int_0^t P_{np}(\tau) dx(\tau). \quad (8)$$

Можна показати, що

$$A(t) = mgx(t) - \frac{m}{2} \left[(x'(t))^2 - V_0^2 \right] \text{ або } A(t) = \frac{mx(t)}{t^2} (gt^2 + 2V_0t - 2x(t)). \quad (9)$$

Наприкінці процесу тендеризації робота буде дорівнювати

$$A(t_3) = P_{np}(t_3)x_{\max} = mgx_{\max} \left(\frac{H}{x_{\max}} + 1 \right), \quad (10)$$

де $P_{np}(t_3)$ – підставляємо з рівняння (3), $x_{\max}$ – вимірювана максимальна глибина занурення. Зауважимо, що можна використати також формули (9) та (7).

Висновки. Метод математичного моделювання та проведений аналіз диференціального рівняння руху індентора дозволяє значно спростити визначення основної характеристики (параметра оптимізації) технологічного процесу тендеризації – зусилля проколювання, а також може бути застосованим для дослідження та оптимізації багатьох інших процесів харчових технологій.

57. НЕІЗОТЕРМІЧНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ ВИТЯГУВАННЯ ВОЛОКОННИХ СВІТЛОВОДІВ

Олексій Зінкевич, Володимир Сафонов

Національний університет харчових

Олександр Нещадим

*Національний університет біоресурсів і
природокористування України*

Вступ. Порівняння існуючих моделей можна виконати на основі їх особливостей в таких аспектах: реологічна модель; ізотермічність (неізотермічність); стаціонарність (нестаціонарність); врахування тих або інших сил в загальному балансі сил, діючих на витягаюче волокно; розмірність моделі; граничні умови; спосіб знаходження поля швидкостей та температур.

Методи. Рейнером запропоновано проводити систематизацію моделей в рамках класичної теорії, опираючись на основні моделі суцільного середовища: пружне тіло Гука, що є ідеально пружним тілом і розглядається в класичній теорії пружності; в'язка рідина Ньютона, що є «простою» в'язкою рідиною і розглядається класичною гідродинамікою; пластичне тіло Сен-Венана – тверде тіло, якому властива межа протікання, при напрузі нижче якої воно деформується пружно і пластично тече при постійній нарузі, що дорівнює межі протікання. Тіло Сен-Венана вивчає ідеальна пластичність. Решту «реологічних тіл» можна розглядати як комбінації цих трьох основних тіл. Наближення, що витікає з ізотермічності процесу витягування, є грубим і практично ніколи не відповідає дійсності.

Результати. Відомі неізотермічні моделі можна розділити на дві великі групи. До першої групи належать такі, в яких разом з рівнянням Нав'є-Стокса

використовується рівняння теплопровідності. Такі моделі будемо вважати повними. До другої групи належать моделі, в яких розподілення температури враховується параметрично за допомогою задання в'язкості як функції координат. Найкращих результатів в дослідженні процесу витягування було досягнуто на основі повних моделей.

Початковим етапом дослідження процесу витягування має бути аналіз стаціонарних конфігурацій волокон і відповідного поля швидкостей. У більшості випадків так і буває; нестаціонарні початкові рівняння використовуються, як правило, при дослідженні стійкості процесу і його реакції на всілякі обурення. Виключення складає випадок, коли нестаціонарні рівняння використовуються для відшукування стаціонарного рішення у рамках методу встановлення при $t \rightarrow \infty$.

У найбільш загальному випадку рівняння балансу сил при витягуванні волокон має вигляд:

$$F + F_g = F_\mu + F_{in} + F_{st} + F_a. \quad (1)$$

Тут F – сила натягу в точці прийому волокна, F_g – сила тяжіння, F_μ – складова, обумовлена в'язкими силами і залежна від реологічних властивостей розплаву, F_{in} – інерційна сила, пов'язана з прискоренням струменя рідини, F_{st} – сила поверхневого натягу, пов'язана зі зміною поверхні струменя і відповідної поверхневої енергії струменя; вона пропорційна поверхневому натягу між струменем і довкіллям, F_a – сила тертя об повітря.

Відносна важливість складових в балансі сил залежить від умов формування і властивостей розплавленого матеріалу.

Практично в усіх відомих роботах нехтують силою тертя об повітря. Нехтування всіма силами, крім F і F_μ , відповідає повільному витягуванню високов'язкого матеріалу, є хорошою моделлю даного процесу. Врахування окремих складових в рівнянні (1) і, в першу чергу F_{st} , відповідає тим чи іншим особливостям при розгляді реальних процесів. Так, наприклад, F_{st} необхідно врахувати при моделюванні процесу витягування скляних волокон. Чисто теоретичний інтерес представляє випадок, коли $F = 0$.

Практично всі існуючі моделі є одновимірними. Це обумовлено труднощами дослідження початкових рівнянь, записаних для випадку осьової симетрії, не кажучи вже про тривимірний випадок. Робилися нечисленні спроби врахування поперечної складової швидкості за допомогою представлення її у вигляді

$$V(r, z) = V(z) \cdot (1 + a_1 \cdot r + a_2 \cdot r^2 + \dots). \quad (2)$$

Дослідження виявили, що прийняття параболічного профілю швидкості (2) в межах поперечного перерізу волокна не призводить до задовільного результату при порівнянні теоретичних і експериментальних даних.

Було запропоновано розв'язання задачі формування волокон із полімерних матеріалів у вигляді накладення задач про розтягування в'язко-пружного стержня і руху, який визначається продуктивністю процесу. При цьому задача про струмінь, що витягається, розділена на дві. Це задача про розтягування в'язко-пружного стержня в умовах теплообміну з довкіллям, коли розтягуюче зусилля

стале або змінюється з часом за лінійним законом, і задача про визначення основних параметрів струменя за допомогою результату розв'язання першої задачі і заданої швидкості часток.

Постановка граничних умов визначається з врахуванням тих або інших сил, що діють на волокно, розмірністю моделі, а також похибкою апроксимацій, пов'язаних з розглядом всієї області витягування або її частини.

Найважливішими процесами деформування при формуванні волокон є: зсув в круговому каналі (течія Пуазейля) і одновісний розтяг. Перший тип течії реалізується в фільтрі при витягуванні фільтрним способом, другий – по виходу із фільтра і при витягуванні із заготовки.

Усталена течія струменю є прикладом усталеного негомоторного руху, де градієнт швидкості є функцією положення і змінюється уздовж шляху течії. Це не суто поздовжня течія; зміна радіуса по її довжині призводить до появи деяких радіальних складових градієнта швидкості і не рівних нулю складових напруги зсуву. Надійна теорія такої течії для рідин з нелінійною в'язкістю не розроблена; те ж саме можна сказати і про лінійні в'язкопружні і ньютонівські рідини. Проте на випадок, коли зміна радіуса не дуже велика, течія може апроксимувати як квазіпоздовжня, а розподіл швидкості вважається плоским. Всі існуючі теоретичні рішення для вільно розтягуваних струменів ґрунтуються на цьому наближенні (про чистий розтяг), яке є більш-менш обґрунтованим залежно від того, яка із зон витягування розглядається.

Висновки. Всі дослідники відзначають, що домогтися прогресу в розумінні механізмів протікання процесу витягування, а також задовільного збігу розрахункових і експериментальних даних можна тільки в результаті двовимірного розгляду обох сторін процесу – гідродинамічної і теплотехнічної.

58. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ФІНАНСОВИХ ПОКАЗНИКІВ КОМЕРЦІЙНОГО БАНКУ

Микола Медведєв, Оксана Ніколаєва

Національний університет харчових технологій

Вступ. Циклічність у розвитку економічних систем зобов'язує менеджмент банків адекватно реагувати на зміни економічної кон'юнктури для забезпечення стійкості кожної банківської установи окремо і банківської системи в цілому. Швидкість реакції на зміни визначає успіх в управлінні, а математичні моделі банку є основним елементом систем підтримки прийняття рішень.

Методи. Сучасні математичні методи і моделі спираються на апарат прикладної математики, добре розроблені методи математичного програмування, теорію прийняття рішень. До таких методів відноситься побудова моделей, що описують кореляційно-регресійні залежності.

Результати. За даними щоквартальної та щорічної звітності комерційного банку (у тис.грн.), до якої входить звіт про фінансовий стан та звіт про прибутки та збитки й інший сукупний дохід, що стали вихідними даними, був проведений

багатофакторний аналіз прибутковості цього комерційного банку у останні шість років на основі щоквартальних значень звітності.

Для відбору найбільш значимих факторних ознак була побудована матриця парних коефіцієнтів кореляції. Цей аналіз показав стійку залежність між такими факторами як працюючі та непрацюючі активи, кошти фізичних та юридичних осіб, які було обрано для побудови регресійної моделі.

У процесі аналізу були побудовані різноманітні типи регресійних моделей, які описують залежність обраних факторів. Найкращий результат показала лінійна модель, у якій коефіцієнт детермінації, склав 0,89, що свідчить про суттєвий вплив факторних значень на формування прибутку.

Використовуючи масив даних із фінансової звітності, були знайдені параметри a_i , $i = \overline{0,4}$ та побудована регресійна залежність прибутку від обраних факторів:

$$\bar{Y}_{1,2,3,4} = -2909,53 - 0,004x_1 - 0,103x_2 + 0,021x_3 + 0,009x_4. \quad (1)$$

Перевірка адекватності всієї моделі здійснювалася з використанням F -критерію Фішера, значущості коефіцієнтів регресії за допомогою t -критерію Стюдента. Результати перевірки показали, що параметри рівняння є статистично значущими.

Планування починається з прогнозу структури активів та пасивів звіту про фінансовий стан.

Прогноз показника звіту про фінансовий стан «Працюючі активи». Змінна x_1 з часом має тенденцію зростання. Аналіз даних показав, що при побудові лінії тренда можна використовувати лінійну або експонентну функцію. Параметри функції визначаються за допомогою методу найменших квадратів. Як критерій оцінки якості моделі використовується коефіцієнт детермінації R^2 . Експонентна функція $x_1 = 736284e^{0,0883t}$ забезпечує більш високе значення коефіцієнта детермінації, ніж лінійна модель. Прогнозне значення змінної x_1 знайдемо з рівняння $x_1 = 736284e^{0,0883t}$ при $t = 25$, одержимо $x_1 = 6694998$.

Прогноз показника звіту про фінансовий стан «Непрацюючі активи». Змінна x_2 також з часом має тенденцію зростання. Залежність величини непрацюючих активів описується рівнянням лінійної регресії $x_2 = 3678,4t + 41716$, яке забезпечує значення коефіцієнта детермінації $R^2 = 0,836$. Прогнозне значення змінної x_2 знайдемо з рівняння $x_2 = 3678,4t + 41716$ при $t = 25$, одержимо $x_2 = 133676$.

Прогноз показника звіту про фінансовий стан «Кошти юридичних осіб». Змінна x_3 також з часом має тенденцію зростання. Залежність розміру коштів юридичних осіб приблизно однаково описуються експонентним ($R^2 = 0,916$) та лінійним ($R^2 = 0,915$) рівняннями. Прогнозне значення змінної x_3 знайдемо з рівняння $x_3 = 395127e^{0,0801t}$ при $t = 25$, одержимо $x_3 = 2926924$.

Прогноз показника звіту про фінансовий стан «Кошти фізичних осіб». Змінна x_4 , як і інші змінні, має тенденцію зростання. Аналіз даних показав, що при побудові лінії тренда можна використовувати лінійну або експонентну функцію. Коефіцієнт детермінації у експонентної функції не набагато вищий ніж у лінійної моделі, тому для прогнозування величини коштів фізичних осіб може використовуватися як експонентну функцію, так і лінійна. Прогнозне значення змінної x_4 знайдемо з рівняння $x_4 = 188815e^{0,1064t}$ при $t = 25$, одержимо $x_3 = 2699354$.

Отже у процесі дослідження були отримані моделі для прогнозування факторів, які використовуються при плануванні величини прибутку.

Прогноз прибутку банку. Використовуючи знайдені значення факторів та рівняння (1), одержимо прогнозне значення прибутку: $\bar{Y}_{\text{прог}} = 43628,78$.

Побудовано лінійне рівняння залежності доходу від часу: $y = 6703,6x + 27592$, де x – фактор часу, y – дохід. Прогнозне значення доходу знайдемо з рівняння $y = 6703,6x + 27592$ при $t = 25$, одержимо $y_{\text{прог}} = 195182$.

Витрати знаходимо як різницю між доходом та прибутком. В результаті отримуємо ті витрати, які банк «може собі дозволити» з урахуванням можливого зростання доходів і планованого прибутку. Прогнозні значення доходу, витрати і прибутки переносяться в прогнозний звіт про прибутки і збитки і починається постатейне визначення доходів і витрат. Потім можна проводити розподіл прогнозних значень доходу та витрат по статтям.

Висновки. Найкращий прогноз знайдено для параметра «Кошти юридичних осіб», найгірший прогноз – для параметра «Кошти фізичних осіб», що пов'язано з неврахуванням в моделі економіко-політичним фактором, наслідком якого був масовий відтік депозитів фізичних осіб. Але незважаючи на негативні наслідки, банк отримав квартальний прибуток у розмірі 58314 тис. грн., що на 14686 тис. більше ніж прогнозований. Виходячи з результатів аналізу можна зробити висновок, що за допомогою розробленої моделі можна з високою імовірністю прогнозувати прибуток майбутніх періодів та приблизне значення всіх статей звіту про фінансовий стан і звіту про прибутки і збитки та інший сукупний дохід для комерційного банку, що дає безумовні переваги у стратегічному плануванні.

59. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ РІШЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Ольга Сєдих, Світлана Маковецька

Національний університет харчових технологій

Вступ. Методи Монте-Карло, які стали класичними в задачах теорії переносу в останній час отримали інтенсивний розвиток в області чисельного рішення різноманітних задач математичної фізики.

Методи. Представимо рішення задачі Діріхле рівняння Лапласа методом випадкових блукань:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

Для ілюстрації методу Монте-Карло розглянемо гру, яка називається «Блукаючий п'яниця»[1].

Правила гри.

1. Блукання п'яниці починаються з довільної точки A сітки (рис. 1).

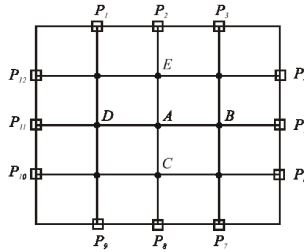


Рис.1. До пояснення знаходження рішення РЧП методом Монте-Карло

2. На кожному кроці п'яниці випадковим чином переміщається в одну з чотирьох сусідніх точок сітки. Ймовірність попадання в кожную з точок дорівнює $1/4$.

3. Після переходу в сусідню точку процес блукання поновлюється. Переміщення п'яниці триває до тих пір, поки він не досягне однієї з граничних точок P_i . Номер граничної точки фіксується і на цьому випадкова прогулянка закінчується.

4. Проводимо повторення кроків 1-3 достатню кількість разів і визначимо кількість відвідувань п'яницею кожної граничної точки. Відношення числа відвідувань п'яницею кожної точки границі до повного числа випробувань визначає ймовірність попадання п'яниці в дану точку границі.

5. Нехай п'яниця отримує винагороду g_i , якщо він досягає точки P_i , та припустимо, що мета гри — обчислити середню винагороду $R(A)$ для всіх випадкових прогулянок, які починаються з точки A . Шуканий середній виграш визначається формулою:

$$R(A) = g_1 P_A(p_1) + g_2 P_A(p_2) + \dots + g_{12} P_A(p_{12}) \quad (1)$$

Виявляється, що середня винагорода (1) є розв'язком задачі Діріхле в точці A . Даний висновок ґрунтується на двох фактах.

- Припустимо, що п'яниця почав свій рух з точки, що лежить на границі. Кожна така прогулянка закінчується у тій же точці, і п'яниця негайно отримує винагороду g_i . Таким чином, середня винагорода для кожної точки дорівнює g_i .

- Тепер припустимо, що прогулянка починається із внутрішньої точки. Тоді ясно, що середня винагорода для точки $R(A)$ буде середнім арифметичним від середніх винагород для чотирьох сусідніх точок

$$R(A) = \frac{1}{4} [R(B) + R(C) + R(D) + R(E)] \quad (3)$$

Отже, ми бачимо, що $R(A)$ задовольняє рівнянню (3) в кожній внутрішній точці і дорівнює g_i в граничній точці. Якщо g_i це значення функції $g(x, y)$ з граничної умови в граничних точках P_i , тоді величина $R(A)$ відповідає величині u_{ij} в різницевих рівняннях:

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} [u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}] \quad (4)$$

$$u_{i,j} = g_{i,j} \quad (5)$$

де (i, j) — внутрішня точка; $g_{i,j}$ — значення рішення в граничній точці (i, j) .

Таким чином, величина $R(A)$ дійсно апроксимує рішення рівняння з частинними похідними в точці A[2].

Результати. Розв'яжемо методом випадкових блукань в пакеті MathCAD рівняння Лапласа за початковою умовою:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0,$$

$$u(x, 0) = 5, \quad u(x, 1) = 0$$

Була створена функція, яка повертає чисельні значення рішення рівняння Лапласа методом Монте-Карло. Аргументи функції: Nx, Ny — число вузлів сітки; NTrial — число випробувань; XL — вектор, що містить граничні умови на правій межі; Yd — вектор, що містить рішення на нижній межі; Yu — вектор, що містить рішення на верхній межі.

Візуалізація чисельного рішення рівняння Лапласа представлена на рис.2.

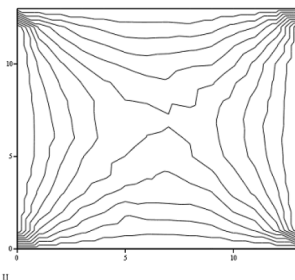


Рис.2 Рішення рівняння Лапласа методом Монте-Карло

Висновок. Таким чином, використання математичного пакету MathCAD дозволяє оптимізувати процес знаходження рішення задач математичної фізики.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ермаков, С.М. Избранные алгоритмы метода Монте-Карло : монография / С.М. Ермаков, А.С. Расулов, А.З. Веселовская. — Ташкент: изд. Ташкентского госуниверситета, 1992.

2. Соболев, И.М. Численные методы Монте-Карло : монография / И.М. Соболев. — М.: Наука, 2007. — 131 с.

60. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ДЕЯКИХ БІОХІМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ХАРЧОВІЙ ПРОМИСЛОВОСТІ

Микола Медведєв, Володимир Листопад,
Оксана Мулява

Національний університет харчових технологій

Вступ. При побудові нелінійних моделей для дослідження часто використовують метод найменших квадратів, який є основою симплекс-методу в лінійному програмуванні. Проте він не охоплює всі типи нелінійних залежностей. Це вимагає розробки нових підходів при побудові нелінійних моделей.

Методи. Продемонструємо схему побудови квадратичної нелінійної залежності результативної ознаки від трьох чинників методами кореляційно-регресійного аналізу. З експериментальних даних відомо, що в'язкість сироватко-рослинної суміші (Y) залежить від кількості харчових волокон (X_1) суміші, тривалості перемішування (X_2) та температури набухання (X_3).

Дослідним шляхом були отримані наступні дані:

Таблиця 1

№ з/п	Y	X_1	X_2	X_3
1	5	30	15	40
2	4,8	20	15	40
3	4,85	30	5	40
4	4,7	20	5	40
5	3,8	30	15	20
6	3,6	20	15	20
7	2,9	30	5	20
8	2,6	20	5	20
9	4,45	30	10	30
10	4,3	20	10	30
11	4,4	25	15	30
12	4,25	25	5	30
13	4,3	25	10	40
14	4,2	25	10	20

Результати. Множинний коефіцієнт кореляції, який характеризує лінійну залежність між Y та незалежними змінними $R_{y.x_1x_2x_3} = 0,867$.

Для вимірювання інтенсивності нелінійного зв'язку між показниками служить кореляційне відношення (індекс кореляції)

$$\eta_{yx} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Нехай зв'язок між змінними Y та X_1, X_2, X_3 описується квадратичною функцією до якої входить $m = 10$ невідомих параметрів.

$$\hat{Y}_{10} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_1^2 + a_5x_2^2 + a_6x_3^2 + a_7x_1x_2 + a_8x_1x_3 + a_9x_2x_3.$$

В таблиці 2 наведені розрахунки $\hat{y}_i (i = \overline{1,14})$, індексів кореляції η та значень $m = 10, 9, \dots, 4$. Останнє значення $m = 4$ відповідає лінійній моделі.

Таблиця 2

X_1	X_2	X_3	Y_i	$\hat{Y}_{i10}$	$\hat{Y}_{i9}$	$\hat{Y}_{i8}$	$\hat{Y}_{i7}$	$\hat{Y}_{i6}$	$\hat{Y}_{i5}$	$\hat{Y}_{i4}$
30	15	40	5	4,79	4,79	4,81	4,84	5,04	5,09	5,14
20	15	40	4,8	4,64	4,63	4,61	4,64	4,84	4,89	4,94
30	5	40	4,85	4,75	4,74	4,76	4,79	4,58	4,63	4,68
20	5	40	4,7	4,58	4,58	4,56	4,59	4,38	4,43	4,48
30	15	20	3,8	3,93	3,93	3,91	3,94	3,73	3,78	3,83
20	15	20	3,6	3,70	3,69	3,71	3,74	3,53	3,58	3,63
30	5	20	2,9	3,07	3,06	3,04	3,07	3,27	3,32	3,37
20	5	20	2,6	2,82	2,82	2,84	2,87	3,07	3,12	3,17
30	10	30	4,45	4,48	4,48	4,48	4,35	4,39	4,20	4,25
20	10	30	4,3	4,28	4,28	4,28	4,15	4,19	4,00	4,05
25	15	30	4,4	4,56	4,56	4,56	4,43	4,64	4,52	4,38
25	5	30	4,25	4,10	4,10	4,10	3,97	4,18	4,06	3,92
25	10	40	4,3	4,91	4,91	4,91	5,03	4,82	4,94	4,81
25	10	20	4,2	3,60	3,60	3,60	3,72	3,51	3,63	3,50
Кількість параметрів у моделі m				10	9	8	7	6	5	4
Індекс нелінійної кореляції η				0,922	0,922	0,922	0,913	0,884	0,880	0,867
Середнє значення відносної похибки w				4,95%	4,95%	4,96%	5,40%	6,45%	6,54%	7,16%

З вищенаведеного випливає, що квадратична модель з точністю до 5% описує експериментальні дані, тому не має сенсу переходити до більш складних залежностей.

Квадратична модель, що має вісім параметрів

$\hat{Y}_8 = -4,2344 + 0,089x_1 + 0,277x_2 + 0,232x_3 - 0,0034x_1^2 - 0,0054x_2^2 - 0,0021x_3^2 - 0,0041x_2x_3$ використовується для знаходження найбільшого та найменшого значень в'язкості Y сироватко-рослинної суміші в залежності від X_1, X_2, X_3 при обмеженнях: $20 \leq X_1 \leq 30$; $5 \leq X_2 \leq 15$; $20 \leq X_3 \leq 40$. Скориставшись програмою-оптимізатором «Поиск решения» (MS Excel) для нелінійних задач математичного програмування, знайдені

$$\hat{y}_{8max} = 5,07 \text{ при } X_1 = 27,2; X_2 = 15; X_3 = 40;$$

$$\hat{y}_{8min} = 2,84 \text{ при } X_1 = 20; X_2 = 5; X_3 = 20.$$

Висновок. За допомогою побудованої нелінійної квадратичної моделі можна розв'язувати важливі з практичної точки зору обернені задачі, коли для заданої в'язкості сироватко-рослинної суміші Y потрібно знайти невідомі величини X_1, X_2, X_3 , які забезпечують цю в'язкість. Цілком зрозуміло, що такі задачі, як правило, мають неоднозначний розв'язок, що дає можливість досліднику підбирати раціональні комбінації кількості харчових волокон X_1 в суміші, тривалості перемішування X_2 та температури набухання X_3 .

ЛІТЕРАТУРА

1. Наконечний, С.І. Економетрія: підруч. / С.І. Наконечний, Т.О. Терещенко, Т.П. Романюк. – 2 – Ге вид., перероб і доп. – К.: КНЕУ, 2000. – 296 с.

61. ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУНКЦІЇ НЕЛІНІЙНОЇ МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЇ З ДОВІЛЬНОЮ КІЛЬКІСТЮ КОДОВАНИХ ЗМІННИХ

Тетяна Зінченко

Національний університет харчових технологій

Вступ. Розглядається задача розрахунку функцій множинної регресії другого порядку з довільною кількістю змінних, представлених в кодованій формі, наприклад, для організації центрального композиційного ротатбельного планування експерименту з метою оптимізації процесу чи об'єкту.

Методи. Для розв'язання поставленої задачі використані методи математичної статистики, а також методи лінійної алгебри (знаходження розв'язків систем лінійних рівнянь).

Рівняння множинної регресії 2-го порядку (нелінійне) має вигляд

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i x_i + \sum_{i=1}^k \sum_{r=1, r>i}^k a_{ir} x_i x_r + \sum_{i=1}^k a_{ii} x_i^2, \quad (1)$$

де x_i - змінні аргументи, $i = \overline{1, k}$, a_0, a_i, a_{ir}, a_{ii} - коефіцієнти, які визначаються за результатами експериментів. Заміною змінних можна перетворити це рівняння до лінійної форми

$$y = b_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2 + \dots + b_m z_m, \quad (2)$$

де m - кількість нових змінних. Оцінка параметрів цього рівняння – коефіцієнтів $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$ - виконується за даними вибірки (за результатами N експериментів) $z_{j1}, z_{j2}, \dots, z_{jm}, y_j, j = 1, 2, \dots, N$, за методом найменших квадратів.

Для знаходження $(m+1)$ коефіцієнтів функції (1) необхідно забезпечити відповідний ранг матриці ортогональних кодованих планів, тому композиційне планування необхідно організувати за ротатбельним принципом: ортогональний план в 2^n точках і в $2n$ «зіркових точках» з певною величиною плеча α .

Результати. Згідно методу мінімальних квадратів коефіцієнти функції (2) знаходимо як розв'язок задачі:

$$Q(b_0, b_1, \dots, b_m) = \sum_{j=1}^N \left(y_j - (b_0 + \sum_{i=1}^m b_i z_i) \right)^2 \rightarrow \min. \quad (3)$$

Прирівнюючи частинні похідні функції $Q(b_0, b_1, \dots, b_m)$ до нуля, отримуємо систему $(m+1)$ рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів, де кількість m дорівнює:

$$m = k + \frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{k^2}{2} + \frac{3k}{2} = \frac{k^2 + 3k}{2},$$

k – кількість змінних аргументів x_i функції регресії (1).

Щоб отримати розв'язок системи за правилом Крамера, необхідно обчислити відповідну кількість визначників. Задача ускладнюється тим, що порядок визначників є загальним, має параметричний характер. Для розв'язання цієї задачі за допомогою методу математичної індукції були отримані рекурентні та прямі формули обчислення визначників спеціального виду n – го порядку, серед яких, наприклад, використовуються такі:

$$J_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad A_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$J_n = (-1)^{n+1} - J_{n-1};$$

$$A_n = (-1)^{n+1} - A_{n-1}.$$

$$J_n = (-1)^{n+1} \cdot n.$$

$$A_n = (-1)^{n+1} \cdot (n-1+a).$$

Введемо позначення:

$$S_0 = \sum_{j=1}^N y_j; \quad S_i = \sum_{j=1}^N y_j x_{ji}; \quad S_{ii} = \sum_{j=1}^N y_j x_{ij}^2; \quad S = \sum_{i=1}^m S_{ii}; \quad i = \overline{1, k}; r = \overline{1, k};$$

$$\text{для } r > i: S_{ir} = \sum_{j=1}^N y_j x_{ij} x_{rj}; \quad c = 2^k + 2\alpha^2; \quad p = N(2\alpha^4 + k2^k) - kc^2. \quad (4)$$

Формули для знаходження коефіцієнтів функції регресії другого порядку набувають вигляду:

$$\alpha_0 = -\frac{c}{p} \cdot S + \frac{2\alpha^4 + k2^k}{p} \cdot S_0; \quad a_i = \frac{1}{c} S_i, \quad i = \overline{1, k};$$

$$\text{для } i = \overline{1, k}, r > i: a_{ir} = \frac{1}{2^k} \cdot S_{ir}; \quad a_{ii} = \frac{1}{2\alpha^4} \cdot S_{ii} + \frac{1}{2\alpha^4} \cdot \frac{c^2 - N2^k}{p} \cdot S - \frac{c}{p} \cdot S_0. \quad (5)$$

Висновки. Отримані формули (4), (5) дозволяють розрахувати коефіцієнти функції регресії другого порядку для довільної кількості змінних, представлених

в кодованій формі. Їх можна використовувати для досліджень з використанням центрального композиційного ротатбельного планування експерименту з метою оптимізації процесу чи об'єкту.

ЛІТЕРАТУРА

1. Адлер, Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – Изд.2-е. – М.: Наука, 1976.
2. Грачев, Ю.П. Математические методы планирования эксперимента / Ю.П. Грачев, Ю.М. Плаксин. – М.: ДеЛи принт, 2005. – 296 с.
3. Зінченко, Т. Розрахунок функцій множинної регресії другого порядку в задачах центрального композиційного планування експерименту / Т. Зінченко, А. Дорохович. // Ukrainian Food Journal. – 2014. – Vol. 3, Issue 5.
4. Бадрук, В.В. Оптимізація рецептурних композицій кондитерського виробу маршмелу дієтичного призначення / В.В. Бадрук, Т.В. Зінченко, А.М. Дорохович // Обладнання та технології харчових виробництв. Збірник наукових праць Донецького національного університету економіки і торгівлі ім. М. Туган-Барановського – 2013. – № 30. – С. 320 – 326.

62. МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНОГО ВИКОРИСТАННЯ РУХОМОГО СКЛАДУ АВТОТРАНСПОРТНОГО ПІДПРИЄМСТВА НА МІЖМІСЬКОМУ МАРШРУТІ

Любов Олещенко

Національний університет харчових технологій

Вступ. У зв'язку із зростанням цін на паливно-мастильні матеріали виникає потреба у знаходженні оптимальної структури та швидкості руху транспортних засобів на міжміському маршруті.

Методи. Знаючи середній пасажиропотік за одиницю часу, можна перевірити ефективність одночасного використання ТЗ різної місткості, розв'язуючи задачу оптимізації на максимум прибутку (мінімізацію витрат) автотранспортного підприємства (АТП) при обмеженій кількості ТЗ на маршруті.

Результати. Розглянемо задачу раціонального вибору рухомого складу чотирьох типів за 1 годину роботи для АТП. Мінімізацію витрат V_I на обслуговування рухомого складу можна представити у вигляді:

$$V_I = \sum_{j=1}^4 \left(\left(\frac{s_0}{\tau_0} \right) \cdot \gamma_j + z \right) \cdot K_{1j} \rightarrow \min, \quad (1)$$

де V_I – витрати на обслуговування ТЗ (включаючи зарплату водіям), залежні від вибору структури рухомого складу, при обмеженнях на кількість F_1 пасажирів, що перевозяться за одну годину, і загальною кількістю місць в автобусах

$F_1 \leq \sum_{j=1}^4 (K_{1j} \cdot N_j)$, а також середнім інтервалом часу $\bar{\tau}_1$ відправлення ТЗ, яке

повинне бути не більше заданого τ_1^+ , γ_j – прямі матеріальні витрати (грн/км.),

z – зарплата водіям (грн/год), і N_j ($j=1,2,3,4$) – відповідно, кількість ТЗ і місць в них за 1 годину, $K_1 = \sum_{j=1}^4 (K_{1j})$ – загальна кількість ТЗ, τ_0 , s_0 – відповідно, час руху ТЗ (год.) і довжина маршруту в кілометрах. Дану задачу можна сформулювати як задачу лінійного програмування з цільовою функцією:

$$V_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 \rightarrow \min \quad (2)$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \geq F_1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq \frac{1}{\tau_1}, \\ 0 \leq x_j \leq \mu_j, j=1,2,3,4. \end{cases} \quad (3)$$

де μ_j – обмеження на наявність ТЗ відповідного типу.

Середній коефіцієнт заповнення ТЗ $\bar{\varepsilon}_1$ визначається співвідношеннями:

$$F_1 = \sum_{j=1}^4 (\varepsilon_{1j} \cdot K_{1j} \cdot N_j), \quad \bar{\varepsilon}_1 = \frac{F_1}{\sum_{j=1}^4 (K_{1j} \cdot N_j)} \cdot (0 < \bar{\varepsilon}_1 \leq 1) \quad (4)$$

де ε_{1j} – коефіцієнт заповнення j -го ТЗ.

Залежність витрат палива від швидкості руху ТЗ можна апроксимувати лінійною залежністю.

Отримуємо системи рівнянь з двома невідомими для кожного типу автобуса

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \cdot 60 = 15, \\ \alpha_1 + \beta_1 \cdot 90 = 18,5, \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 8, \beta_1 = 0,117, \begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \cdot 60 = 15, \\ \alpha_2 + \beta_2 \cdot 90 = 16,5, \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = 12, \beta_2 = 0,05$$

$$\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 \cdot 60 = 14, \\ \alpha_3 + \beta_3 \cdot 90 = 11,5, \end{cases} \Rightarrow \alpha_3 = 19, \beta_3 = -0,083, \begin{cases} \alpha_4 + \beta_4 \cdot 60 = 13, \\ \alpha_4 + \beta_4 \cdot 90 = 11, \end{cases} \Rightarrow \alpha_4 = 17, \beta_4 = -0,67.$$

Тоді витрати пального на 1 км. r залежно від швидкості руху для автобусів кожного з чотирьох типів – «Еталон», «Богдан», «Мерседес», «Volkswagen» складатимуть:

$$r_1 = 0,08 + 0,001 \cdot v_1, \quad r_2 = 0,12 + 0,0005 \cdot v_2, \quad (5)$$

$$r_3 = 0,19 - 0,001 \cdot v_3, \quad r_4 = 0,17 - 0,001 \cdot v_4.$$

Враховуючи інші прямі матеріальні витати на обслуговування рухомого складу кожного з чотирьох типів автобусів на 1 км. (заміна масел, шин тощо), отримаємо залежності:

$$\gamma_1 = 1,3 + 0,0175 \cdot v_1, \quad \gamma_2 = 1,9 + 0,0075 \cdot v_2, \quad (6)$$

$$\gamma_3 = 2,95 - 0,0125 \cdot v_3, \quad \gamma_4 = 2,65 - 0,01 \cdot v_4,$$

де γ - загальні витрати на обслуговування автобусів «Еталон», «Богдан», «Мерседес», «Volkswagen» для 1 км.

Позначимо шукані швидкості для чотирьох типів автобусів через x_5, x_7 . Тоді модель мінімізації витрат на обслуговування рухомого складу можна представити як задачу нелінійного програмування у вигляді:

$$V_1 = s_0 \left((1,3 + 0,0175 \cdot x_5 + \frac{z}{x_5}) \cdot x_1 + (1,9 + 0,0075 \cdot x_6 + \frac{z}{x_6}) \cdot x_2 + \right. \\ \left. + (2,95 - 0,0125 \cdot x_7 + \frac{z}{x_7}) \cdot x_3 + (2,65 - 0,01 \cdot x_8 + \frac{z}{x_8}) \cdot x_4 \right) \rightarrow \min \quad (7)$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 \geq F_1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq \frac{1}{\tau_1}, \\ 0 \leq x_j \leq \mu_j, j = 1, 2, 3, 4, \\ 60 \leq x_j \leq 90, j = 5, 6, 7, 8. \end{cases} \quad (8)$$

Висновки. При використанні запропонованих моделей витрати АТП на обслуговування рухомого складу зменшуються в діапазоні 11,8 – 25,5 %, що дуже важливо в умовах постійного зростання цін на паливно-мастильні матеріали.

ЛІТЕРАТУРА

1. Medvedev, M. G. Information technology in the organization of long-distance bus passenger transportation / M. G. Medvedev, L. M. Oleschenko // Electronics and control systems. – 2013. – №4(38). – P. 94-97.
2. Medvedev, M. G. The optimal control models of interurban bus transport / M. G. Medvedev, L. M. Oleschenko // Electronics and control systems. – 2014. – №1(39). – P. 85-90.

63. ПРО НАЛЕЖНІСТЬ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ДО КЛАСІВ ЗБІЖНОСТІ

Оксана Мулява

Національний університет харчових технологій

Вступ. Нехай

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (1)$$

- ціла трансцендентна функція, $M(r, f) = \max \{|f(z)| : |z| = r\}$ і $\mu(r, f) = \max \{|a_k| : k \geq 0\}$ - максимальний член ряду (1). Через Ω позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty; +\infty)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' є

додатною, неперервною і зростає до $+\infty$ на $(-\infty; +\infty)$. Як і в [1], будемо говорити, що ціла функція (1) належить до Φ -класу збіжності, якщо

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{\Phi'(\ln r) \ln M(r, f)}{\Phi^2(\ln r)} d \ln r < +\infty. \quad (2)$$

Зауважимо, що якщо функція (1) має порядок $\rho \in (0; +\infty)$, то, вибираючи $\Phi(\sigma) = e^{\rho\sigma}$, з (2) отримуємо

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{\ln M(r, f)}{r^{\rho+1}} dr < +\infty, \quad (3)$$

тобто f належить до валіронового класу збіжності.

Методи. В [1] отримано такий результат.

Твердження 1. Нехай $\Phi \in \Omega$ і

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{\Phi'(\sigma) \ln \Phi'(\sigma)}{\Phi^2(\sigma)} d\sigma < +\infty. \quad (4)$$

Тоді для того, щоб функція (1) належала до Φ -класу збіжності, необхідно і досить, щоб

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{\Phi'(\ln r) \ln \mu(r, f)}{\Phi^2(\ln r)} d \ln r < +\infty \quad (5)$$

З іншого боку, з теореми 1 з [3] випливає наступне твердження.

Твердження 2. Нехай $\Phi \in \Omega$ і

$$0 < h \leq \frac{\Phi''(\sigma) \Phi(\sigma)}{(\Phi'(\sigma))^2} \leq H < +\infty, \quad (6)$$

Тоді для того, щоб було правильне співвідношення (5), необхідно, а у випадку, коли $|a_k|/|a_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$, і достатньо, щоб

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Phi' \left(\frac{1}{k} \ln \frac{1}{|a_k|} \right)} < +\infty. \quad (7)$$

Зауважимо, що з умови (6) випливає умова (4).

Результати. Тут буде перенесено цей результат на цілі функції багатьох комплексних змінних. Нехай $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, а $\bar{G}_{\mathbb{R}} \in \mathbb{C}^n$ - сім'я замкнених полікругових областей, залежна від параметра $R > 0$ і має таку властивість: $Z \in \bar{G}_{\mathbb{R}}$ тоді і тільки тоді, коли $Z/R \in \bar{G}_1 = \bar{G}$.

Позначимо $d_{\overline{G}}(k_1, \dots, k_n) = \max \left\{ |z_1|^{k_1} \dots |z_n|^{k_n} : Z \in \overline{G} \right\}$ і вважатимемо, що якщо $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \overline{G}$, то $|z_j| \geq l > 0$ для всіх $j = 1, \dots, n$.

Нехай

$$f(Z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{k_1 \dots k_n=0}^{\infty} a_{k_1, \dots, k_n} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} \quad (8)$$

- ціла трансцендентна функція. Прийmemo $M_{\overline{G}}(R, f) = \max \left\{ |f(Z)| : Z \in \overline{G}_R \right\}$ і будемо говорити, що функція (8) належить до Φ -класу збіжності ($\Phi \in \Omega$), якщо

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{\Phi'(\ln R) \ln M_{\overline{G}}(R, f)}{\Phi^2(\ln R)} d \ln R < +\infty. \quad (9)$$

Теорема 3. Нехай функція $\Phi \in \Omega$ задовольняє умови (6), а $\Phi'(\sigma + O(1)) = O(\Phi'(\sigma))$ і $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\sigma + O(1)))$ при $\sigma \rightarrow +\infty$. Прийmemo $A_k = \max \left\{ |a_{k_1, \dots, k_n}| : k_1 + \dots + k_n = k \right\}$. Тоді для того, щоб функція (8) належала до Φ -класу збіжності, необхідно, а у випадку, коли $|A_k|/|A_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$, і достатньо, щоб

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{\Phi' \left(\frac{1}{k} \ln \frac{1}{|A_k|} \right)} < +\infty. \quad (10)$$

Наведемо деякі наслідки доведеної теореми:

Наслідок 1. Нехай функція $\Phi \in \Omega$ задовольняє умови (6) і $\Phi'(\sigma + O(1)) = O(\Phi'(\sigma))$ і $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\sigma + O(1)))$ при $\sigma \rightarrow +\infty$. Тоді, якщо функція (8) належить до Φ -класу збіжності, то

$$\sum_{k_1 \dots k_n=0}^{\infty} \frac{1}{\Phi' \left(\frac{1}{k_1 + \dots + k_n} \ln \frac{1}{|a_{k_1, \dots, k_n}|} \right)} < +\infty.$$

Умови теореми і наслідку 1 задовольняє функція $\Phi(\sigma) = e^{\rho\sigma}$, $0 < \rho < +\infty$. Тому для функцій скінченного порядку правильні наступні твердження.

Наслідок 2. Нехай $A_k = \max \left\{ |a_{k_1, \dots, k_n}| : k_1 + \dots + k_n = k \right\}$. Тоді для того, щоб

$$\int_{R_0}^{+\infty} \frac{\ln M_{\overline{G}}(R, f)}{R^{\rho+1}} dR < +\infty, \quad (11)$$

необхідно, а у випадку, коли $|A_k|/|A_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$, і достатньо, щоб

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |A_k|^{\rho/k} < +\infty.$$

Наслідок 3. Якщо виконується умова (11), то

$$\sum_{k_1 \dots k_n=0}^{\infty} |a_{k_1 \dots k_n}|^{\rho/(k_1 + \dots + k_n)} < +\infty$$

щоб одержати подібні результати для цілих функцій скінченного логарифмічного порядку $p \in (1; +\infty)$, досить вибрати $\Phi(\sigma) = \sigma^p$ для $\sigma \geq \sigma_0$.

Висновки. Доведено теорему, яка є перенесенням результатів з [3] на цілі функції багатьох комплексних змінних та наведено деякі її наслідки..

ЛІТЕРАТУРА

1. Filevych, P. V. On a convergence class entire functions / P. V. Filevych, M. M. Sheremeta // Bull. Soc. Sci. Lettres Lodz 53 Ser. Rech. Deform. – 2003. – Vol. 40. – P. 5-16.
2. Mulyava, O. M. On a convergence class for Dirichlet series / O. M. Mulyava, M. M. Sheremeta // Bull. Soc. Sci. Lettres Lodz 50 Ser. Rech. Deform. – 2000. – Vol. 30. – P. 23-30.

64. ЗАСТОСУВАННЯ КОГНІТИВНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДО УПРАВЛІННЯ НАДСКЛАДНИМИ СИСТЕМАМИ

Наталія Кузьмінська

Національний університет харчових технологій

Вступ. Задача управління підприємством харчової промисловості є комплексною задачею, метою якої є розвиток підприємства. Оскільки підприємство є надскладним механізмом, то в процесі управління ним може виникати ряд нових факторів, зв'язків, які не були виокремлені, враховані і досліджені раніше. Це слід врахувати при виборі методу дослідження.

Методи. При спробах використання інформаційних технологій і автоматизованих систем управління для розв'язання такого роду задач приходиться стикатися з тим, що об'єкт управління не формалізований. Тому в ряді ситуацій важливу роль відіграє суб'єкт управління, тобто особа, що приймає рішення (ОПР), у даному випадку керівник підприємства, який приймає управлінські рішення. Дійсно, аналіз процесів розв'язання задач управління дозволяє виділити два види діяльності: алгоритмізовані дії, які реалізуються комп'ютерами, та «евристичні» дії, які реалізуються людиною. До останніх можна віднести: конструювання базових схем, які визначають моделі і методи управління; експертну оцінку якісних і кількісних значень факторів системи [1].

Для розв'язання нестабільних, слабоструктурованих проблем, які досить часто зустрічаються при управлінні надскладними системами, та управління розвитком ситуацій у таких системах одним із ефективних методів є когнітивне моделювання або когнітивний підхід до моделювання, направлений на розробку формальних моделей і методів, з урахуванням у них когнітивних можливостей (сприйняття,

представлення, пізнання, розуміння, пояснення) суб'єктів управління (ОПР). З позицій когнітивного підходу процес моделювання можна представити у вигляді ланцюга [2]: об'єкт → когнітивна модель → змістовна концептуальна модель → формальна модель (математична, фізична, комп'ютерна).

Основні етапи методології когнітивного моделювання: 1) формулювання та уточнення проблеми і мети дослідження; 2) збір, систематизація, аналіз інформації про об'єкт дослідження і його зовнішнє середовище, визначення потреб умов і обмежень, пов'язаних із досліджуваною ситуацією; 3) виявлення найбільш суттєвих факторів, які впливають на розвиток системи; 4) визначення взаємозв'язків та напрямів впливів і взаємовпливів між факторами, шляхом розгляду каузальних; 5) вивчення характеру і сили взаємовпливів між факторами та їх оцінка; 6) верифікація когнітивної моделі; 7) аналіз і прогноз розвитку ситуації при зміні деяких факторів, для виявлення шляхів і механізмів впливу на досліджувану ситуацію – пряма задача аналізу; 8) розробка стратегічних рішень – обернена задача аналізу ситуацій.

Моделлю у задачах когнітивного моделювання нестабільних, слабоструктурованих систем виступає когнітивна карта [3, 4], яка відображує суб'єктивні уявлення (індивідуальні або колективні) про проблеми або ситуації, пов'язані із функціонуванням і розвитком системи. Основними елементами когнітивної карти є базисні фактори та причинно-наслідкові зв'язки між ними. Математично когнітивна карта представляє собою орієнтований граф, вершинам якого зіставлені фактори, а ребрам – знаки: «+» – позитивний зв'язок, «-» – негативний (знаковий орієнтований граф) або функціональні залежності (функціональний граф).

Задачі аналізу ситуацій на основі когнітивних карт можна розділити на два типи: статистичні і динамічні [4]. Статистичний аналіз, або аналіз впливів – це аналіз поточної ситуації, який полягає у виділенні і співставленні взаємовпливів між факторами (створення каузальних ланцюгів). Динамічний аналіз – це генерація і аналіз можливих сценаріїв розвитку ситуації у часі, тобто аналіз ступені впливу факторів один на одного і, звичайно, на цільові. В обох випадках метою аналізу є формування можливих альтернатив керуючих рішень. Такими альтернативами є множини керуючих факторів, тобто факторів, на зміну яких може безпосередньо впливати ОПР.

Для проведення обох видів аналізу використовують математичний апарат двох типів: апарат лінійних динамічних систем і апарат нечіткої математики.

У лінійній динамічній моделі фактор визначається як змінна, яка приймає значення із деякої числової шкали. Нехай час t – дискретна величина, причому початковому стану системи відповідає нульовий момент часу. Зміна значень факторів у часі задається формулою:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_{j=1}^{k-1} f_{ij} P_j(t) + Q_i(t), t = 0, 1, \dots$$

де $x_i(t)$ – значення i -го фактора у попередній момент часу t , $x_i(t+1)$ – в момент $t+1$, який цікавить ОПР, $P_j(t) = x_i(t) - x_j(t-1)$ – приріст j -го фактора у момент

часу t , f_{ij} – вага впливу фактора y_j на фактор y_i , $Q_i(t)$ – вектор збурень і керуючих дій, що вносяться у i -й фактор, в момент часу t , якщо такі мають місце.

Результати. На основі представленої методології було проведене дослідження впливу різноманітних факторів на результативність інноваційної діяльності підприємств харчової промисловості. Виділення факторів проводилось за допомогою факторного аналізу, що дозволило при створенні когнітивної моделі підприємства поряд з урахуванням впливу випадковості, врахувати додаткові вагомі фактори.

Висновки. Можна виділити основні проблеми, які виникають при побудові когнітивної карти, – виявлення і ранжування факторів, визначення та оцінка взаємозв'язків між факторами. Взагалі, аналітик, який намагається виявити або виділити фактори повинен керуватися як готовими знаннями різних наук, так і власним досвідом та інтуїцією. Різноманітні інтерпретації вершин, ребер і ваги ребер, а також різні функції, які визначають вплив зв'язків на фактори, приводять до різноманітних модифікацій когнітивних карт і засобів їх дослідження. При цьому інтерпретації можуть розрізнятися як у змістовному плані, так і у математичному, тому на вибір моделі впливає задача, яка буде аналізуватися.

ЛІТЕРАТУРА

1. Юдицкий, С. А. Модель взаимодействия сознания и подсознания при решении задач управления / С. А. Юдицкий // Человеческий фактор в управлении. – 2006. – С. 487–493.
2. Прохорова, В. В. Когнитивное моделирование устойчивого экономического развития предприятия / В. В. Прохорова // Экономика предприятия. – 2011. – № 1. – С. 24–30.
3. Горлова, Г. В. Когнитивный анализ, синтез, прогнозирование развития больших систем в интеллектуальных РИУС / Г.В. Горелова, Э. В. Мельник, Я. С. Коровин // Штучний інтелект. – 2010. – № 3. – С. 61–72.
4. Кузнецов, О.П. Анализ влияния при управлении слабоструктурированными ситуациями на основе когнитивных карт / О. П. Кузнецов, А.А. Кулинич, А.В. Марковский // Человеческий фактор в управлении. – 2006. – С. 313–344.

65. ОРТОПРОЕКТОРИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Володимир Шеха

Національний університет харчових технологій

Вступ. Як відомо, лінійний оператор A_M є ортопроектором на підпростір M , якщо $A_M^2 = A_M^* = A_M$. Знайдемо, який вигляд мають ортопроектори в двовимірному просторі, а також покажемо їх застосування у векторній алгебрі.

Методи. Нехай ортопроектор A_M заданий матрицею $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

З умови $A = A^*$ маємо: $a_{11} = \bar{a}_{11}$, $a_{12} = \bar{a}_{21}$, $a_{21} = \bar{a}_{12}$, $a_{22} = \bar{a}_{22}$. Отже, елементи a_{11} і a_{22} є дійсними числами, а елементи a_{12} і a_{21} є комплексно спряженими. Тоді матрицю A можна записати у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ \bar{\lambda} & \beta \end{pmatrix}, \text{ де } \alpha, \beta - \text{дійсні.}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ \bar{\lambda} & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ \bar{\lambda} & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + |\lambda|^2 & \lambda(\alpha + \beta) \\ \bar{\lambda}(\alpha + \beta) & |\lambda|^2 + \beta^2 \end{pmatrix}.$$

З рівності $A^2 = A$ отримуємо систему:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha^2 + |\lambda|^2 \\ \lambda = \lambda(\alpha + \beta) \\ \bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\alpha + \beta) \\ \beta = |\lambda|^2 + \beta^2 \end{cases}.$$

Розв'язавши систему, отримуємо:

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha = 0, \\ \beta = 0 \end{cases}, \begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha = 0, \\ \beta = 1 \end{cases}, \begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha = 1, \\ \beta = 0 \end{cases}, \begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha = 1, \\ \beta = 1 \end{cases}, \begin{cases} \lambda = \sqrt{\alpha - \alpha^2} e^{i\varphi} \\ \beta = 1 - \alpha \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Отже матриці ортопроекторів в двовимірному просторі мають вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{\alpha - \alpha^2} e^{i\varphi} \\ \sqrt{\alpha - \alpha^2} e^{-i\varphi} & 1 - \alpha \end{pmatrix}, \text{ де } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Результати. Узагальнюючи отримані дані, приходимо до висновку, що ортопроектори в двовимірному просторі мають вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{\alpha - \alpha^2} e^{i\varphi} \\ \sqrt{\alpha - \alpha^2} e^{-i\varphi} & 1 - \alpha \end{pmatrix}.$$

Позначивши $\alpha = \cos^2 \gamma$, де $\gamma \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, останню матрицю можна переписати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \gamma & \cos \gamma \sin \gamma e^{i\varphi} \\ \cos \gamma \sin \gamma e^{-i\varphi} & \sin^2 \gamma \end{pmatrix}.$$

Для дійсного простору R^2 даний лінійний оператор буде мати вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2 \gamma & \pm \cos \gamma \sin \gamma \\ \pm \cos \gamma \sin \gamma & \sin^2 \gamma \end{pmatrix}.$$

Знайдемо проекцію вектора $\bar{m} = (x_m; y_m)$ на вектор $\bar{n} = (\cos \gamma; \sin \gamma)$:

$$np_{\bar{n}} \bar{m} = \frac{\bar{m} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|} = \frac{x_m \cos \gamma + y_m \sin \gamma}{\sqrt{\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma}} = x_m \cos \gamma + y_m \sin \gamma.$$

$$A\bar{m} = \begin{pmatrix} x_m \cos^2 \gamma + y_m \cos \gamma \sin \gamma \\ x_m \cos \gamma \sin \gamma + y_m \sin^2 \gamma \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$|A\bar{m}| = \sqrt{(x_m \cos^2 \gamma + y_m \cos \gamma \sin \gamma)^2 + (x_m \cos \gamma \sin \gamma + y_m \sin^2 \gamma)^2} = x_m \cos \gamma + y_m \sin \gamma.$$

Висновки. Отже, в двовимірному просторі існують три види ортопроекторів.

За допомогою ортопроектора можна знайти проекцію довільного вектора $\bar{m}$ на пряму l , яка проходить через початок координат і утворює кут γ з додатнім напрямом осі Ox .

ЛІТЕРАТУРА

1. Муратов, М.А. Конечномерный линейный анализ. I. Линейные операторы в конечномерных гильбертовых (унитарных) пространствах (Н) / М.А. Муратов, В.Л. Островський, Ю.С. Самойленко – К.: Центр учебной литературы, 2012. – 174 с.
2. Луговая, Г.Д. Функциональный анализ. Специальные курсы / Г.Д. Луговая, А.Н. Шерстнев – М.: Изд. ЛКИ, 2008. – 256

2

секція

**Методичні
проблеми
математичної
освіти**

Керівник секції – проф. М.В. Працьовитий
Заступник керівника секції – доц. В.В. Листопад
Секретар секції – доц. В.М. Романенко

1. ОРГАНІЗАЦІЯ НАУКОВО- ДОСЛІДНИЦЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТУДЕНТІВ ФІЗИКО- МАТЕМАТИЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ ВНЗ

**Наталія Шаповалова, Лариса Панченко,
Людмила Процак**
*Національний педагогічний університет імені
М.П. Драгоманова*

Вступ. Університетська освіта має бути орієнтована на розвиток аналітичних і творчих здібностей людини, опанування нею методів самостійного пошуку та активного, цілеспрямованого засвоєння нових знань для забезпечення, перш за все, професійної мобільності, здатності швидко і якісно впроваджувати нові технології. Якість підготовки фахівця у вищому навчальному закладі має особливе значення, оскільки саме на етапі отримання вищої освіти закладається фундамент професії, формується менталітет фахівця, потенціал саморозвитку і самовдосконалення, розвиваються творчі здібності, уміння і навички самоосвітньої науково-дослідницької діяльності студентів (НДДС).

Основним принципом системи освіти повинна стати орієнтація на майбутнє, на ті умови життя і професійної діяльності, які чекають на випускника після закінчення вузу. А одним із напрямків модернізації системи вищої освіти є збільшення акценту на підготовку фахівця, який буде конкурентоспроможним на національному та світовому ринках праці.

Основні положення та результати. Одним з напрямків запровадження Європейської кредитно-трансферної системи (ECTS) в системі вищої освіти України є перегляд підходу до місця науково-дослідної роботи студентів в структурі навчального процесу, методів її організації, а також до особливостей комунікації між викладачем та студентом. Вивчення і дослідження проблеми оптимізації навчального процесу у вищій школі в напрямку підвищення

пріоритетності та вдосконалення організації науково-дослідної роботи студентів як одного з головних видів освітньої діяльності є актуальним і нагальним. Наше завдання полягає у визначенні місця науково-дослідної роботи студентів в структурі навчального процесу згідно з принципами Болонського процесу, аналізі основних особливостей організації науково-дослідної роботи студентів, виявленні ключових коректив, яких потребує поточна структура навчального процесу з метою створення оптимальних умов для виконання студентами науково-дослідної роботи, висвітленні специфіки взаємодії між студентом і викладачем в ході здійснення науково-дослідної роботи.

Вища освіта – це послідовне і прогнозоване формування особистісних здібностей, які визначають ефективність і якість професійної діяльності. Трансформація системи вищої освіти України в напрямку імплементації європейських стандартів передбачає в якості однієї з найважливіших складових підвищення ролі і значення науково-дослідної роботи студентів. Потрібно усвідомлювати, що у принципах Болонського процесу закладений якісно відмінний підхід до навчання у вищій школі, який передбачає стимулювання студентів до освоєння нових знань і власноручного їх аналізу нестандартними творчими шляхами.

Науково-дослідницька діяльність студентів (НДДС) у вищій школі є важливим компонентом підготовки висококваліфікованих кадрів і спрямована на виконання таких основних завдань:

- формування наукового світогляду, оволодіння студентами методологією і методами наукового дослідження; розширення теоретичного кругозору і наукової ерудиції майбутнього фахівця;
- розвиток творчого мислення та індивідуальних здібностей студентів у розв'язанні теоретичних і практичних завдань;
- прищеплення студентам навичок самостійної науково-дослідницької діяльності, залучення їх до розв'язання наукових проблем;
- поглиблення знань у певному науковому напрямі, формування вмінь виконання курсових робіт і дипломних проєктів, підготовки наукових публікацій;
- створення та розвиток наукових шкіл, творчих колективів, підготовка й виховання у вищому навчальному закладі резерву вчених-дослідників, викладачів [5, с. 166-167].

Створення інформаційного суспільства, процеси глобалізації та інтеграції формують нові вимоги до особистості. В умовах розвитку нових технологій різко зростає попит на людей, що володіють нестандартним мисленням, вміють ставити і вирішувати нові завдання. Стрімке зростання рівня сучасних науково-технічних досліджень має прямий вплив на зміст освіти і обумовлює важливість проведення методичної та науково-дослідної роботи по ознайомленню студентів з новими методами і досягненнями нестандартного мислення, спрямованими на розвиток логічного математичного мислення нового покоління. Для цього слід спрямовувати науково-дослідницьку та інноваційну діяльність студентів ще в період їх навчання на забезпечення можливості реалізації запитів та обдарувань особистості студента, на забезпечення і здійснення пошуку ними відповідних «ніш», задач і проблем для отримання нових результатів і реалізації набутих знань, умінь, інтелекту. Для цього корисно залучити їх до активної участі у виконанні різних форм НДДС, які можна поділити на дві групи:

1) ті, що є складовою частиною навчального процесу (підготовка наукових рефератів на задану тему; виконання дослідницьких лабораторних робіт і

домашніх завдань, що містять елементи творчого пошуку; дослідницькі завдання на період усіх видів практики; навчальні наукові семінари; виконання курсових робіт, дипломних (кваліфікаційних) проектів);

2) ті, що виконуються в позалекційний час (робота студентських гуртків і проблемних груп, студентського науково-творчого товариства (СНТ)) [5, с. 167].

Тому виникає проблема заохочення студентів до постійного розвитку і удосконалення своїх знань, умінь і розширення поля інтересів в процесі навчання та проблема розробки нових методичних підходів до його організації. Адже саморозвиток в подальшому часто призводить до появи нових, креативних способів розв'язування задач.

Як показав аналіз психолого-педагогічної літератури, проблема організації якісної науково-дослідницької діяльності студентів у вищій школі є однією з найважливіших складових професійно-педагогічної підготовки майбутніх вчителів математики, фізики та інформатики, про що свідчать дослідження В. М. Шейко, Н. М. Кушнаренко, В. П. Андрущенко, М. Т. Білухи, Ю. І. Горобця, С. М. Торсе, А. А. Лудченко, Я. А. Лудченко, Т. А. Примак, З. І. Слєпкань та інших.

Науково-дослідна робота студентів з кожної дисципліни навчального плану повинна забезпечувати системність знань, використання міжпредметних зв'язків, мобільність і критичність мислення, володіння методами і засобами обробки інформації, вміння застосовувати отримані теоретичні знання для розв'язування типових і нетипових, практичних і прикладних задач, володіння різними засобами навчання, включаючи нові інформаційні технології з використанням відповідного навчально-методичного і інформаційно-програмного забезпечення дисципліни.

Тому основною вимогою до науково-дослідної роботи студентів є її аналітичний, творчий характер.

Підвищення ефективності науково-дослідної роботи неможливо без впровадження нових інформаційних технологій з використанням відповідного навчально-методичного і інформаційно-програмного забезпечення дисципліни. Використання мультимедійних технологій під час вивчення і застосування навчального матеріалу, а також візуалізація наданої інформації дозволяє, наприклад, точним наукам повернути притаманну їм наочність, яка приховується за абстрактністю і складністю понятійного та формульного апарату.

Підвищення пріоритетності науково-дослідної роботи в структурі навчального процесу також має своїм наслідком трансформацію специфіки комунікації між викладачем та студентом. В цьому плані потрібно виокремити дві провідні тенденції – тенденцію до індивідуалізації освітнього процесу та тенденцію до диференціації роботи викладача зі студентами.

Науково-дослідна робота – це метод вищої освіти і засіб індивідуалізації навчання у вигляді навчальної діяльності, в основу якого покладена взаємодія викладача і студентів, яка носить партнерський характер і приймає різні форми в залежності від цілей науково-дослідної роботи. Це вже не просто трансляція нових знань від викладача до студента, а відносини складної співпраці і змістовної комунікації із застосуванням інформаційних технологій та електронних засобів [4]. Педагогічне керівництво науково-дослідною роботою здійснюється у формі порад, консультацій, на засіданнях проблемних груп, виступів на семінарах, гуртках, конференціях, у формі застосування різних методичних прийомів для зацікавленості та активізації роботи студентів для підвищення якості її виконання.

Виходячи з цього, очевидно, що на даному етапі ще багато чого потрібно зробити для налагодження ефективної як для студентів, так і для викладачів,

цікавої, методологічно обґрунтованої науково-дослідної роботи. Науково-дослідна робота студентів на сучасному етапі повинна стати основою вищої освіти. Застосування сучасних технологій, орієнтація на науково-дослідну роботу студентів, впровадження багаторівневої структури освіти сприяє підвищенню якості освіти, зближенню і гармонізації з європейською системою освіти.

Слід зазначити ще необхідність поєднання теоретичних і практичних досліджень, прикладне використання отриманих результатів наукових досліджень. В процесі виконання науково-дослідних робіт студенти мають навчитися узагальнювати результати виконання дослідження, робити висновки та виробляти практичні рекомендації щодо їх впровадження.

Висновки. Оптимальний об'єм, новизна, оптимальна важність, пізнавальний інтерес, колорит, наявність використання міжпредметних зв'язків, поступальний розвиток – це найкращий спосіб засвоєння знань і зацікавлення ними майбутніх вчителів математики, фізики та інформатики.

ЛІТЕРАТУРА

1. Андрущенко, В.П. Науково-педагогічні пошуки молодих / В.П. Андрущенко // Вища освіта України. – 2002. – № 4. – С. 5–7.
2. Горобець, Ю.І. Проблеми організації науково-інноваційної діяльності студентів / Ю.І. Горобець, С.М. Торсе // Наука і сучасність: 36. праць. – К.: 2000. – Вип. 1, ч. I. – С. 5–9.
3. Лудченко, А.А. Основы научных исследований: учебное пособие / А.А. Лудченко, Я.А. Лудченко, Т.А. Примак ; ред. А.А. Лудченко. – 2-е изд., стер. – К.: Знання, 2001. – 113 с.
4. Попков, В.А. Дидактика высшей школы: уч. пос. / В.А. Попков, А.В. Коржуев– М.: Academia, 2001. – 188 с.
5. Слепкань, З.І. Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі: навч. посіб. / З.І. Слепкань. – К.: Вища школа, 2005. – 239 с.
6. Устинко, О. Наукові школи як фундамент вищої освіти / О. Устенко // Психологія і суспільство. – 2002. – № 3–4. – С. 11–19.
7. Шейко, В.М. Організація та методика науково-дослідницької діяльності: Підручник / В.М. Шейко, Н.М. Кушнарєнко. – К.: Знання-Пресс, 2002. – 295 с.

2. О ПРЕПОДАВАНИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН НА ОСНОВЕ УРОВНЕВОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ТЕХНОЛОГИИ

Ольга Пыжкова, Инна Борковская

*Белорусский государственный технологический
университет*

Основной задачей высшего образования является формирование творческой личности специалиста, способного к инновационной деятельности. В современных условиях преподавание общих и специальных математических дисциплин в высшем учебном заведении требует использования технологий, ориентированных на личностно-ориентированное обучение с учетом

образовательных стандартов нового поколения и возможностей личности. Одной из таких образовательных технологий является личностно-ориентированная уровневая образовательная технология, пробуждающая у студентов интерес к приобретению знаний, которая в течение нескольких лет разрабатывается и внедряется в учебный процесс на кафедре высшей математики Белорусского государственного технологического университета.

Изучение специальных математических дисциплин особо важно для будущего специалиста. К таким дисциплинам относятся «Уравнения математической физики», «Планирование и организация эксперимента», «Методы оптимизации и статистической обработки данных», «Эконометрика и экономико-математические методы и модели», «Вычислительная математика» и другие. Например, экономико-математические методы все больше используются для количественного анализа хозяйственной деятельности предприятий, для решения ими конкретных коммерческих задач по оптимизации в условиях использования ограниченных ресурсов, управления запасами и т.д. Часто в практике хозяйствования возникают реальные проблемы, которые могут быть решены на основе моделей теории игр, массового обслуживания, сетевых моделей. Широкое применение для изучения взаимосвязей экономических явлений имеют эконометрические модели.

Уровневая образовательная технология предполагает разграничение материала по уровням трудности (А, Б, С) и выделение обязательного поля знаний по предмету, что является мощным стимулом и дополнительной мотивацией к обучению. Благодаря уровневому подходу у студентов развивается умение планировать, анализировать и оценивать свою учебную деятельность.

Следует отметить, что внедрение информационных технологий в учебный процесс (использование презентационных материалов, электронных учебников, интернет-технологий, специализированных пакетов и др.) позволяет гибко сочетать фундаментальную и прикладную составляющие обучения. Особенностью специальных курсов является направленность на использование изучаемых методов и подходов в будущей профессиональной деятельности. По сравнению со студентами первого курса, старшекурсник, изучающий специальные дисциплины, уже более организован, лучше умеет распределять свое учебное и внеучебное время, способен выполнять все виды и формы учебной деятельности: слушать и записывать лекции, конспектировать, вести спор, анализировать.

В системе образования комплексной проблемой является качество образования. Для хорошего усвоения студентами изучаемой дисциплины необходимо, прежде всего, эффективно использовать все формы аудиторной работы, рационально распределяя материал курса для рассмотрения на лекционных, практических, лабораторных занятиях. В процессе чтения лекций наиболее эффективным оказывается сочетание живого общения с аудиторией с использованием презентационных материалов. Учебные материалы, подготовленные с применением Microsoft PowerPoint, зрительно наглядны и позволяют сконцентрировать внимание студентов на важнейших аспектах лекции. Необходимы примеры, связанные с будущей профессией студентов. Их использование всегда способствует заинтересованному усвоению материала. На

лабораторных занятиях студенты применяют пакеты прикладных программ, знание которых необходимо современному специалисту. Например, для эконометрического моделирования и экономико-математических расчетов эффективно используются надстройки пакета Excel. Для решения оптимизационных задач в условиях ограниченности ресурсов удобно использовать команду «Поиск решения». При проведении лабораторных занятий возможно использование таких систем, как Mathcad, Matlab, STAT3 и др.

Кроме аудиторных занятий, следует широко использовать возможности самостоятельной работы студентов, в том числе и под контролем преподавателя. Самостоятельная работа предполагает использование всех имеющихся источников, начиная от электронного учебника и заканчивая интернет-технологиями. Роль преподавателя состоит в умелом руководстве действиями студента: в обучении методам отбора и анализа информации, в формировании умения выделять главное, обобщать и систематизировать материал, видеть структурные особенности различных классов задач, методы и способы их решения, делать верные выводы и прогнозы, работать с учебной и научной литературой и т.д. Учебно-методические комплексы по специальным математическим дисциплинам разработаны преподавателями кафедры на основе уровневой образовательной технологии. Структурирование информации по уровням и использование в УМК соответствующих уровням обозначений позволяет студенту вначале рассмотреть и усвоить базовый материал дисциплины, а затем постепенно расширять и углублять представление об изучаемых объектах. Наиболее успевающие студенты в результате изучения дисциплины становятся в полном смысле исследователями, заинтересованными в применении полученных знаний к профессиональным задачам высокого уровня. Электронная форма учебно-методических комплексов особенно эффективна и удобна для использования студентами.

В курсах «Планирование и организация эксперимента», «Эконометрика и экономико-математические методы и модели» и других одной из важнейших задач является построение математической модели изучаемого явления. Поэтому на занятиях большое внимание следует уделять построению математической модели, т.к., во-первых, она позволяет сформулировать задачу в ясной, отчетливой форме, во-вторых, построение модели позволяет превратить содержательную экономическую задачу в чисто математическую задачу и использовать при ее решении универсальные математические методы, привлечь для решения вычислительную технику и программные средства. Наилучшим подходом к усвоению студентом материала дисциплины является применение полученных знаний к конкретной практической задаче, связанной со специальностью обучаемого, возможно, с темой курсовой работы. В этой связи представляются уместными согласованные действия преподавателей общеобразовательных и специальных кафедр в интересах получения студентом осмысленных, практически применимых знаний и навыков.

Применение уровневой образовательной технологии является одним из факторов, играющих важную роль в формировании положительной мотивации к изучению как общих, так и специальных математических дисциплин, дающих стимул к личностному развитию и профессиональному росту.

3. МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОННОГО ОБУЧЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ СТАТИСТИКЕ ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И ЭКОНОМИСТОВ

Мариян Илиев

Университет пищевых технологий, Пловдив, Болгария

Введение. Электронное образование появилось совсем недавно и является продуктом стремления современного мира найти более быстрые и эффективные приемы для представления и распространения знаний [1]. Платформы и концепции электронного образования успешно совершенствуются и их развитие находится в самом разгаре. Поэтому не остается иного пути, как подвергнуть конкретному обсуждению следующие проблемы: „Каковы должны быть структура и содержание учебного процесса отдельных дисциплин, чтобы повысить качество преподавания, познавательной активности студентов и развить у них созидательное, системное и глобальное мышление. В этом докладе предлагается модель электронного обучения по прикладной статистике для инженеров и экономистов.

Структура учебного процесса. Учебный процесс включает в себя лекции (30 часов), практические занятия (30 часов), курсовые работы, текущий контроль. Особенно важным для эффективности обучения является последовательность лекций и практических занятий в расписании. Практика показывает, что обучение является более эффективным, если дисциплина изучается на модульном принципе. Обучение по шесть и более дисциплин отражается неблагоприятно на успеваемость студентов.

Учебные залы. Все учебные залы должны быть оборудованными белой доской, интернет связью, мультимедийным проектором с достаточно большим экраном, центрально расположенным на учебной доской. Если зал слишком большой, то пользование микрофоном с тонколонками является обязательным.

WEB страница дисциплины. Страница учебной дисциплины должна содержать ссылку со следующими наименованиями: Лого дисциплины, Аннотация, Учебная программа, Литература, Лекции, Тесты, Упражнения, Задачи, Руководство, Курсовые работы, Курсовые проекты, Матрица компетенций, Часто задаваемые вопросы (с ответами), Система оценивания, Результаты тестов и экзаменов, График (лекции, упражнения, практические занятия, консультации, онлайн консультации), Конспект, Преподаватель, Сообщения, Форум, Статистика посещения сайта.

Структура лекций. Основное содержание лекции представляется в формате PowerPoint, но часть курса представляется в традиционном стиле на доске. Структура лекций содержит

- Цель лекции. Коротко сообщается тема и цель лекции.
- Содержание лекции. Показывается содержание лекции.
- Введение. Мотивировано введение, чтобы привлечь внимание аудитории;
- Геометрическая интерпретация. Акцент на геометрической интерпретации задачи.
- Фотогаллерея с применениями. Просмотр фотогаллереи реальных приложений, связанных с темой лекции.

- Теоретические аспекты

1) Основные идеи. Преподаватель фокусирует внимание студентов на основной идее рассматриваемой темы.

2) Представляются слайды с детальными преобразованиями и доказательствами в легком для понимания формате.

3) Теоретические результаты. Представляются полученные теоретические результаты в разных наглядных редакциях.

- Основные правила и формулы. На отдельных слайдах описываются основные правила и формулы.

- Решение основных задач. Решаются основные задачи на учебной доске. Студентам предоставляются материалы по теме для самоподготовки в doc, rtf, xls, ppt или flv форматах на странице дисциплины.

- Решение задач с компьютером. После решения на доске, задача решается с помощью электронной таблицы MS EXCEL и как правило решение визуализируется.

- Демонстрация смысла и влияния параметров, с использованием скролбаров. После решения задачи с электронной таблицей, с основными параметрами задачи вставляются один или несколько скролбаров, которые настраиваются соответственно, чтобы показать смысл и влияние разных параметров.

- Основные функции в Excel. Описываются используемые на лекции функции в электронной таблице MS Excel.

- Демонстрации

1) Виртуальные симуляции. Используются специальные софтверные симуляторы для демонстрации разных понятий и теорем. Например – Виртуальный борд Гальтона [2], Биномное распределение, Распределение выборочной средней, Центральная граничная теорема, Доверительные интервалы и др.

2) Профессиональный софтвер. Демонстрируется приложение изученного материала, работая с Statistica, SPSS, R и др. программами.

3) Импровизированные демонстрации. Проводятся случайные прогулки в шахматном городе. Демонстрируются свойства треугольника Паскаля. Проверяется правильность игровой кости и/или рулетки. Демонстрируются идеи рассмотренных методов, в которых участвуют случайно выбранные студенты и специальный реквизит.

4) WEB демонстрации Показываются демонстрации в Интернете, иллюстрирующие изучаемую тему.

5) Видео демонстрация. Показывается 5-10 минутный учебный фильм, связанный с изучаемой темой.

- Интервью. Делается интервью (с использованием Skype) с выдающимися учеными и воспитанниками университета о значении изучаемой темы в научных исследованиях и в реальной жизни.

- Исторические справки. Делается короткий исторический обзор развития статистики, а также показываются и хронологические альбомы, посвященные круглой годовщине рождения замечательных ученых, связанных с развитием теории вероятности и статистики.

- Вызовы для развития потенциала студентов

1) Программный код. Например, рассматривается программный код для вычисления биномиальных коэффициентов, Генерирование случайных чисел по заданной плотности распределения и др.

2) Задачи с повышенной трудностью. Целью является развитие потенциала студентов.

3) Фрактальное искусство. Например, указывается возможность получения красивых фрактальных структур, на базе треугольника Паскаля.

- Сотрудничество между преподавателями и студентами

1) Возможность дополнить учебные web ресурсы. Существует возможность сотрудничества между студентами и преподавателями, чтобы обнаружить дополнительные ресурсы в Интернет-пространстве. Эти ресурсы могут быть электронными учебниками, графическими изображениями, видео демонстрациями и др.

2) Возможность улучшить учебные материалы. Существует возможность, чтобы студенты приняли участие в улучшение учебных материалов с привлекательными анимациями, эффектами, переходами, добавлением гиперссылок и др. по предложению преподавателя или по своей инициативе.

- Курсовые задачи. Типовые курсовые задачи предоставляются студентам на любом разделе курса, которые являются почти однотипными, но с разными числами. Они разрабатываются на семинарных упражнениях и дома.

- Курсовой проект. Курсовой проект может быть предложен преподавателем или по инициативе студентов. Тема курсового проекта должна быть оригинальной и относиться к изучаемому материалу. При разработке курсового проекта может участвовать и группа студентов. Курсовой проект представляется и защищается студентом публично с использованием мультимедии.

- Эпилог: Содержит краткий обзор темы.

- Словарь терминов: Содержит список новых понятий на лекции с гиперссылками на соответствующие определения.

Лабораторные занятия. Лабораторные занятия проводятся в компьютерном классе. Ассистент формулирует основные задачи и показывает их решение с электронной таблицей MS Excel, а затем студенты выполняют инструкции, визуализируют решение, вставляют соответствующие скролбары для выяснения влияния разных параметров. После этого студенты решают подобные задачи с различными параметрами. На этих занятиях могут решаться и курсовые задания, а также проверять знания студентов короткими тестами.

Методология оценивания. Итоговая оценка студента зависит от его представления на лекциях, лабораторных занятиях, защиты курсовой задачи, регулярных и спонтанных тестов, итогового экзамена. Используется балловая система и правило трех сигм.

Выводы. Накопленный опыт показывает, что предложенная модель обеспечивает эффективный доступ к учебным материалам, легкому обновлению и воспроизведению учебного содержания, и к качественным консультациям. Модель фокусирует внимание студентов на идеи, развивает их разностороннее и созидательное мышление, создает атмосферу сотрудничества; осуществляет разнообразие и сюрпризы; поощряет диалог между преподавателями и студентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Илиев, М. Модел за електронно обучение по математика за инженери / М. Илиев, П. Певичаров // Национална конференция „Образованието в информационното общество”, Пловдив, 27-28 май 2010. – С.168-177.
2. Илиев, М. Виртуален борд на галтон / М. Илиев // Journal of the technical University at Plovdiv “Fundamental sciences and application”. – 2006. – Vol. 13(11). – P.45-52.

4. ПРОБЛЕМИ ВИВЧЕННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В УНІВЕРСИТЕТІ ОДНІЄЇ З КРАЇН, ЩО РОЗВИВАЮТЬСЯ

Олександр Прип'ік

*Державний університет імені Агостінью Нето, Луанда,
Республіка Ангола*

Вступ. Підготовка інженерних кадрів в країнах, що розвиваються, є важливою складовою побудови сучасної незалежної держави. На цьому шляху виникає чимало труднощів, які допомагають подолати іноземні спеціалісти, запрошені з країн з більш високим рівнем освіти (Португалія, Бразилія, Іспанія, Куба, Франція, Германия, Болгарія, В'єтнам, СНД тощо). Автор цих рядків на протязі останніх років викладає вищу математику у складі департаменту базових наук інженерного факультету. В цьому матеріалі пропонується погляд на деякі проблеми навчального процесу.

Виклад основного матеріалу. Викладання вищої математики в університеті африканської країни має свої особливості, які супроводжуються об'єктивними труднощами. Не так давно в Анголі (до 1975 року португальської колонії) закінчилась громадянська війна, яка тривала на протязі біля 30 років, під час якої сполучення між столицями провінцій було тільки на літаках, що не сприяло поширенню знань. Під час епідемії вірусу Марбург (типу Ебола) в Анголі в деяких провінціях встановлюється карантин на в'їзд і виїзд. Складні погодні умови під час сезону дощів, що спричиняють повені, також заважають постійному навчанню. В 2014 році в країні вперше був проведений перепис населення, в зв'язку з чим на місяць призупинили навчання у вищих учбових закладах.

Підготовка учнів у середній школі Анголи залишає бажати кращого. Рівень підготовки школярів дуже різний: від низького у звичайній школі до досить пристойного у приватних коледжах (португальських, французьких тощо). Але випускники приватних учбових закладів мають змогу продовжити навчання у Португалії, Бразилії, Франції, ПАР і не завжди ідуть до університетів Анголи. Абітурієнти мають проблеми з алгебраїчних перетворень, тригонометрії, практично не володіють геометрією. Хронічна відсутність достатньої кількості вчителів заважає систематичному навчанню. Вступні іспити проводяться у вигляді тестів, перевірка-за допомогою комп'ютерів. Автор останні 10 років керує складанням вступних білетів на факультеті. Працюють підготовчі курси, до роботи на яких залучають кращих викладачів факультету. До державного університету, де навчання безкоштовне, конкурс є набагато вищим, ніж до

приватних вузів. Тому завдання для вступу з математики на інженерному факультеті на протязі останніх років є досить складними. Система оцінок в усіх видах навчання і іспитів португальська (шкала від 0 до 20 балів), зданим вважається іспит з оцінкою 10 балів і вище.

Програми з вищої математики відповідають вимогам португальських навчальних закладів, зокрема Вищого політехнічного інституту у Лісабоні, з яким є творчі зв'язки. Загальні дисципліни читаються на 1-му і 2-му курсах. Вони досить чималі за змістом і за кількістю годин (семестр - 15 тижнів, лекції і практичні - навпіл, навчальна година - 50 хвилин):

Лінійна алгебра і аналітична геометрія (1-й семестр, 120 год.),

Математичний аналіз-1 (1-й семестр, 120 год.),

Математичний аналіз-2 (2-й семестр, 120 год.),

Математичний аналіз-3 (3-й семестр, 90 год.),

Чисельний аналіз (3-й семестр, 90 год.),

Математичний аналіз-4 (4-й семестр, 90 год.),

Теорія ймовірностей і математична статистика (4-й семестр, 90 год.).

Дисципліни читаються у групах за інженерними спеціальностями (як лекції, так і практичні) чисельністю до 80 чоловік. Рівень викладачів не завжди відповідає вищому навчальному закладу. Національних кадрів не вистачає, їх рівень низький. Місцевих викладачів з науковими степенями дуже мало (захист дисертацій відбувався у Португалії, Іспанії, Кубі, ПАР). До практичних занять залучають студентів старших курсів з відмінними знаннями з математики. Літератури у книгарнях мало, а та що є, дуже дорога (середня ціна звичайного підручника з математики 50 доларів). Студенти звичайно передрукуюють копії підручників на ксероксі. Практикується написання викладачами методичок з читаємих курсів. Користуються попитом класичні підручники: Піскунов, Демідович, Нікольський, Берман на португальській мові. Використовуються технічні засоби навчання, зокрема персональні комп'ютери, сполучені з проекторами в аудиторіях. Всі екзамени письмові. На протязі семестру студенти здають 2 часткові екзамени (кожний за обсягом приблизно за половину семестру, тривалість 2 години). Якщо середня величина цих двох екзаменів ≥ 10 , то вона вважається оцінкою за семестр і від подальшого іспиту студент звільнюється. У протилежному випадку він іде на фінальний екзамен (за весь семестр, 3 години), в разі невдачі потім можлива 1 перездача (на тих же умовах). В основному, завдання екзамену становлять задачі, зокрема з практичним змістом. Після кожного екзамену передбачені апеляції, на яких студент може сперечатися з викладачем з приводу оцінки. В місцевих умовах це розглядається, як прояв демократії. Здібна молодь має можливість продовжити навчання (із стипендією) на старших курсах в університетах країн Європи і СНД. Кращі залишаються вчитися там в магістратурі (2-3 роки, із стипендією), деякі не повертаються зовсім.

Кілька років тому сумісними зусиллями викладачів інженерного факультету і наукового факультету (який відповідає нашому педінституту) відкрили підготовку магістрів з математики за спеціальностями: диференціальні рівняння, математична статистика, чисельний аналіз. Учні набиравись викладачі коледжів і вузів віком в середньому від 30 до 45 років. Закінчили і захистились

біля 70% складу тих, хто навчався. В країні нема перегонів за успішністю ні для студентів, ні для магістрів.

Висновки. Навіть такий стислий огляд деяких проблем викладання математики показує потребу копіткої роботи по вдосконаленню цього процесу. Це допомагають здійснити іноземні спеціалісти, запрошені з країн з більш високим рівнем освіти. Плідна співпраця представників різних систем освіти, зокрема у викладанні вищої математики, сприяє покращенню учбового процесу, а отже випускного рівня знань майбутніх інженерів. Це є вагомим внеском у підготовку національних кадрів молодшої країни.

5. МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ РІЗНИХ ТИПІВ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Василь Олександрович Горбачук

*Національний педагогічний університет імені
М.П. Драгоманова*

Вступ. В доповіді розглядаються методики розв'язання різних типів задач математичної статистики з використанням інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ). Формулюються методичні рекомендації щодо змісту та форм використання програмних засобів при розв'язанні таких задач.

Основні положення та результати. Існує багато класифікацій математичних задач в тому числі і щодо рівня складності. В нашій доповіді вважаємо за доцільне використати класифікацію відповідно до вимог необхідного рівня навчання. Попередньо слід відзначити, що ми використовуватимемо рівні навчання запропоновані відомим педагогом В.П. Безпалько. Він виділяє 4 рівні навчання. I-й рівень - знання-знайомства. Його ознаки - вміння учня/студента впізнати, розрізнити знайомий йому раніше предмет, явище, певну інформацію. Цьому рівню відповідають задачі на *алгоритмічне* знаходження розв'язку. II-й рівень - знання-копії. Ознаки цього рівня - вміння переказати, репродукувати раніше засвоєну навчальну інформацію. Задачі для цього рівня також мають бути на алгоритмічне знаходження розв'язку. III-й рівень - знання-уміння. Його найважливіші ознаки - вміння застосувати отримані знання у практичній діяльності. Тут задачі вже мають бути *частково алгоритмічні*. IV –й рівень - знання-трансформації, вміння перенести отримані раніше знання на вирішення нових завдань, нових проблем. Це рівень творчості. На цьому рівні мають використовуватися *евристичні* задачі або задачі на знаходження творчого розв'язку [1].

Для розв'язання кожного з цих типів задач при навчанні математичної статистики вважаємо за доцільне використовувати інформаційно-комунікаційні технології, зокрема програмний засіб MS Excel, який на сьогодні є найпоширенішим і одним з найбільш простих у використанні, хоча і не охоплює всього спектру функціоналу для вирішення задач з математичної статистики.

Класифікувавши задачі таким чином, ми проаналізуємо основні типи задач з математичної статистики за схемою: *тип задачі — змістовий модуль, при вивченні якого доцільно використовувати — можливості ІКТ при розв'язанні даного типу задач — приклади таких задач.*

1. *Задачі на алгоритмічне знаходження розв'язку.* Задачі такого типу можна використовувати протягом всього періоду вивчення курсу математичної статистики, починаючи з первинної обробки емпіричних даних і закінчуючи елементами дисперсійного аналізу. Проте, найдоцільніше їх використовувати при вивченні тем «Первинна обробка емпіричних даних» і «Статистична оцінка параметрів розподілу» для побудови варіаційного ряду, полігону частот та гістограми, знаходження емпіричної функції розподілу, обчислення основних числових характеристик вибірки, точкових та інтервальних оцінок генеральної сукупності, знаходження довірчих інтервалів. В цьому випадку ІКТ виступають у ролі помічника при обчисленні, що допомагає заощадити час на розв'язання поставлених задач.

Приклад задачі. Дається вибірка об'єму n . Потрібно: 1) побудувати варіаційний ряд; 2) побудувати гістограму, полігон частот; 3) обчислити вибіркове середнє, дисперсію і середнє квадратичне відхилення, медіану, моду.

x_i	3,31	3,34	3,40	3,42	3,44	3,47	3,48
n_i	7	12	16	22	18	14	11

2. *Задачі на частково алгоритмічне знаходження розв'язку.* Такі задачі найдоцільніше використовувати при вивченні тем «Статистична перевірка статистичних гіпотез», «Елементи регресійного та кореляційного аналізу». Ці задачі використовуються для:

- перевірки гіпотез про: середнє значення нормального розподілу при відомому середньому квадратичному відхиленні, середнє значення нормального розподілу при невідомому середньому квадратичному відхиленні, дисперсію нормального розподілу, рівність двох середніх значень, рівність двох дисперсій, тип розподілу генеральної сукупності;

- визначення наявності та щільності взаємозв'язків між показниками, обрахунку лінійного коефіцієнта кореляції та кореляційного відношення, обчислення лінійних та узагальнених вибіркових регресійних моделей та їх параметрів.

Тут ІКТ також, перш за все, використовуються для спрощення розрахунків однак ці технології вже можуть використовуватися і для здійснення певної дослідницької діяльності. Наприклад, якщо в задачі запитують: «При якому рівні надійності γ можна підтвердити або спростувати певну гіпотезу?». При розв'язанні такої задачі студенту потрібно змінюючи рівень надійності досягти необхідного результату.

Приклад задачі. Дається вибірка об'єму n . Потрібно: висунути гіпотезу про закон розподілу генеральної сукупності (нормальний, рівномірний, показниковий); за допомогою критерію Пірсона перевірити висунуту гіпотезу.

x_i	4	5	7	8	9	11	14
n_i	32	20	16	11	9	7	4

$$n = 100, \quad a = 0,1$$

3. *Евристичні задачі або задачі на знаходження творчого розв'язку.* Задачі даного типу доцільно використовувати під час вивчення тем «Елементи регресійного та кореляційного аналізу» та «Елементи дисперсійного аналізу». Ці задачі використовуються для:

- перевірки гіпотез про: середнє значення нормального розподілу при відомому середньому квадратичному відхиленні, середнє значення нормального розподілу при невідомому середньому квадратичному відхиленні, дисперсію нормального розподілу, рівність двох середніх значень, рівність двох дисперсій, тип розподілу генеральної сукупності;
- побудови регресійних моделей, обчислення лінійних та узагальнених вибірових регресійних моделей та їх параметрів, перевірки на адекватність лінійних та узагальнених вибірових регресійних моделей;
- проведення однофакторного, двофакторного та багатофакторного аналізу зв'язних та незв'язних виборок.

Для розв'язання таких задач ІКТ має обов'язково використовуватись вже не тільки як помічник у розрахунках, а й як засіб для знаходження правильного шляху (алгоритму) розв'язання поставленої задачі. Такі задачі мають носити більш прикладний характер.

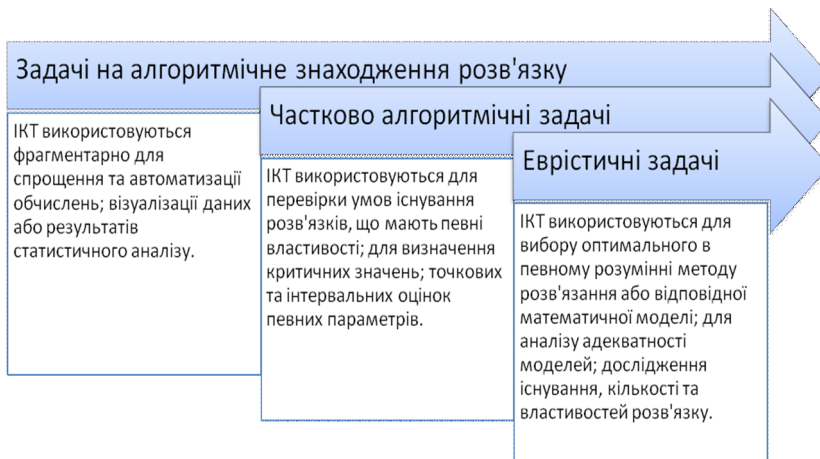
Приклад задачі 1. Проводилося дослідження втулок (нижньої і верхньої), що використовуються при роботі фрезерувальної установки. Зокрема досліджувалась температура до якої нагрівались ці втулки під час роботи установки заданий період часу. За наданими в таблиці значеннями температури (в умовних одиницях) нижньої і верхньої втулок дізнатись, чи є істотними відмінності цих показників.

Установка №		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Втулка	верхня	32	44	56	77	82	102	45	39	98
	нижня	29	47	83	67	99	107	56	37	81

Приклад задачі 2. Електролампочки напругою 220В виготовлялися на трьох заводах із використанням різних технологій. З кожної партії, що надходили у науково-дослідний інститут від кожного заводу, навмання брали по чотири електролампочки і піддавали їх випробуванням на тривалість горіння. Результати експерименту наведені у таблиці [3]:

Ступінь впливу фактора А (технології виготовлення)	Тривалість горіння (годин)
A_1	90, 82, 109, 95, 101
A_2	95, 110, 107, 97, 89
A_3	76, 96, 89, 102, 83

Висновки. Підсумовуючи вищесказане, представимо загальні рекомендації щодо використання ІКТ для розв'язання різних типів задач з математичної статистики. Можна представити у вигляді наступної схеми:



ЛІТЕРАТУРА

1. Беспалько, В.П. Программированное обучение (дидактические основы) / В.П. Беспалько– М.:«Высшая школа», 1970.
2. Турчин, В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. / В.Н. Турчин. — Д.: «Изд-во Днепропетр. Нац. ун-та», 2008. —656с.
3. Осадчук, Ю.О. Математична статистика / Ю.О. Осадчук. — Ж.:ЖДУ імені Івана Франка, 2008.

6. ВПЛИВ ВІДБОРУ І ФОРМУВАННЯ ГРУП У ВНЗ НА МЕТОДИКУ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ

Оксана Петрученко, Лев Величко, Ольга Хитряк

Академія сухопутних військ імені гетьмана

Петра Сагайдачного

Вступ. Математика відіграє велику роль у розвитку особистості, в становленні її світогляду, мисленні та інших якостей. Математика займає одне з провідних місць в системі загальної середньої освіти, допомагає підготувати кожного члена суспільства до повсякденного життя та до трудової діяльності.

Сучасний розвиток виробництва та інформаційних технологій ставить перед вищими навчальними закладами вимогу високоякісної підготовки випускників ВУЗів та прищеплення їм бажання до самостійного вивчення наукових здобутків. Виникає потреба виховання у ВУЗі особистості, яка здатна адаптуватися до швидкозмінних технічних процесів у світі. Існуючі технології навчання дозволяють випускати незначний відсоток кваліфікованих спеціалістів, які досягнули високого рівня знань і вмінь внаслідок своїх природних здібностей. Основна маса випускників навчальних закладів не відповідає в повній мірі

сьогоднішнім вимогам з боку виробництва. Однак, найбільш поширенні технології навчання студентів не відповідають вимогам сьогодення, тому виникає потреба в розробці нових технологій навчання.

Для підготовки висококваліфікованих спеціалістів, конкурентоспроможних на світовому ринку праці, для господарської діяльності та науки слід забезпечити належний рівень математичної підготовки студентів, тому що математика відіграє важливу роль у формуванні таких якостей сучасного фахівця, як професіональна компетентність, творче мислення, здатність до самостійної наукової роботи. Математика є мовою інженерних досліджень та розрахунків, основою вивчення фізики, астрономії, хімії, загально технічних і спеціальних дисциплін. Математичні методи та математичне моделювання широко використовуються для розв'язання практичних задач в різних галузях науки, техніки, економіки, виробництва. Зокрема методи теорії ймовірностей широко використовуються у різноманітних галузях природничих та технічних наук: у теорії надійності, теорії масового обслуговування, у теоретичній фізиці, геодезії, астрономії, теорії стрільби, теорії помилок спостережень, теорії автоматичного управління, загальної теорії зв'язку та в багатьох інших теоретичних та прикладних науках. Цим пояснюється необхідність тісного зв'язку викладання математики з потребами професії. В Україні зроблено вже досить багато в плані підвищення, якості математичної підготовки фахівців. Але, потрібне подальше удосконалення даної системи з урахуванням відповідних соціально-політичних та економічних змін у суспільстві та цілеспрямоване застосування активних методів, нових технологій навчання, які спрямовані на перебудову й вдосконалення навчально-виховного процесу і підготовку фахівців до професіональної діяльності в умовах розвитку ІТ технологій. Нові особливості, цілі та задачі навчальної діяльності будуть визначати елементи інноваційних методик навчання математичних дисциплін студентів вищих технічних навчальних закладів. Безперечно, актуальним є дослідження також проблеми реалізації професійної спрямованості навчання математики студентів технічних університетів та створення системи заохочувань рівня знань математики студентом.

Виклад основного матеріалу. Авторами розроблена методика навчання студентів, яка скерована на більшу індивідуалізацію та інтенсифікацію навчального процесу. Ця методика має матеріальне забезпечення, яке дозволяє використовувати її при навчанні студентів вищої математики. Вона впроваджена в навчальний процес на кафедрі інженерної механіки Академії сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного у місті Львові.

На початку семестру студенти у групі мають, переважно, різнорівневу підготовку. Вони не звикли до тривалої праці над освоєнням нового матеріалу, характеризуються невмінням здійснити самоконтроль рівня знань і вмінь, та мають завищені самооцінки їх рівня.

Низький рівень математичної підготовки деяких студентів суттєво впливає на методику проведення практичного заняття викладачем. Викладач змушений знижувати рівень викладання математики та зменшувати кількість питань розглянутих на практичному занятті. Однак це негативно позначається на студентах із задовільним рівнем знань математики. Вони марнують свій

навчальний час, оскільки творчий здобуток цих студентів на занятті незначний, їх потенціал вимагає вищого рівня викладання математики та більшого об'єму розглянутого матеріалу.

Методика навчання базується на використанні трьох ступенів пізнання нової теми:

- перша ступінь – студент самостійно розв'язує задачу, яку викладач попередньо пояснив, і самостійно контролює хід розв'язування задачі (прикладу), використовуючи законспектоване розв'язування задачі викладачем, її застосовують для студентів з недостатньою математичною підготовкою;

- друга ступінь – кожний студент розв'язує відповідну індивідуальну задачу із «Завдань для проведення практичного заняття», котра відмінна від задачі попередньо розв'язаної викладачем і відмінна від задач, які розв'язують інші студенти, наприклад, іншою розрахунковою схемою, наявністю інших числових даних або елементарних функцій, однак не є відмінна у використанні методів розв'язування;

- третя ступінь – студент перевіряє повне засвоєння теми, винесене на практичне заняття, розв'язуючи задачі (приклади) із «Вправ для самостійної роботи» або розв'язуючи задачі та приклади із збірників інших авторів, її застосовують для студентів з високим рівнем знань з математики.

Кожна тема висвітлена в 4-5 завданнях, які охоплюють весь матеріал, необхідний для засвоєння студентом під час практичного заняття. По кожній темі розроблено вісім варіантів «Завдань для проведення практичного заняття». Усі варіанти завдань однотипні та містять певні відмінності, які, однак, суттєво не впливають на метод розв'язування задачі. Для кожної теми пропонуються «Вправи для самостійної роботи» і «Завдання для проведення контрольної роботи».

Практичне заняття рекомендується проводити у такій послідовності:

- викладач нагадує студентам основні положення нової теми і розв'язує найпростішу задачу з цієї теми;

- студенти самостійно розв'язують першу задачу з отриманих варіантів «Завдань для проведення практичного заняття», а викладач у цей час контролює їхню роботу та допомагає студентам засвоїти основи теми;

- наступні задачі по темі викладач не розв'язує у повному об'ємі на дошці, але наголошує на нових елементах у цих задачах;

- студенти самостійно розв'язують всі задачі із «Завдань для проведення практичного заняття»;

- викладач контролює розв'язування задач кожним студентом та відповідає на його конкретні питання.

Студенти, які розв'язали в повному об'ємі свої приклади із «Завдань для проведення для практичного заняття» мають можливість перевірити свій рівень засвоєння нового матеріалу розв'язуючи задачі підвищеної складності з «Вправи для самостійної роботи».

Пропонована методика дозволяє студентам встановити взаємозв'язок між рівнем засвоєння теми та вмінням його використати для розв'язку конкретних задач, забезпечує індивідуалізацію та диференціацію навчання студентів. Рівень

засвоєння методики розв'язування типових задач і прикладів, запропонованих у посібнику, студент може перевірити розв'язуючи:

- приклади із «Завдання для проведення практичного заняття»;
- приклади, запропоновані у «Вправи для самостійної роботи»;
- приклади і задачі із збірників інших авторів.

Використовуючи пропоновану методику викладач по завершенні практичного заняття може реально оцінити рівень засвоєння теми кожним студентом та надати йому рекомендації, як покращити свій рівень знань по цій темі.

Висновки. Вказана методика буде ефективною у ВУЗах, де формування груп здійснюється в залежності від початкового рівня знань математики студентом, що в подальшому зробить вагомий внесок для засвоєння курсу вищої математики, а разом з тим студенту легко буде самостійно працювати, оцінювати свої здібності і рухатись вперед (розвиватись), що в свою чергу в майбутньому відобразиться на професійній компетентності і комунікабельності спеціаліста. Проблема відповідності знань, вмінь та навичок, які спеціаліст отримав у вищому навчальному закладі, запитам суспільства, стала особливо актуальною в умовах відсутності системи державного розподілу випускників. В ринкових умовах висока якість підготовки спеціаліста є одним з визначальних факторів знаходження ним свого місця на ринку праці та подальшого професійного зросту. Сьогодні роботодавці, особливо у приватному секторі, вже не будуть витрачати час і гроші на перепідготовку спеціаліста безпосередньо на робочому місці, як це мало місце в умовах планової економіки. Враховуючи багаторічний досвід викладання певних технічних дисциплін за вказаною методикою, можна відмітити її ефективність, гнучкість та значну результативність у порівнянні із класичними способами викладання. Вказана методика відображена в наступних навчальних посібниках:

1. Методика розв'язування і збірник завдань з лінійної алгебри та аналітичної геометрії: Л.Д. Величко. Навчальний посібник. – Львів: АСВ, 2011. – 197 с.

2. Методика розв'язування та збірник завдань з математичного аналізу: Навчально-методичний посібник / Величко Л.Д., Сокіл М.Б., Хитряк О.І. – Львів: АСВ, 2014. – 248 с.

3. Методика розв'язування і збірник завдань з диференціальних рівнянь: Навчальний посібник / Л.Д. Величко. – Львів: АСВ, 2013. – 198 с.

4. Методика розв'язування та збірник завдань з теорії ймовірності: Навчально-методичний посібник / Л.Д. Величко. – Львів: АСВ, 2013. – 190 с.

5. Методика розв'язування і збірник завдань з теоретичної механіки. Навчальний посібник. Видання друге, доповнене, перероблене. / В.В. Божидарник, Л.Д. Величко. – Луцьк «Надстир'я», 2007. – 504с.

6. Термодинаміка та теплопередача в пожежній справі. Навчальний посібник. / Л.Д. Величко, Р.Я. Лозинський, М.М. Семерак. – Львів « СПОЛОМ», 2011. – 504 с.

ЛІТЕРАТУРА

1. Васильченко, І. Сучасна математика та її викладання / І. Васильченко //Вища школа. – 2001. – № 6. – С. 33-37.

7. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЙ РОЗВИТКУ АНАЛІТИЧНОГО МИСЛЕННЯ В У МОВАХ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ

Світлана Шевченко, Юлія Жданова

Державний університет телекомунікацій

Вступ. Сучасний етап розвитку системи вищої освіти не є можливим без застосування останніх досягнень в області інформаційних технологій, зокрема дистанційного навчання. Таким чином, процес інформатизації освіти актуалізує питання щодо використання потенціалу інформаційно-комунікаційних технологій: 1) для оптимальної організації навчально-пізнавальної діяльності студентів; 2) для розвитку мислення студентів, підвищення рівня їх самоосвіти, формування умінь розробляти та будувати індивідуальну стратегію навчання з врахуванням здібностей та мотиваційної сфери особистості. У нашому дослідженні під поняттям «аналітичне мислення» ми розуміємо комплексну здатність людини (студента) швидко і усвідомлено здійснювати розумові операції, щоб орієнтуючись на суттєві ознаки об'єктів та явищ, правильно оперувати поняттями та, підпорядковуючись законам логіки, виводити наслідки з даних умов і прогнозувати інші рішення [3]. Вважаємо, що формування аналітичного мислення студентів є можливим не тільки під час аудиторних занять, але й в умовах дистанційного навчання.

Основні положення та результати. Аналіз психолого-педагогічної літератури [1,2] показав, що однозначного розуміння терміну «дистанційне навчання» не існує. На нашу думку, дистанційне навчання – це інтенсивна самостійна навчально-пізнавальна діяльність суб'єкта з міцною організаційною та комунікаційною підтримкою тьютора (викладача) та з використанням інформаційно-комунікаційних технологій; практично не залежить від розташування у просторі та часі.

Впровадження технології розвитку аналітичного мислення студентів у дистанційну форму навчання у процесі вивчення математичних дисциплін Державного університету телекомунікацій включало наступні етапи.

1) Розробка організаційно-методичної документації, яка містить:

- робочу навчальну програму дисципліни;
- навчально-методичний комплекс (теоретичні положення, відео-лекції, зразки виконання вправ та задач, лабораторний практикум, варіанти розрахунково-графічних робіт та зразки їх виконання, типові контрольні роботи, питання та задачі до іспиту, задачі підвищеної складності (для тих, хто любить математику), тести для контролю та самоконтролю.

2) Процес навчання математики:

- самостійна навчально-пізнавальна діяльність, яка спрямована на засвоєння математичних знань та їх застосування при розв'язанні задач;
- онсультації з викладачами (обмін файлами у мережі Інтернет; Skype);
- робота в групах (відео-конференція) перед підготовкою до іспиту;
- виконання контрольних робіт з електронною пересилкою;
- виконання тестів.

Розробка навчально-методичного комплексу та його впровадження у дистанційне навчання під час вивчення математики має бути схожим на процес дослідження у математиці, відкриття нового знання для студента, тобто імітувати творчу діяльність. Зрозуміло, що у цьому випадку викладання націлено не на передачу наукового теоретичного матеріалу, а на організацію активного пошуку студентами знань, які складають зміст запропонованої системи знань, потім логічно упорядковують їх. Все це має ефект розвитку аналітичного мислення студентів та розуміння математичного матеріалу, що вивчається. У зв'язку з цим виділяємо три основні етапи навчальної діяльності студентів у процесі вивчення математичних дисциплін:

- математичний опис конкретних ситуацій, прикладів або вивчення емпіричного матеріалу та його математизація;
- логічне упорядкування одержаного результату, тобто побудова абстрактної теорії з даної теми;
- застосування математичної теорії при розв'язанні вправ та задач.

Така навчальна діяльність студентів мотивує на вивчення математики, на активне включення в дослідження, сприяє розвитку аналітичного мислення [3].

Система дистанційного навчання у Державному університеті телекомунікацій базується на відкритому програмному забезпеченні – системі MOODLE. Вивчаючи математичні науки у дистанційній формі навчання студент має можливості: знайомитися з програмою, метою, завданнями курсу та методичними рекомендаціями для його вивчення; консультуватися у викладача (тьютора); надсилати викладачу контрольні, лабораторні та розрахунково-графічні роботи, вивчати додаткову літературу, запроповану у програмі курсу; користуватися електронною бібліотекою університету. У процесі навчання студенти проходять три етапи контролю знань: тренувальне тестування; контрольне тестування у кінці розділу, у разі успішного проходження якого студент допускається до вивчення наступного розділу, підсумкове тестування (залік або іспит).

Висновки. Як підсумок, потрібно відмітити, що електронний навчально-методичний комплекс дисципліни «Вища математика» пройшов апробацію у процесі вивчення математики стаціонарної, заочної та дистанційної форм навчання. У ході проведеного експерименту було визначено, що основними факторами, які гарантують успішне дистанційне навчання, а отже й розвиток мислення, є якість освітнього контенту, навички самостійної роботи студентів, висока кваліфікація у цьому питанні викладачів та матеріально-технічне забезпечення навчального процесу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кухаренко, В.Н. Практикум дистанционного обучения / Под ред. В.Н. Кухаренко. – 2-е издание. – К.: Миллениум, 2008. – 196 с.
2. Полат, Е.С. Педагогические технологии дистанционного обучения: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Е.С. Полат, М.В. Моисеева, А.Е. Петров и др.; под ред. Е.С. Полат. – М.: ИЦ «Академия», 2006. – 400 с.
3. Шевченко, С.М. Розвиток аналітичного мислення студентів вищих технічних навчальних закладів у процесі вивчення математичних дисциплін: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02 – теорія та методика навчання (математика) / С.М.Шевченко. – К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2013. – 20 с.

8. ЗАСТОСУВАННЯ ЕВРИСТИЧНИХ ПРИЙОМІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ВЛАСТИВОСТЕЙ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ЗІ СТУДЕНТАМИ ІНЖЕНЕРНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Галина Тулученко, Наталя Старун,
Тетяна Селуянова

Херсонський національний технічний університет

Вступ. В умовах тотального скорочення аудиторних годин на вивчення курсу вищої математики для студентів інженерних спеціальностей значна кількість теоретичних положень дисципліни залишається поза увагою слухачів. Так, поняття рівності значень невизначених інтегралів часто не має свідомого розуміння у студентів.

Ціллю публікації є ознайомлення читачів з досвідом авторів створення проблемних ситуацій при вивченні властивостей та методів обчислення невизначених інтегралів, які наочно ілюструють тлумачення рівності значень невизначених інтегралів.

Основні положення та результати. За досвідом авторів у студентів традиційно викликають інтерес приклади невизначених інтегралів, які можуть бути розв'язані різними методами. Зацікавленість значно підсилюється, коли отримані відповіді відрізняються за зовнішнім виглядом. У роботі [1] розглядаються такі приклади при інтегруванні тригонометричних виразів. Нижче наводяться приклади отримання тотожних значень невизначених інтегралів, які мають різний вигляд, при обчисленні іншими методами.

Приклад 1. В залежності від способу інтегрування виразу dv у невизначеному інтегралі $\int (ax+b) \cdot \ln(ax+b) dx$ ($ax+b > 0$), що обчислюється методом інтегрування частинами, отримуємо відповіді, які відрізняються на константу:

$$\begin{aligned} \text{Перший спосіб } \int (ax+b) \cdot \ln(ax+b) dx &= \left\| \begin{array}{ll} u = \ln(ax+b) & du = \frac{adx}{ax+b} \\ dv = (ax+b) dx & v = \frac{1}{2a} \cdot (ax+b)^2 \end{array} \right\| = \\ &= \frac{1}{2a} \cdot (ax+b)^2 \cdot \ln(ax+b) - \frac{1}{2} \cdot \int (ax+b) dx = \frac{1}{2a} \cdot (ax+b)^2 \cdot \ln(ax+b) - \frac{1}{4a} \cdot (ax+b)^2 + C_1 = \\ &= \frac{1}{4a} \cdot (ax+b)^2 \cdot (2 \ln(ax+b) - 1) + C_1. \end{aligned}$$

Другий спосіб

$$\int (ax+b) \cdot \ln(ax+b) dx = \left\| \begin{array}{ll} u = \ln(ax+b) & du = \frac{adx}{ax+b} \\ dv = (ax+b) dx & v = a \frac{x^2}{2} + bx = \frac{1}{2} \cdot (ax^2 + 2bx) \end{array} \right\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot (ax^2 + 2bx) \cdot \ln(ax+b) - \frac{a}{2} \cdot \int \frac{ax^2 + 2bx}{ax+b} dx = \\
&= \frac{1}{2} \cdot (ax^2 + 2bx) \cdot \ln(ax+b) - \frac{a}{2} \cdot \int \left(x + \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} \right) dx = \\
&= \frac{1}{2} \cdot (ax^2 + 2bx) \cdot \ln(ax+b) - \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + \frac{b}{a}x - \frac{b^2}{a^2} \cdot \ln(ax+b) \right) + C_2 = \\
&= \frac{1}{4} \cdot (ax^2 + 2bx) \cdot (2\ln(ax+b) - 1) + \frac{b^2}{2a} \cdot \ln(ax+b) + C_2.
\end{aligned}$$

Приклад 2. Для однозначності висновків розглянемо квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ з цілими коефіцієнтами ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) та додатнім дискримінантом $D > 0$. При обчисленні невизначених інтегралів виду $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$, коли квадратний тричлен має дробові корені, застосування методу виділення повного квадрата у знаменнику і методу розкладання підінтегрального виразу на суму елементарних дробів приводить до відповідей, які також відрізняються на константу.

Введемо позначення. Нехай перший корінь є цілим $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = u \in \mathbb{Z}$, а другий корінь є дробовим $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{v}{a}$, тоді $\sqrt{D} = a(x_1 - x_2) = au - v$.

За таких позначень, пропускаючи очевидні перетворення, отримаємо:
Перший спосіб

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} &= \int \frac{d\left(ax + \frac{b}{2}\right)}{\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4}} = \frac{1}{\sqrt{D}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{D}}{2ax + b + \sqrt{D}} \right| + C_1 = \\
&= \frac{1}{au - v} \ln \left| \frac{a(x - u)}{ax - v} \right| + C_1.
\end{aligned}$$

Другий спосіб

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \int \frac{dx}{(ax - v)(x - u)} = \frac{1}{au - v} \cdot \left(\int \frac{dx}{x - u} - a \int \frac{dx}{ax - v} \right) = \frac{1}{au - v} \ln \left| \frac{x - u}{ax - v} \right| + C_2.$$

Висновки. Авторами запропонована підбірка прикладів невизначених інтегралів, які в залежності від методу розв'язування, мають тотожні, але різні за виглядом відповіді. Приклади розглянуті у загальному вигляді для зручності тиражування варіантів завдань для студентів. При практичному застосуванні прикладів пропонується наведені способи розв'язання розглядати під час

аудиторних або факультативних занять, а пошук причин розбіжностей у розв'язках виносити для самостійної роботи студентів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Тулученко, Г.Я. Организация самоконтроля знаний студентов с помощью СКМ Maple при изучении методов интегрирования тригонометрических выражений / Г.Я. Тулученко // Матеріали VII Міжнародної науково-практичної конференції "Ключові проблеми сучасної науки". — Софія: "Бял ГРАД-БГ" ОДД. — 2011. — Т. 27. Педагогічні науки. — С. 43—46.

9. ПРО МЕТОДИКУ НАВЧАННЯ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ. СТВОРЕННЮ ЯКІСНИХ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Олександр Школьний

*Національний педагогічний університет імені
М.П. Драгоманова*

Вступ. У зв'язку з утвердженням в Україні тестування як основної форми проведення підсумкового оцінювання якості навчальних досягнень з математики учнів старшої школи (ДПА з математики та ЗНО з математики). Особливої актуальності набуває вміння випускників педагогічних університетів і практикуючих вчителів розробляти якісні тестові завдання.

Для належної підготовки учнів старшої школи до згаданих стандартизованих тестувань, вчителі математики мають постійно використовувати тестові завдання в навчальному процесі: для проведення поточного оцінювання у вигляді окремих тестових завдань різних форм, «літучок» і самостійних робіт (на уроці та вдома), а також для проведення тематичного, семестрового та річного оцінювання у вигляді комбінованих комплексів тестових завдань (тестів, контрольних робіт тощо).

При цьому, враховуючи специфіку конкретного учнівського колективу, далеко не завжди наявна методична література дає можливість користуватися готовими тематичними тестами чи окремими тестовими завданнями. З цієї причини багато вчителів математики змушені розробляти тестові завдання різних видів та форм самостійно. А для цього вони мають знати основні підходи до створення якісних тестових завдань з математики, до яких були би незастосовні технології вгадування відповідей без демонстрації належних знань, умінь і навичок (компетентностей).

Основні положення та результати. Свого часу в роботі [1] ми акцентували увагу на тому, що переважна більшість із наявних на сьогодні публікацій у галузі тестології не враховують предметну специфіку тестування з математики і стосуються, в більшості своїй, лише загальних принципів побудови тестів, а також статистичних методів оцінювання якості окремих завдань за їх психометричними характеристиками. Окремі тестові завдання та комплекси тестових завдань з різних предметів, зокрема, з математики, використовуються при цьому лише в якості окремих прикладів реалізації цих загальних принципів.

Слід відзначити, що в багатьох ситуаціях абстрактні психометричні характеристики як окремих компонентів тесту (тестових завдань), так і тесту в цілому, дають лише часткові підстави до висновку про їх якість. Особливо це стосується тих випадків, коли окреме тестове завдання чи тест окрім контролюючої компоненти має ще й навчальну та розвиваючу.

Публікацій, які б стосувалися саме предметної специфіки аналізу якості тестових завдань з математики, а також методики навчання розробки якісних тестових завдань з математики для бакалаврів та магістрів спеціальності «Математика*» педагогічних університетів практикуючих учителів у системі їх неперервної освіти, на даний момент нами не виявлено.

Водночас, хочеться звернути увагу на те, що існує достатня кількість публікацій у науково-методичній літературі, що стосуються підготовки магістрів спеціальності 8.18010022 «Освітні вимірювання», зокрема, в педагогічних університетах. Однак, у цих публікаціях основний акцент також зроблено саме на загальних підходах і принципах створення якісних тестових завдань, а також на методології та методиці розрахунку апостеріорних статистичних характеристик окремих тестових завдань та їх комплексів.

На нашу думку, такий стан речей є природним, оскільки за ОКХ та ОПП спеціальності 8.18010022 «Освітні вимірювання» магістри, які за нею навчаються, після закінчення навчання мають стати або керівниками закладів (відділів) з оцінювання якості освіти, або фахівцями з освітніх вимірювань і працювати здебільшого в аналітичних і технічних відділах, які забезпечують належний рівень якості організації та проведення стандартизованих оцінювань на кшталт ДПА та ЗНО. Тому при підготовці таких фахівців предметна специфіка створення якісних тестових завдань не є пріоритетною.

Разом із тим, створювати якісні окремі тестові завдання з математики та їх комплекси повинні вміти практично всі випускники педагогічних університетів та практикуючі вчителі математики. При цьому якраз вони, на нашу думку, мали би добре розбиратися саме в предметній специфіці та методиці забезпечення якості тестових завдань з математики, оскільки саме на їх плечах лежить основний тягар підготовки учнів до стандартизованих оцінювань. Від умінь вчителів математики створювати власні якісні тренувальні тестові завдання залежать результати українських старшокласників під час ДПА та ЗНО з математики.

Відзначимо також, що в наявній науково-методичній літературі значну увагу приділено розрахунку психометричних характеристик якості тестових завдань та їх комплексів (тестів). При цьому зауважимо, що, взагалі кажучи, будь-яке завдання з математики, незалежно від форми його подання (з варіантами відповіді, з короткою відповіддю, з повним поясненням тощо), можна вважати тестовим завданням, тобто завданням, яке перевіряє ті чи інші знання, уміння, навички (компетенції) учнів. Інша річ, що сам термін «тестове завдання» у багатьох випадках є далеко не завжди вдалим, оскільки, як уже згадувалося, крім контролюючої компоненти тестове завдання може мати ще й навчальну, розвиваючу і виховну.

Дійсно, в окремих випадках тестове завдання з математики може мати «погані» психометричні характеристики (наприклад, низький коефіцієнт

дискримінації), однак колективний розбір такого завдання учителем разом із учнями на уроці може мати значний позитивний ефект, який у подальшому призведе до підвищення якості математичної підготовки цих учнів. У такому випадку формально «неякісне» за психометричними характеристиками тестове завдання можна вважати якісним у відповідності до мети, яку переслідує автор цього завдання.

У доповіді ми висвітлимо предметну специфіку аналізу якості тестових завдань з математики, а також наведемо зміст курсу за вибором студента «Створення якісних тестових завдань з математики» для підготовки бакалавра напряму підготовки 6.040201 «Математика*» педагогічних університетів.

Висновки. Проблема забезпечення якості завдань з математики та комплексів цих завдань (тестів, контрольних робіт тощо) є чи не найголовнішою частиною загальної проблеми забезпечення якості математичної освіти, а якість математичних завдань та їх комплексів, що пропонуються учням у процесі навчання на різних його етапах, є визначальним фактором для забезпечення належної ефективності цього процесу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Школьний, О.В. Оцінювання навчальних досягнень з математики учнів старшої школи: актуальність розробки теоретико-методичних засад і термінологічний аспект проблеми. / О.В. Школьний // Математика в сучасній школі. – 2013. - № 12. – С.12-16.

10. ДОСВІД ЗАСТОСУВАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ ПРИ ПЕРЕВІРЦІ НАВИЧОК ОБЧИСЛЕННЯ ДЕЯКИХ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Галина Тулученко, Інна Вигоднер,
Анастасія Лукашова

Херсонський національний технічний університет

Вступ. Застосування тестових завдань закритої форми із множинним вибором, або на відновлення відповідності частин має достатньо обмежену доцільність у курсі вищої математики. Оскільки така перевірка знань студентів не дає можливості відслідковувати причини появи помилкових відповідей. Практика показує, що виконання таких тестів для студентів, які мають задовільну математичну підготовку, є занадто легкими, а для студентів, які не мають такої підготовки, виконання тестів перетворюється на випадковий вибір відповідей.

Ситуація змінюється у разі застосування цієї форми контролю при індивідуальній роботі із студентами, що мають проблеми із успішністю. Зокрема, при відпрацюванні навичок обчислення табличних інтегралів, які мали бути сформовані при вивченні шкільного курсу математики.

Ціллю публікації є ознайомлення читачів з досвідом авторів застосування тестових завдань, вказаних вище видів, при формуванні у студентів навичок обчислення табличних інтегралів виду

$$\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}, \int \frac{dx}{x^2 \pm a^2} \text{ та } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}}.$$

Основні положення та результати. Тести першого рівня містять завдання на встановлення відповідності між заданими невизначеними інтегралами та запропонованими до них відповідями. Тести другого рівня передбачають вибір однієї правильної відповіді серед множини запропонованих до кожного інтеграла окремо.

Таблиця 1

Зразок варіанту тестів першого рівня на встановлення відповідностей

Задані інтеграли		Відповіді	
1)	$\int \frac{dx}{x^2 - 49}$	А)	$\frac{1}{14} \ln \left \frac{x-7}{x+7} \right + C$
2)	$\int \frac{dx}{x^2 - 49}$	Б)	$\frac{1}{14} \ln \left \frac{x+7}{x-7} \right + C$
3)	$\int \frac{dx}{x^2 + 49}$	В)	$\frac{1}{7} \operatorname{arctg} \frac{x}{7} + C$
4)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 49}}$	Г)	$\ln \left x + \sqrt{x^2 + 49} \right + C$
5)	$\int \frac{dx}{49 - x^2}$	Д)	$\ln \left x + \sqrt{x^2 + 49} \right + C$
6)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 49}}$	Е)	$\arcsin \frac{x}{7} + C$

Таблиця 2

Зразок завдання із тестів другого рівня на вибір правильної відповіді

$\int \frac{dx}{x^2 - 49}$	A	B	C	D
	$\arcsin \frac{x}{7} + C$	$\frac{1}{7} \operatorname{arctg} \frac{x}{7} + C$	$\frac{1}{14} \ln \left \frac{x-7}{x+7} \right + C$	$\frac{1}{14} \ln \left \frac{x+7}{x-7} \right + C$

Тести третього і четвертого рівнів є аналогічними до тестів першого і другого рівнів відповідно, але вимагають при обчисленні невизначених інтегралів додатково користуватися властивістю: якщо

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

тоді

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C, \text{ де } k, b \in R; k \neq 0.$$

Таблиця 3

Зразок варіанту тестів третього рівня на встановлення відповідностей

Задані інтеграли		Відповіді	
1)	$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 3}}$	А)	$\frac{1}{10\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}x}{10} + C$
2)	$\int \frac{dx}{\sqrt{64 - 25x^2}}$	Б)	$\frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \left \frac{3x - \sqrt{2}}{3x + \sqrt{2}} \right + C$
3)	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 5}}$	В)	$\frac{1}{26\sqrt{3}} \ln \left \frac{\sqrt{3}x + 13}{\sqrt{3}x - 13} \right + C$
4)	$\int \frac{dx}{169 - 3x^2}$	Г)	$\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left \sqrt{5}x + \sqrt{5x^2 - 3} \right + C$
5)	$\int \frac{dx}{9x^2 - 2}$	Д)	$\frac{1}{5} \arcsin \frac{5x}{8} + C$
6)	$\int \frac{dx}{7x^2 + 100}$	Е)	$\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left \sqrt{3}x + \sqrt{3x^2 + 5} \right + C$

Таблиця 4

Зразок завдання із тестів четвертого рівня на вибір правильної відповіді

$\int \frac{dx}{3x^2 + 4}$	A	B	C	D
	$\frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left \frac{\sqrt{3}x + 2}{\sqrt{3}x - 2} \right + C$	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}x}{2} + C$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}x}{2} + C$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left \sqrt{3}x + \sqrt{3x^2 + 4} \right + C$

Для тестів другого і четвертого рівнів наведено для прикладу по одному невизначеному інтегралу.

Висновки. Практичний досвід авторів показує, що відпрацювання навичок обчислення табличних невизначених інтегралів вказаних видів у запропонованій послідовності, дозволяє запобігати припущенню студентами типових помилок. Наступним кроком є застосування тестів відкритої форми, які легко створюються на основі наведених у тезах тестів закритої форми.

11. ВИКОРИСТАННЯ КРАТНИХ ІНТЕГРАЛІВ В ОБЛАСТІ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Анжеліка Мотайло, Світлана Моїсєнко,
Тетяна Ляхович

Херсонський національний технічний університет

Вступ. При викладанні курсу вищої математики для студентів інженерних спеціальностей технічних навчальних закладів викладачі, як правило, віддають перевагу класичній літературі [1, 2], яка, до речі, стала широко доступною

завдяки всесвітній мережі Internet. Деякі відвідувачі лекцій, що є достатньо підготовленими та самостійними, шукаючи зв'язок між точними дисциплінами, ставлять цікаві запитання, мотивуючи викладачів ілюструвати прикладний характер дисципліни відповідно до напряму слухачів. Зокрема, механічне застосування n -кратних інтегралів може бути темою для дискусії, пов'язаною із розв'язанням лабораторних задач, запропонованих студентам при вивченні фізики, опору матеріалів, тощо.

Ціллю публікації є отримання аналітичних формул обчислення моменту інерції твердого тіла відносно довільної осі обертання для оцінки точності результатів експериментального розв'язку даної задачі.

Основні положення та результати. Нехай деяке тверде тіло V , щільність якого у кожній точці визначається функцією координат $\rho = \rho(x, y, z)$, обертається навколо нерухомої осі l . Знайти момент інерції тіла V відносно осі обертання.

За теоремою Штейнера [3] момент інерції I твердого тіла відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції I_C цього тіла відносно осі l_C , що проходить через центр мас C паралельно даній осі l , та добутку маси m тіла на квадрат відстані d між осями, тобто

$$I = I_C + md^2.$$

За правилами обчислення маси m та моменту інерції I_C тіла V маємо:

$$m = \int_V \rho \, dv ;$$

$$I_C = \int_V r^2 \rho \, dv ;$$

де dv - елемент об'єму (площі, довжини) тіла V , r - відстань від елемент dv до осі l_C .

Нехай вісь l_C задана напрямом одиничного вектору $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$, тоді момент I_C може бути представлений квадратичною формою[4]:

$$I_C = \vec{s} \cdot \hat{J} \cdot \vec{s}^T, \quad (1)$$

де $\hat{J}$ - тензор інерції, матриця якого складається з компонент центробіжних моментів:

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix},$$

$$J_{xx} = \int_V (y^2 + z^2) \rho \, dv ; \quad J_{yy} = \int_V (x^2 + z^2) \rho \, dv ; \quad J_{zz} = \int_V (x^2 + y^2) \rho \, dv ;$$

$$J_{xy} = J_{yx} = \int_V xy \rho \, dv ; \quad J_{xz} = J_{zx} = \int_V xz \rho \, dv ; \quad J_{yz} = J_{zy} = \int_V yz \rho \, dv ;$$

де x, y, z - координати довільної точки елементу dv .

Таким чином, формула (1) має вигляд квадратичної форми:

$$I_C = s_x^2 J_{xx} + s_y^2 J_{yy} + s_z^2 J_{zz} - 2s_x s_y J_{xy} - 2s_x s_z J_{xz} - 2s_y s_z J_{yz} \quad (2)$$

Відстань d між осями знайдемо як відстань центру мас $C(x_C, y_C, z_C)$ від прямої l , заданої канонічними рівняннями $\frac{x-x_0}{s_x} = \frac{y-y_0}{s_y} = \frac{z-z_0}{s_z}$:

$$d = \sqrt{\left((x-x_C)s_y - (y-y_C)s_x\right)^2 + \left((x-x_C)s_z - (z-z_C)s_x\right)^2 + \left((y-y_C)s_z - (z-z_C)s_y\right)^2}.$$

Зауважимо, що (x_0, y_0, z_0) - деяка точка, що належить осі обертання l .

Координати центру мас відповідно знаходимо за формулами:

$$x_C = \frac{1}{m} \int_V x \rho dv; y_C = \frac{1}{m} \int_V y \rho dv; z_C = \frac{1}{m} \int_V z \rho dv.$$

Очевидно, що отримані формули можуть бути адаптовані для тіла $V \in R^n$ шляхом обчислення n -кратних інтегралів по n -мірній області V .

При експериментальному розв'язанні даної задачі в умовах лабораторії у деяких обчисленнях немає потреби, наприклад, при знаходженні маси m тіла, відстані d між осями обертання. При цьому точне інтегрування замінюють чисельним. Але такий спосіб розв'язання задачі містить, як найменше, похибки вимірювальних пристроїв та обчислювальну. Наявність аналітичного розв'язку дозволяє оцінити експериментальну похибку та доцільність використання точних формул обчислення моменту інерції твердого тіла відносно довільної осі обертання.

Висновки. У даній роботі наведено низку загальних формул для обчислення моменту інерції твердого тіла відносно довільної осі обертання, що можуть бути використані при виконанні лабораторних робіт з фізики студентами інженерних спеціальностей для оцінки похибки експериментального способу отримання відповідного результату для тіл достатньо простих (у сенсі можливості інтегрування по об'єму, площі, довжини) геометричних форм.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. Т. 2.: Учебник для вузов / Н.С. Пискунов. — М.: Наука, 1985. — 560 с.
2. Бугров, Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. — М.: Наука, 1988. — 510 с.
3. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. — 7-е изд. — М.: Высшая школа, 2001. — 542 с.
4. Павленко, Ю.Г. Лекции по теоретической механике / Ю.Г. Павленко. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 392с.

12. ПРАКТИЧНА ПЕРЕВІРКА ПРОГНОЗОВАНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МОДИФІКОВАНИХ БАЗИСІВ ТРИКУТНОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА II ПОРЯДКУ

Станіслав Безердян, Тетяна Білоусова,
Галина Тулченко

Херсонський національний технічний університет

Вступ. У тих випадках, коли ознайомлення студентів із методом скінченних елементів (СЕ) за діючою програмою відбувається оглядово, методичну цінність представляють приклади, на яких можна наочно показати можливості адаптації базисів до типу розв'язуваної задачі, зв'язки прогностичних характеристик базисів із точністю отримуваних розв'язків, провести порівняльний аналіз точності та ефективності застосування кількох обчислювальних методів тощо. Комерційні програмні продукти та вільне програмне забезпечення, що реалізують метод СЕ, не дозволяють користувачу отримувати інформацію з більшості із перелічених вище питань. Це, в свою чергу, приводить до формального застосування методу без розуміння його сутності та без можливості набуття студентом досвіду свідомого застосування методу.

Ціллю публікації є ознайомлення читачів з досвідом авторів ознайомлення студентів інженерних спеціальностей із прогностичними потужностями локальних характеристик базисів, які використовуються в методі СЕ.

Основні положення та результати. У роботі [1] описано побудову за методом Рітца гармонічного базису $\{NR\}$ для СЕ II порядку у формі правильного трикутника. У роботі [2] виконано порівняльний аналіз локальних характеристик стандартного базису $\{NS\}$ та гармонічного базису $\{NR\}$.

Певні переваги має у застосуванні аналогічний СЕ у формі прямокутного рівнобедреного трикутника: він придатний для сполучення із прямокутними СЕ, наявність рівних сторін має позитивно впливати на обумовленість матриці жорсткості [3].

Тому, узагальнюючи результати робіт [1-2] нескладно побудувати гармонічний базис $\{NR\}$ для СЕ II порядку у формі прямокутного рівнобедреного трикутника. При цьому зберігається суперечлива динаміка змін таких локальних характеристик як число обумовленості матриці Грама та величина сліду матриці жорсткості (теплопроводності) при переході від стандартного до гармонічного базису. За числом обумовленості матриці Грама гармонічному базису прогноуються гірші апроксимаційні властивості, ніж стандартному базису, а величиною сліду матриці жорсткості (теплопроводності) – кращі.

Розглянемо задачу про відновлення стаціонарного температурного поля $u(x; y)$ у квадратній області зі стороною $a=1$ за таких граничних умов: на границях $x=a$ і $x=0$ підтримується температура $u(0; y) = u(a; y) = 0^\circ \text{C}$; на границях $y=0$ і $y=a$ підтримується температура $u(x; 0) = u(x; a) = x \cdot (a - x)^\circ \text{C}$.

За методом відокремлення змінних (методом Фур'є) дана задача має такий аналітичний розв'язок:

$$u(x; y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{(2n-1)\pi(a-y)}{a} \right) + B_n \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{(2n-1)\pi y}{a} \right) \right) \cdot \frac{\sin \left(\frac{(2n-1)\pi x}{a} \right)}{\operatorname{sh}((2n-1)\pi)},$$

$$\text{де } A_n = B_n = \frac{8}{(2n-1)^3 \pi^3}.$$

Розв'яжемо цю задачу також МСЕ із розглянутими базисами. Для цього розділимо квадрат на 8 трикутних СЕ. МСЕ з різними базисами приводить до розв'язків, які найбільшу похибку мають у центрі квадрата (табл. 1). Таким чином, гармонічний базис $\{NR\}$ має гірші апроксимаційні властивості, що відповідає прогнозу за числом обумовленості матриці Грама, а не за величиною сліду матриці теплопровідності.

Крім того, маємо приклад, коли перехід до гармонічного базису привів до погіршення точності розв'язку задачі Діріхле, що суперечить відомостям із літератури з методу СЕ [3-4].

Таблиця 1

Температура поля в центрі квадрата

Спосіб розв'язування	Температура	Відносна похибка, %
Метод Фур'є	0,10266	—
МСЕ з $\{NS_i\}$	0,1000	2,59
МСЕ з $\{NR_i\}$	0,0918	10,58

Висновки. Розглянутий приклад ілюструє нестандартну ситуацію, що може виникати при реалізації методу СЕ. Методична цінність цього прикладу визначається наявністю аналітичного розв'язку, який отриманий іншим обчислювальним методом, що дозволяє оцінювати прогностичну потужність застосованих у методі СЕ локальних характеристик базисів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Тулученко, Г.Я. Побудова базисів скінченних елементів, які адаптовані до виду граничної задачі (Повідомлення 1) / Г.Я. Тулученко, О.В. Котова, С.І. Безердян // Вісник ХНТУ. — 2014. — □ип.. 3 (50). — С. 502—505.
2. Безердян, С.І. Дослідження динаміки змін показників якості базисів при їх модифікації / С.І. Безердян, Т.П. Білоусова, Г.Я. Тулученко // Матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції "Сучасні енергетичні установи на транспорті і технології та обладнання для їх обслуговування" (м. Херсон, 01-03 жовтня 2014 р). — Херсон: вид-во ХДМА, 2014. — С. 353-354.
3. Пашковский, А.В. Численно-аналитические методы стандартных элементов для моделирования стационарных физических полей в линейных кусочно-однородных и нелинейных средах: дис. ... доктора техн. наук : 05.13.18 / Александр Владимирович Пашковский. — Новочеркасск, 2014. — 364 с.
4. Юлдашев, О.И. Проекционно-сеточные методы для решения нелинейных эллиптических задач с дифференциальными операторами векторного анализа: автореф. дисс. на соискание учен. степени д-ра физ.-мат. наук : спец. 01.01.07 / Олег Ирикевич Юлдашев. — М., 2010. — 36 с.

13. ОСОБЛИВОСТІ ВПРОВАДЖЕННЯ КОМП'ЮТЕРНОЇ ТЕХНІКИ НА ЗАНЯТТЯХ МАТЕМАТИКИ У ВИЩОМУ НАВЧАЛЬНОМУ ЗАКЛАДІ

Ірина Семенишина

*Подільський державний аграрно-технічний
університет*

Алла Ткачук

Національний університет харчових технологій

Вступ. Стрімкий науково-технічний прогрес, суцільна інформатизація та комп'ютеризація суспільства, виникнення нових технологій виробництва, розвиток інформаційно-комунікаційних технологій потребують висококваліфікованих фахівців, які можуть швидко адаптуватися до нових умов на виробництві та на світовому ринку праці. Система вищої освіти України зобов'язана готувати таких спеціалістів для науки та народного господарства. Теоретична і практична значущість методики комп'ютерних технологій навчання вищої математики стала причиною вибору проблеми дослідження, яка полягає у пошуку й реалізації шляхів і засобів організації і впровадження комп'ютерних технологій у процес навчання математики.

Основні положення та результати. В умовах розбудови української держави докорінно змінюється ситуація у вищій освіті, гостро постає необхідність її модернізації та розвитку. У національній доктрині розвитку освіти України у XXI столітті, Державній програмі "Інформаційні та комунікаційні технології в освіті і науці", наголошується на необхідності запровадження у навчально-виховний процес особистісно-розвивальних технологій, зокрема інформаційно-комунікативних. Слід зазначити, що наявність комп'ютерної техніки є важливим фактором розв'язання проблеми комп'ютеризації навчання студентів. Для ефективного впровадження інформаційних технологій науково-педагогічним працівникам необхідно знати цілі та завдання, провідні тенденції, напрями та шляхи впровадження інформаційних технологій у навчально-виховний процес вищого навчального закладу. Слід усвідомлювати можливості комп'ютерної техніки та спеціалізованого програмного забезпечення в поданні навчального матеріалу та в управлінні пізнавальними діями студентів. Одним із шляхів розв'язання означеної проблеми є впровадження в освітній процес інформаційних технологій навчання. Треба глибоко знати основи психолого-педагогічної теорії як підґрунтя розробки комп'ютерних технологій навчання. Необхідно володіти методикою роботи зі спеціалізованими програмами для управління пізнавальними діями студентів.

Вагомий внесок у теорію і практику використання інформаційних технологій навчання зробили А. Андрєєв, Я. Ваграменко, А. Єршов, О. Дмитрієва, К. Колін, Т. Назарова, В. Леонов та інші. В працях цих науковців розглянуто шляхи підвищення, ефективності навчання з використанням технічних засобів навчання, проблеми комп'ютеризації при викладанні дисциплін. Використання сучасних інформаційних технологій в освітньому процесі створює реальні можливості підвищення якості освіти. У розвитку певних інформаційних освітніх технологій

вирішальну роль повинна відігравати вища школа, серед першочергових завдань якої є створення електронних бібліотек, розвиток дистанційного навчання, застосування різних пакетів прикладних програм під час вивчення дисциплін математичного циклу. При таких умовах вищі навчальні заклади можуть стати важливими джерелами інформаційних і телекомунікаційних послуг для установ середньої, загальної і професійної освіти, при цьому важливою ланкою є загальноосвітня школа.

Важливо спостерігати за європейським досвідом і знати останні нововведення та проекти в означеній галузі. Необхідно вживати конкретні заходи щодо впровадження інформаційних технологій у системі середніх і вищих навчальних закладів. Теоретична і практична значущість, недостатня розробленість методології і методики комп'ютерних технологій навчання вищої математики з'явилися причиною вибору проблеми дослідження, яка полягає у пошуку та реалізації шляхів організації комп'ютерного навчання математики у вищому навчальному закладі, впровадження комп'ютерних технологій у процес навчання математики.

При застосуванні комп'ютерної техніки у навчальному процесі є багато позитивного, а саме: а) комп'ютери розширюють можливості програмного навчання; б) колір, графіка, мультиплікація, музика, відео викликають інтерес у студентів до навчального матеріалу, підвищують ефективність сприймання інформації; в) за допомогою комп'ютера можна краще пояснити принципи дії складних механізмів і машин; г) комп'ютер відкриває доступ до баз даних. Використання комп'ютерних технологій, спрямованих на проведення лабораторних робіт, семінарів чи лекцій дозволить поєднати традиційне й комп'ютерне навчання, змінити методи і зміст традиційного навчання, зблизити процес навчання і процес наукового дослідження, розвинути вміння й навички з комп'ютером при проведенні численних експериментів. Одним з найбільш важливих елементів у системі навчання є контроль знань, умінь і навичок, що супроводжує усі види навчальної діяльності. Без здійснення контролюючої функції не можна здійснювати керування процесом навчання. Широкого застосування набувають тестуючі і контролюючі комп'ютерні програми. Експерти відзначають, що саме при проведенні контролю знань і умінь комп'ютер використовується в навчальному процесі з найбільшою ефективністю. Безумовно, використання тесових завдань сумісно з іншими видами перевірки є досить ефективним інструментом, що стимулює підготовку студентів до кожного заняття й підвищує мотивацію до досліджуваного предмета. Використання комп'ютерних технологій, призначених для контролю знань, дозволять усунути можливість списування й підказок, підвищити об'єктивність оцінки за рахунок відсутності суб'єктивного фактору, пов'язаного з особистістю викладача, підвищити пізнавальну активність студентів. Використання комп'ютерних продуктів для індивідуальної роботи, самопідготовки є важливим чинником у розвитку пізнавальної діяльності студентів, удосконаленні, закріпленні й практичному застосуванні набутих знань. Цілеспрямована робота викладачів з формування та розвитку пізнавальної активності студентів – гарант підвищення якості засвоєння студентами навчального матеріалу, розвитку їх мислення тощо. Значні дидактичні можливості для підвищення рівня пізнавальної активності

мають нові інформаційні технології. Можна виділити групу найважливіших чинників активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів, ефективність яких може бути підсилена за рахунок застосування у навчальному процесі новітніх інформаційних технологій:

- розвиток мотивації, посилення інтересу до навчання;
- надання переваги активним методам навчання;
- підвищення наочності навчання;
- розвиток мислення, інтелектуальних здібностей студентів;
- розвиток самостійності;
- індивідуалізація та диференціація навчання;
- використання різноманітних форм знань: поєднувати традиційну лекцію з виступами студентів, лекції із застосуванням мультимедіа, розв'язування задач, виконання завдань із використанням комп'ютерних математичних пакетів;
- розширення кола задач і вправ, проведення лабораторних робіт у процесі навчання математичним дисциплінам;
- опанування сучасних методів наукового пізнання, пов'язаних із застосування комп'ютерів;
- спрощення та збільшення швидкості доступу до навчальної та наукової інформації через мережу Internet.

На заняттях з математичних дисциплін знання повинно виступати не як готовий результат, а як результат певного роду дослідницької діяльності, і саме ця діяльність та її способи повинні стати предметом засвоєння шляхом її активного відтворення у співпраці студентів між собою та з викладачем, який організовує та спрямовує цей процес. Впровадження комп'ютерних технологій у навчальний процес породило новий різновид лекцій – електронну лекцію. Вона може бути текстовою, звуковою, візуальною. Така лекція надає студенту можливості обрати бажаний темп та порядок роботи над лекцією. Проведення занять з математики за допомогою відомих математичних пакетів типу Maple, Mathcad і Mathematica дозволяє студентам одержати навички, необхідні в подальшій практичній діяльності, розвиває їх аналітичне мислення, дає можливість здійснювати інтеграцію математики з іншими галузями науки.

Головними тенденціями розвитку інформативно-комунікативних технологій у вищій освіті є розширення спектра самостійної роботи студентів внаслідок використання нових можливостей і зростання творчого компонента навчальної діяльності. Персональний комп'ютер і телекомунікаційні технології дали поштовх для створення нових навчальних матеріалів – електронних освітніх ресурсів, які здатні забезпечити реалізацію різних компонентів освітнього процесу. При цьому багато видів навчальної роботи, які традиційно проводяться в аудиторії за участю викладача, (лабораторні, експерименти, диспути, тренінги) легко переносяться в сектор самопідготовки. Створення єдиного освітньо-наукового інформаційного середовища у вищому навчальному закладі дозволить ефективно використовувати інформаційно-комунікативні технології для проведення аудиторних, зокрема лабораторних, занять з математики, контролюючих заходів і, особливо для самостійної роботи студентів денної, заочної та дистанційної форм навчання.

Висновки. Таким чином, інформаційно-комунікативні технології це новий педагогічний інструмент, повноцінне використання якого відкриває перспективи впровадження інноваційних педагогічних технологій. Метою освітан є необхідність дати студентам таку освіту, впроваджуючи нові педагогічні технології у навчальний процес, щоб відтворити і передати їм досвід минулої та сучасної культури, підготувати молодь до наступної діяльності, забезпечити набуття студентами фундаментальних і технічних знань, високих моральних якостей особистості, розвиток інтелектуального і творчого потенціалу, винахідливості, ініціативи, почуття нового, здатності адаптуватися до умов, що швидко змінюються, підготувати студентську молодь до професійної і самостійної науково-дослідної діяльності. Перспективним напрямом у вирішенні означеної проблеми є рішення вказаних задач, орієнтованих на поглиблення та розширення теоретичної бази знань з дисциплін математичного циклу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Васильченко, І. Сучасна математика та її викладання / І. Васильченко // Вища школа. – 2001. - №6. – С. 33-37.
2. Гриценчук, О.О. Досвід і напрями діяльності інформаційної освітнянської мережі ЮНЕСКО для розвитку освітніх процесів України / О.О. Гриценчук // Засоби і технології єдиного інформаційного освітнього простору. – Київ: Атіка, 2004. – С. 199-203.
3. Некрашевич, В.В. Математичні проблеми ХХІ століття / В.В. Некрашевич, В.І. Суцанський // У світі математики. – 2011. – Т. 7, №. 1.- С. 6-11.
4. Триус, Ю.В. Інноваційно-комунікаційні технології навчання математики / Ю.В. Триус, М.Л. Бакланова // Матеріали IV Всеукраїнської конференції молодих науковців, Черкаси, квітень 2010р. – ч. 2. – С. 68-69.

14. ОРГАНІЗАЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ЕЛЕКТРОННОГО ПІДРУЧНИКА

Андрій Мозолюк

*Подільський державний аграрно-технічний
університет*

Тетяна Мозолюк

Кам'янець-Подільський індустріальний коледж

Вступ. Практична підготовка майбутніх фахівців має бути на високому рівні, а тому студенти повинні активно працювати і під контролем викладача на заняттях, і самостійно, максимально використовуючи можливості технічних засобів навчання, які наповнені відповідним програмним забезпеченням.

На сучасному етапі розвитку педагогіки не потрібно нікого переконувати у важливості комп'ютеризованого навчання для активізації пізнавальної діяльності студентів.

Стрімкий процес інформатизації усіх навчальних закладів на основі сучасних комп'ютерів дозволяє впроваджувати нові комп'ютерні технології, які відкривають

широкі можливості для вдосконалення процесу навчання та підвищення його ефективності. Нові комп'ютерні технології можна застосовувати для навчання студентів під час лекційних, лабораторних, а, особливо, самостійних занять, оскільки навчальні програми з різних предметів містять великий об'єм матеріалу, частину якого студенти повинні вивчати самостійно.

Основні положення та результати. Автори пропонують розглядати самостійну роботу як вид навчання у закладі освіти, як форму навчання, як вид навчальної діяльності студентів та як форму пізнавальної активності особистості. Поняття організації самостійної роботи визначається як впорядкування самостійної роботи за певними вимогами (критеріями, правилами, принципами) і надання їй необхідної форми з метою найкращої реалізації поставленої цілі. Принципи організації самостійної роботи студентів оптимізують умови навчальної діяльності, дають можливість передбачити результати самостійної роботи й удосконалити технології навчання.

Електронний підручник – це комп'ютерний, педагогічний програмний засіб, призначений для представлення повної навчальної інформації або нової інформації, яка доповнює друковані видання. Він служить для індивідуального навчання і дозволяє тестувати отримані знання та вміння студента. Електронні підручники надають можливість для особистої, творчої роботи, стимулюють індивідуальну пізнавальну активність. Такі навчальні системи служать дуже довго, вони не бояться зносу та старіння, не займають багато місця і є досить мобільними. Електронні підручники розміщують на магнітних, оптичних носіях та публікують в комп'ютерній мережі.

Для порівняння можна сказати, що традиційний підручник розрахований на поурочне, «лінійне» вивчення навчального матеріалу, а електронний підручник передбачає багатоваріантний вхід в навчальну систему, варіативну послідовність вивчення матеріалу і забезпечує можливість самостійно засвоїти навчальний матеріал у потрібному об'ємі. Електронний підручник в певному розумінні виступає у ролі репетитора, який допомагає кожному студенту знайти свій найбільш зручний шлях вивчення предмету на основі таких методів навчання, як покрокові демонстрації ситуацій, пояснення, коментарі тощо.

Основною позитивною характеристикою електронних підручників є індивідуальний темп навчання. Під цим потрібно розуміти не тільки «індивідуалізацію» по часу, але і варіантність матеріалу по рівнях складності.

Серед достоїнств електронних підручників перед друкованими можна виділити також значно вищий рівень наочності. Наочність у електронних підручниках забезпечується використанням мультимедійних технологій: анімації, звукового супроводу, гіпертексту, відеосюжетів та ін. Використання цих засобів носить цілеспрямований характер. Усі ці засоби в комплексі активізують зорову та емоційну пам'ять, розвивають пізнавальний інтерес, підвищують мотивацію студентів.

Особливе значення має компонування текстового, графічного і іншого матеріалу. Якість сприйняття нової інформації, можливість узагальнення і аналізу, швидкість запам'ятовування, повнота засвоєння навчальної інформації значною мірою залежать як від розташування інформації на сторінці (екрані комп'ютера), так і від послідовності сторінок, що йдуть одна за одною.

По своїй структурі електронні підручники, як навчальні засоби нового типу, є відкритими або частково відкритими системами. Їх можна доповнювати, вносити зміни в зміст, модифікувати в процесі експлуатації. Але внесені зміни не повинні порушувати загальну структуру електронного підручника, тому для захисту такого підручника від несанкціонованих змін повинен застосовуватись пароль або система паролів.

Сучасний електронний підручник повинен мати Інтернет-підтримку, оскільки така підтримка представляє унікальну можливість оновлення матеріалу і створює сприятливі умови для активної самостійної роботи студентів.

Висновки. Підводячи підсумки, можна відповісти на питання: кому і навіщо потрібний електронний підручник?

Електронний підручник необхідний для самостійної роботи учнів, оскільки він:

- полегшує розуміння матеріалу, що вивчається, за рахунок інших, ніж в друкованій учбовій літературі, способів подачі матеріалу: індуктивний підхід, дія на слухову і емоційну пам'ять тощо;
- допускає адаптацію відповідно до потреб учня, рівня його підготовки, інтелектуальних можливостей і амбіцій;
- звільняє від громіздких обчислень і перетворень, дозволяючи зосередитися на суті предмету, розглянути більшу кількість прикладів і вирішити більше завдань;
- надає щонайширші можливості для самоперевірки на всіх етапах роботи;
- дає можливість красиво і акуратно оформити роботу і надати її викладачеві у вигляді файлу або роздрукованого звіту;
- виконує роль нескінченно терплячого наставника, надаючи практично необмежену кількість роз'яснень, повторень, підказок і ін.

Підручник необхідний студентам, оскільки без нього він не може отримати міцні і всесторонні знання і уміння по данному предмету.

ЛІТЕРАТУРА

1. Галета, Я.В. Формування пізнавальної самостійності студентів економічного коледжу засобами інформаційних технологій. Автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.04 / Я.В. Галета; Кіровоград. держ. пед. ун-т ім. В. Винниченка. – Кіровоград, 2005. – 27 с.

2. Лапінський, В.В. Дидактичні вимоги до комп'ютерно-орієнтованих засобів навчання / В.В. Лапінський //Нові технології навчання: Наук.-методичний збірник. – К.: Науково-методичний центр вищої освіти, 2004. – Спецвипуск. – С.104-107.

15. УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДУ ОКРЕМИХ ЗНАЧЕНЬ АРГУМЕНТУ НА ВИПАДОК КОМПЛЕКСНИХ КОРЕНІВ

Віктор Легеза

*Національний університет біотехнологій і
природокористування України*

Вступ. В навчальній практиці методика інтегрування будь-якого раціонального дробу зводиться до його розкладу на елементарні дробы. Існують

два основні методи такого розкладання: метод порівнювання коефіцієнтів та метод окремих значень аргументу. При цьому другий метод має деякі методичні переваги перед першим через те, що його практична реалізація призводить до побудови та розв'язання розріджених СЛАР і є менш трудомісткою порівняно із першим методом. Проте, в існуючих на сьогодні в Україні і за її межами навчальних посібниках та підручниках з вищої математики [наприклад, 1 – 4], другий метод використовується тільки для випадку дійсних коренів знаменника.

Мета доповіді – узагальнити другий метод розкладання раціонального дробу на елементарні на випадок комплексних коренів його знаменника. В цьому разі знаменник раціонального дробу містить множники у вигляді квадратних тричленів з від'ємним дискримінантом та комплексними коренями. Тут потрібно скористатись тим теоретичним матеріалом, який передує розділу інтегрування невизначеного інтеграла і направлений на вивчення комплексних чисел та дій з ними. В результаті підстановки одного комплексного кореня у рівняння для пошуку невідомих коефіцієнтів одразу виникають два лінійні рівняння з дійсними коефіцієнтами.

Для ілюстрації ефективності узагальненого методу окремих значень аргументу для випадку комплексних коренів знаменника $Q_m(x)$ розглянемо наступний приклад. Нагадаємо, що уявна одиниця i визнається так: $i^2 + 1 = 0$.

Приклад. Виразити дріб $\frac{2x^3 + 3x^2 + 10x + 9}{(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 2x + 5)}$ через елементарні.

Розв'язання. Знайдемо корені знаменника. Всі вони є комплексними числами: $i, -i, -1 + 2i, -1 - 2i$. Отже, запишемо розклад заданого дробу на елементарні дроби з невідомими коефіцієнтами A, B, C, D :

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + 10x + 9}{(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 2x + 5)} \equiv \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 5}.$$

Помножимо обидві частини цієї тотожності на вихідний знаменник $(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 2x + 5)$. Після цього прирівняємо чисельник заданого дробу до чисельника з невідомими коефіцієнтами:

$$2x^3 + 3x^2 + 10x + 9 \equiv (x^2 + 1)(Cx + D) + (x^2 + 2x + 5)(Ax + B)$$

Підставимо у тотожність замість x значення першого кореня $x_1 = i$. В результаті отримаємо одразу два рівняння відносно двох невідомих коефіцієнтів A і B :

$$8i + 6 = (4 + 2i)(Ai + B) \Rightarrow \begin{cases} 4A + 2B = 8; \\ 4B - 2A = 6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1; \\ B = 2. \end{cases}$$

Тепер у тотожність підставимо третій корінь $x_3 = 2i - 1$ знаменника:

$$[(2i - 1)^2 + 1][C(2i - 1) + D] \equiv 2(2i - 1)^3 + 3(2i - 1)^2 + 10(2i - 1) + 9.$$

Після еквівалентних перетворень в цій тотожності за правилами дій над комплексними числами знову дістанемо два рівняння, з яких знайдемо невідомі коефіцієнти C і D :

$$-4Di + 10C - 2D \equiv 4i + 12 \Rightarrow \begin{cases} D = -1; \\ 10C - 2D = 12; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = -1; \\ C = 1. \end{cases}$$

Отже, маємо остаточний результат:

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + 10x + 9}{(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 2x + 5)} \equiv \frac{x + 2}{x^2 + 1} + \frac{x - 1}{x^2 + 2x + 5}.$$

Висновки. Зазначена методична прогалина виправлена у підручнику [5] з вищої математики з грифом МОНУ та використовується у навчальному процесі при викладанні вищої математики студентам НУБіП України.

ЛІТЕРАТУРА

1. Банах, С. Дифференциальное и интегральное исчисление / С. Банах. - М: Наука, 1966. - 436 с.
2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления (в двух частях) / Н.С. Пискунов. - М.: Наука, 1968. - I ч. - 552 с.; II ч. - 312 с.
3. Овчинников, П.П. Вища математика (підручник для студентів ВТНЗ у двох частинах) / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко - К.: «Техніка», 2003. - I ч. - 600 с., II ч. - 792 с.
4. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализ / Л.Д. Кудрявцев. - М. Высшая школа, 1989. - 583 с.
5. Легеза, В.П. Вища математика (підручник для студентів ВНЗ у двох частинах) / В.П. Легеза, М.А. Мартиненко, Ю.І. Иванова. - К.: «Четверта хвиля», 2014. - II ч. - 368 с.

16. РОЗРОБКА ТА ЗАСТОСУВАННЯ ПРОЕКТУ «ПРЕДМЕТ ЗА ВИБОРОМ»

Інна Мерліч, Ганна Одноріг

*Київський національний університет імені
Тараса Шевченка*

Вступ. Об'єктно-орієнтований підхід до проектування заснований на представленні предметної області завдання у вигляді безлічі моделей для незалежної від мови розробки програмної системи на основі її прагматики.

Основні положення та результати. В підході система розбивається на набір об'єктів, що відповідають об'єктам реального світу, які взаємодіють між собою шляхом посилки повідомлень. В об'єкті об'єднуються як атрибутивні дані (характеристики, властивості), так і поведінки (функції, методи).

У даному підході ієрархія вибудовується з використанням двох відносин: композиції і успадкування. При цьому в об'єктно-орієнтованому підході «об'єкт-частина» може включатися відразу в кілька «об'єктів-ціле». Таким чином, модуль в об'єктно-орієнтованому підході представляється у вигляді орієнтованого графа,

тобто з допомогою більш загальної структури. Найбільш популярними методологіями, що підтримують даний підхід, зараз є:

- *уніфікований процес (Unified Process, UP);*
- *екстремальне програмування (eXtreme Programming, XP);*
- *гнучке моделювання (Agile Modeling, AM).*

Базовим засобом фіксації (документування) результатів проектування систем за допомогою цих методологій є уніфікована мова моделювання (Unified ModelingLanguage, UML).

Говорячи про об'єктно-орієнтований підхід, в першу чергу відзначають спадкування, інкапсуляцію і поліморфізм. Ці механізми і принципи проектування більш природно і повно реалізовані в об'єктно-орієнтованому підході в порівнянні зі структурним.

Переваги об'єктно-орієнтованого підходу:

- *зменшення складності програмного забезпечення;*
- *підвищення надійності програмного забезпечення;*
- *забезпечення можливості модифікації окремих компонентів програмного забезпечення без зміни інших його компонентів;*
- *забезпечення можливості повторного використання окремих компонентів програмного забезпечення.*

При розробці проекту «Предмет за вибором» застосовувалась мова UML. Проект був реалізований в середовищі об'єктно-орієнтованого аналізу та проектування. Його суть в тому, щоб побудувати систему для автоматизації запису студентів на курси за вибором. За допомогою цієї системи реалізується: ведення курсів та призначення викладачів на курси; ведення загального списку студентів; запис студента на курси; формування груп.

Під час попереднього аналізу та проектування системи були побудовані моделі бізнес-об'єктів, бізнес-процесів, предметної області, прецедентів, аналітична модель та діаграми діяльності для бізнес-процесів. Функціонал майбутньої системи розглядався у рамках моделі прецедентів.

Основним бізнес-об'єктом системи є факультет, на якому проводяться курси за вибором. Основні бізнес-процеси: ведення інформації про користувача, ведення каталогу курсів, запис на курс.

Методист факультету займається веденням інформації про користувача та веденням каталогу курсів. Інформація про користувача включає у себе такі дані: П.І.Пб. студента, курс, на якому він навчається, та групу. У каталозі курсів міститься короткий опис кожного предмету за вибором та списки груп студентів, які вже записалися на цей курс, а також розклад занять.

Студент переглядає опис та обирає один або декілька предметів. У разі, якщо студент не записався на жоден курс, методист має право включити його до будь-якого списку. Групи студентів мають чисельність від 7 до 25 осіб. Якщо на курс записалося менше семи осіб, то предмет не ведеться, а студентів переводять на альтернативні курси, вибрані ними. Групу, чисельність якої перевищує двадцять п'ять осіб, розділяють на дві або більше.

Викладач додає та редагує опис кожного курсу.

Для збереження і обробки інформації всередині системи створюється база даних, яка містить користувачів, студентів та каталог курсів.

Доступ до системи здійснюється за допомогою індивідуальних логіну та пароллю, які видає користувачам методист під час реєстрації.

Висновки. За допомогою розробленого проекту можна побудувати систему для запису студентів на предмети за вибором, з урахуванням можливих змін в програмах предметів і появи нових вимог; також він сприяє полегшенню умов трудової діяльності співробітників завдяки повторного використання компонентів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Буч, Г. Об'єктно-орієнтований аналіз та проектування з прикладами додатків на C++ / Г. Буч. – Каліфорнія: Rational Санта-Клара, 1998. – 359 с.
2. Бадд, Т. Об'єктно-орієнтоване програмування в дії = An Introduction to Object-Oriented Programming. / Т. Бадд. – СПб.: «Пітер», 1997. – 464 с.
3. Грецем, І. Об'єктно-орієнтовані методи. Принципи та практика = Object-Oriented Methods: Principles & Practice. - 3-е вид. / І. Грецем. – М.: «Вільямс», 2004. – 880 с.
4. Сінтес, А. Опанувати самостійно об'єктно-орієнтоване програмування за 21 день = Sams Teach Yourself Object-Oriented Programming in 21 Days. / А. Сінтес. – М.: «Вільямс», 2002. – 672 с.

17. ГЕОМЕТРИЧНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ МОДИФІКОВАНИХ БАЗИСІВ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Костянтин Сокол, Ігор Астіоненко, Петро Гучек
Херсонський національний технічний університет

Вступ. При вивченні дисципліни “Обчислювальна математика”, в розділі “Інтерполяція функцій двох аргументів” студентам пропонується новий метод побудови інтерполяційних поліномів для функцій двох аргументів, який спирається на відому інтерполяційну процедуру Тейлора з нерівною кількістю вузлів в двох різних напрямках [1]. Використання елементів з різною кількістю вузлів вздовж кожної сторони дозволяє узгоджувати елементи низького порядку в областях, де не передбачається різкої зміни характеристик досліджуваного поля, з елементами більш високого порядку в інших областях.

У роботі використано геометричний метод для побудови моделей *квадратично-лінійних* елементів. Відповідний елемент має 6 вузлів.

Основні положення та результати. Геометричне моделювання базису СЕ починається з побудови геометричних композицій з простих піделементів із загальною вершиною у вибраному вузлі i . При цьому використовуються рівняння ліній, які проходять через інші вузли СЕ (рис.1). Рівняння ліній, які проходять через вузли СЕ, входять в базисні функції як множники. Ці рівняння нормуються так, щоб функція N_i дорівнювала одиниці у вузлі i . В результаті отримаємо наступну систему базисних функцій для СЕ (рис.1):

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1+\xi+\eta)(1-\xi)(1-\eta) \quad (1)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\xi)(1-\eta) \quad (2)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi \quad (3)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad (4)$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\eta \quad (5)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta)(1+\eta) \quad (6)$$

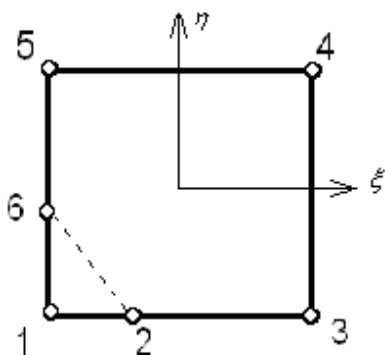


Рис.1 До побудови функції N_1

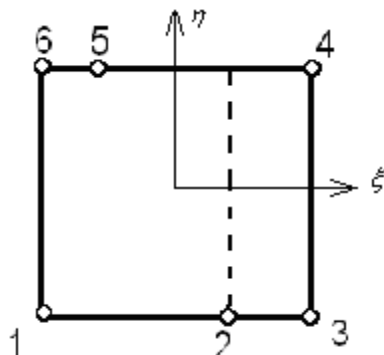


Рис.2 До побудови функції N_1

З використанням геометричного моделювання у роботі побудовано базис для СЕ з іншим розташуванням вузлів (рис. 2). Система функцій даного елемента записується у вигляді:

$$N_1 = \frac{1}{12}(1-2\xi)(1-\xi)(1-\eta) \quad (7)$$

$$N_4 = \frac{1}{12}(1+\xi)(1+\eta)(1+2\xi) \quad (10)$$

$$N_2 = \frac{2}{3}(1-\xi)(1+\xi)(1-\eta) \quad (8)$$

$$N_5 = \frac{2}{3}(1-\xi)(1+\xi)(1+\eta) \quad (11)$$

$$N_3 = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-2\xi) \quad (9)$$

$$N_6 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+2\xi)(1+\eta) \quad (12)$$

Легко переконатися в тому, що функції в отриманих базисах задовольняють наступним властивостям [2].

Властивість 1. Базисна функція N_i дорівнює одиниці в своєму вузлі i та нулю в інших вузлах елемента.

Властивість 2. Сума базисних функцій на елементі дорівнює одиниці

$$\sum_{i=1}^6 N_i(\xi_i, \eta_i) = 1. \quad (13)$$

Для скінченного елемента (рис.1) можна побудувати систему базисних функцій за допомогою алгебраїчного підходу. При алгебраїчному підході до побудови базису СЕ складається і розв'язується система лінійних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів інтерполяційного полінома. Для СЕ (рис. 2)

базис можливо побудувати за допомогою геометричного методу, тому що система є виродженою.

Існування альтернативних базисів на одному елементі (рис. 1) відкриває нові можливості для розв'язання актуальної задачі оптимізації обчислювальних якостей дискретної моделі [3]. Оптимізація досягається «зважуванням» альтернативних базисів за допомогою формули:

$$N_i^{(k)} = (1 - \alpha)N_i^{(m)} + \alpha N_i^{(n)}, \quad (14)$$

де $N_i^{(k)}$; $N_i^{(m)}$; $N_i^{(n)}$ - різні базиси скінченного елемента; α - ваговий коефіцієнт ($0 \leq \alpha \leq 1$).

Висновки. Після реалізації алгебраїчної і геометричної процедур моделювання на СЕ з нерегулярним розташуванням вузлів отримано дві системи базисних функцій. Дотепер вважалося, що альтернативні базиси виникають лише на скінчених елементах вищого порядку (починаючи з бікубічних СЕ).

ЛІТЕРАТУРА

1. Taylor, R.L. On the completeness of shape functions for finite element analysis / R.L. Taylor // Internat. J. Numer. Methods Eng — 1972. — V.4. — № 1. — P. 17—22.
2. Власова, Е.А. Приближенные методы математической физики / Е.А. Власова, В.С.Зарубин, Г.Н. Кувыркин — М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2004. — 704 с.
3. Хомченко, А.Н. Геометрия серендиповых аппроксимаций / А.Н. Хомченко, Е.И. Литвиненко, П.И. Гучек // Прикл. геом. и инж. графика - К.: Будівельник, — 1996. — Вип. 59. — С. 40-42.

18. МОДИФІКОВАНА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА ПРОЦЕДУРА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ПОБУДОВИ БАЗИСІВ СЕРЕНДИПОВИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Владислава Науменко, Олена Литвиненко
Херсонський національний технічний університет
Наталія Колесникова
Херсонський державний університет

Вступ. Задача побудови двовимірних дискретних моделей є принципово більш складною, ніж задача побудови одновимірних моделей. Стандартний підхід до побудови інтерполяційного полінома, що спирається на засоби матричної алгебри, призводить до необхідності складання і розв'язання громіздких систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Відомі випадки, коли при застосуванні матричної алгебри виникають непереборні труднощі, наприклад, якщо матриця системи є виродженою.

При вивченні дисципліни “Обчислювальна математика” студентам пропонується новий метод побудови інтерполяційних поліномів для функцій двох аргументів, який спирається на відому інтерполяційну процедуру Тейлора [1].

Основні положення та результати. Найбільший інтерес викликають поліноми для елементів серендипової сім'ї, які, як відомо, погано піддаються алгебраїчній формалізації. Серендипів скінченний елемент (СЕ) – це чотирикутник з вузлами інтерполяції тільки на границі елемента і система базисних функцій (базис), що відповідає цим вузлам. На початку 70-х років минулого сторіччя Тейлор (Taylor R.L.) [1] запропонував новий метод побудови базисів серендипових елементів.

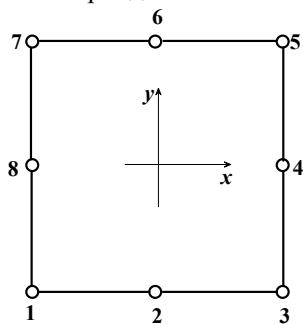


Рис.1 ССЕ-8

$$\begin{aligned} |x| &\leq 1; \\ |y| &\leq 1. \end{aligned}$$

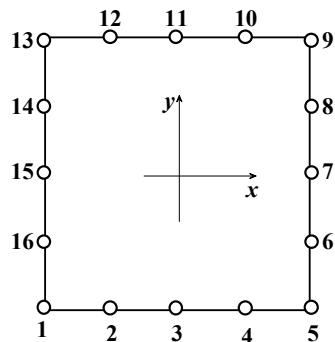


Рис.2 ССЕ-16

Ключові ідеї процедури Тейлора ілюструє приклад [1] побудови базису двовимірного ССЕ-8 (рис.1). Спочатку, використавши відповідний поліном Лагранжа другого степеня по одному з напрямів і, помноживши його на лінійний поліном Лагранжа по іншому напрямку, отримуємо базисну функцію для проміжних вузлів 2 і 8. Для «кутової» функції, наприклад, для N_1 , скористаємося лінійною комбінацією відомої функції білінійної інтерполяції і функціями N_2 і N_8 . Вибір вагового коефіцієнту 0,5 лінійної комбінації обумовлюється гіпотезою Лагранжа. Після нескладних перетворень отримуємо функцію стандартного базису ССЕ-8.

Таким чином можливо генерувати базисні функції для елементів серендипової сім'ї (наприклад, ССЕ-12, ССЕ-16), але для елементів вищих порядків треба використовувати внутрішні вузли [2]. Покажемо, яким чином можливо обійтись без внутрішніх вузлів для ССЕ-16 (рис.2).

Мета статті – побудувати нові базиси на ССЕ-16 за допомогою модифікованої процедури Тейлора без включення внутрішніх вузлів.

Можна отримати «стандартну» кутову базисну функцію на ССЕ-16, якщо при побудові проміжних базисних функцій відмовитись від одномірних лагранжевих поліномів [3].

Модифікуємо процедуру Тейлора, використавши у якості проміжних функцій нелагранжеві функції, в яких змінні не відокремлюються:

$$N_2 = \frac{1}{3}(1-x^2)(1-2x)(1-y)(-1-2x-y), \quad (1)$$

$$N_{16} = \frac{1}{3}(1-y^2)(1-2y)(1-x)(-1-2y-x), \quad (2)$$

$$N_3 = \frac{1}{2}(1-x^2)(1-4x^2)(1-y), \quad (3)$$

$$N_{15} = \frac{1}{2}(1-y^2)(1-4y^2)(1-x), \quad (4)$$

$$N_4 = \frac{1}{3}(1-x^2)(1+2x)(1-y)(-1+2x-y), \quad (5)$$

$$N_{14} = \frac{1}{3}(1-y^2)(1+2y)(1-x)(-1+2y-x). \quad (7)$$

Для «кутової» функції, наприклад, для N_1 , скористаємося лінійною комбінацією відомої функції білінійної інтерполяції і проміжних функцій:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-x)(1-y) - \frac{3}{4}(N_2 + N_{16}) - \frac{1}{2}(N_3 + N_{15}) - \frac{1}{4}(N_4 + N_{14}). \quad (8)$$

Отримуємо базисну функцію серендипового скінченного елемента ССЕ-16 в моделі, яку геометрично можна інтерпретувати, як “композиція з колом”:

$$N_1 = -\frac{1}{12}(1-x)(1-y)(1+x+y)(4x^2+4y^2-5). \quad (9)$$

Висновки. Специфіка серендипових моделей змушує відмовитись від стандартної процедури Тейлора, що спирається на традиції одновимірної інтерполяції за Лагранжем, і використовувати модифікацію цього методу, яка дає можливість легко отримувати альтернативні базиси на серендипових елементах вищих порядків.

ЛІТЕРАТУРА

1. Zienkiewicz, O.C. The Finite Element Method /O.C. Zienkiewicz, R.L.Taylor. — V.1. — Butterworth-Heinemann, 2000. — 689 p.
2. Власова, Е.А. Приближенные методы математической физики / Е.А. Власова, В.С.Зарубин, Г.Н. Кувыркин — М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2004.— 704 с.
3. Хомченко, А.Н. Интерполяційна процедура Тейлора для серендипових моделей: геометричний аналіз / А.Н. Хомченко, О.І. Литвиненко, І.О. Астіоненко // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник. — Луцьк: ЛДТУ, 2008. — Вип. 22 (частина 1). — С.355-359.

19. РЕАЛІЗАЦІЯ МІЖПРЕДМЕТНИХ ЗВ'ЯЗКІВ З КУРСОМ "ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА" В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ СТУДЕНТІВ ФІЗИЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Марія Парчук

*Національний педагогічний університет імені
М.П. Драгоманова*

Вступ. Теоретична фізика відіграє вирішальну роль у завершенні підготовки спеціаліста-фізика, формує науковий світогляд майбутнього вчителя, який

повинен мати цілісні уявлення про сучасну фізичну картину світу, вміти розв'язувати практичні і теоретичні задачі сучасної фізики, бути підготовленим до сприймання новітніх ідей фізики XXI сторіччя.

Варто зазначити і те, що жоден з розділів теоретичної фізики неможливо якісно вивчати без ґрунтового знання багатьох математичних дисциплін, методи яких використовуються для дослідження математичних моделей реальних фізичних явищ або таких, якими займається теоретична фізика. Однією з таких дисциплін є теорія ймовірностей та математична статистика, яка забезпечує формування у студентів-фізиків спеціальних математичних компетенцій, що є необхідними в подальшому навчанні та роботі.

Основні положення та результати. У доповіді ми проаналізуємо зв'язок між знаннями, вміннями та навичками, які здобуваються студентами у навчанні теорії ймовірностей та математичної статистики, та покажемо, як ці компетентності застосовуються в курсі теоретичної фізики загалом та термодинаміки і статистичної фізики зокрема. Детальніше із застосуванням таких компетенцій у курсі теоретичної фізики можна ознайомитись в нашій статті «Реалізація міжпредметних зв'язків з курсом "Теорія ймовірностей та математична статистика" в процесі навчання теоретичної фізики студентів фізичних спеціальностей» [2].

Розглянемо зміст навчального матеріалу та основних змістових модулів курсу "Теоретична фізика (термодинаміка і статистична фізика)".

Модуль I. Основні поняття термодинаміки. Основні поняття термодинаміки. Основні закони термодинаміки.

Модуль II. Методи термодинаміки. Методи термодинаміки. Умови рівноваги і стійкості термодинамічних систем. Фазові переходи і критичні явища.

Модуль III. Основні поняття і принципи статистичної фізики. Основні поняття і принципи статистичної фізики. Розподіл Максвелла – Больцмана. Розподіли Гіббса. Принцип Больцмана. Зв'язок термодинамічних і статистичних величин. Статистична теорія ідеальних систем. Поняття про статистичну теорію неідеальних систем. Теорія флуктуацій.

Зв'язок між знаннями, вміннями та навичками, що здобуваються студентами під час вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики (ТЙМС), та застосовуються при вивченні теоретичної фізики на прикладі вивчення теми «Розподіл Максвелла» представимо у вигляді таблиці

ТЙМС	Приклад з теоретичної фізики
Статистична ймовірність	Ймовірність макростану.
Функція розподілу	Ймовірність того, що молекули, які містяться в певному об'ємі, мають швидкість, що лежить в певному інтервалі.
Функція щільності розподілу	Ймовірність попадання молекули в паралелепіпед. Середня швидкість молекул.
Математичне сподівання або середнє значення.	Середня швидкість молекул. Швидкість броунівського руху частинок. Теплова швидкість.

Середнє квадратичне відхилення.	Найбільш імовірна швидкість.
---------------------------------	------------------------------

Можна запропонувати ряд задач міжпредметного змісту для розв'язання на практичних заняттях з теорії ймовірностей та математичної статистики, а також і на заняттях з теоретичної фізики. Які сприяють реалізації міжпредметних зв'язків між даними дисциплінами.

Задача 1. Обчислити для Максвелівського розподілу найбільш ймовірне значення швидкості v_{ver} , яке відповідає максимуму функції розподілу.

Задача 2. В якій частини молекул повітря модуль швидкості відрізняється від найбільш імовірної v_{im} швидкості молекул не більше, ніж на $\Delta v = \pm 0,5$ м/с?

Температура повітря $t = 17^\circ \text{C}$.

Висновки. В ході аналізу змісту навчального матеріалу із змістових модулів курсу теоретичної фізики "Термодинаміка та статистична фізика" можна зробити наступні висновки:

1. Існують суттєві міжпредметні зв'язки між курсами теоретичної фізики і теорії ймовірностей та математичної статистики.

2. Теорія ймовірностей є теоретико-математичним підґрунтям введення основних понять та доведення основних теоретичних положень у термодинаміці та статистичній фізиці.

Враховуючи це, можна сформулювати наступні рекомендації щодо підвищення ефективності реалізації між предметних зв'язків:

1. Під час вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики, зокрема таких змістових модулів (тем) як "Елементи комбінаторики. Класичне означення ймовірності", "Геометричне означення ймовірності", "Ряд розподілу, функція розподілу та числові характеристики дискретної випадкової величини" пропонувати студентам фізичних спеціальностей задачі фізичного змісту, зокрема, задачі, в яких використовуються моделі теоретичної фізики.

Шляхом системного впровадження таких задач буде досягнуто ряд дидактичних цілей: мотивація, активізація пізнавальної діяльності за рахунок пропедевтики, прикладна та професійна спрямованість навчання.

2. Під час вивчення теоретичної фізики необхідно коректно і повно провести актуалізацію відповідних знань з теорії ймовірностей без зайвих дублювань. При введенні нових понять, обґрунтуванні теоретичних фактів та розв'язуванні задач доцільно постійно акцентувати увагу студентів на відповідних поняттях з теорії ймовірностей та математичної статистики.

ЛІТЕРАТУРА

1. Грищенко, Г. Основні поняття статистичної фізики: навч. посіб. /Г. Грищенко – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2005. – 44 с.

2. Парчук, М.І. Реалізація міжпредметних зв'язків з курсом "Теорія ймовірностей та математична статистика" в процесі навчання теоретичної фізики студентів фізичних спеціальностей / М.І. Парчук //Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology. – 2005. – Vol. III (22), Issue: 45. – P. 36 – 42.

20. ПРО ДОСВІД ПРОВЕДЕННЯ МОНІТОРИНГУ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ З МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТІВ ВИЩИХ АГРАРНИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ

Ірина Горда

Полтавська державна аграрна академія

Вступ. Визначальним критерієм освіти є якість підготовки фахівців, зокрема якість їх знань, вмінь, навичок та відповідність освіченості рівню міжнародних стандартів. В наслідок цього, у вищих аграрних навчальних закладах (ВАНЗ) України постає потреба в створенні єдиної централізованої системи моніторингу навчальних досягнень студентів, в тому числі і з математики, адже дана дисципліна є складовою професійної підготовки фахівців.

Зокрема, у Національній доктрині розвитку освіти України в ХХІ столітті зазначено, що моніторинг якості освіти стає основою оцінювання державою та громадськістю освітніх послуг, рівного доступу громадян до здобуття якісної освіти [1, с. 7].

Основні положення та результати. Протягом 2006-2014 років нами було здійснено проведення моніторингу у вищих аграрних навчальних закладах України. Підготовчий етап розпочинався із того, що на відповідних кафедрах ВАНЗ було прийнято та затверджено положення про проведення моніторингу навчальних досягнень студентів з математики. Далі нами було розроблене методичне забезпечення моніторингу: систему вимірників з критеріями їх оцінювання; моніторингову картку для аналізу результатів навчальних досягнень студентів з математики; комп'ютерну базу для збереження, опрацювання та представлення зібраних даних моніторингу.

Однієї із важливих умов здійснення моніторингу є психологічна та теоретико-методична підготовленість викладачів математики до здійснення комплексу діагностичних, аналітичних та корекційних заходів у загальній системі моніторингу [2]. Тому перед проведенням моніторингу у ВАНЗ, для викладачів були проведені консультації, на яких було детально розкрито основні теоретичні та технологічні особливості його проведення.

Одним із етапів моніторингу навчальних досягнень студентів з математики являється контроль результатів їх навчальної діяльності. У відповідності до цього під час навчального процесу в умовах кредитно-модульної системи організації навчального процесу у ВАНЗ, нами проводилися такі види контролю: вхідний, поточний, модульний, підсумковий та залишкових знань [3, с. 276-277]. На даних етапах для вимірювання якості математичної підготовки студентів використовувалися наступні контрольні заходи: експрес-контрольна робота, контрольна робота, тестування, усне опитування, домашнє завдання, виконання розрахунково-графічної роботи, математичний диктант, колоквіум.

Результати виконання студентами різних видів навчальної діяльності передбачає їх подальший аналіз, опрацювання, збереження та представлення. Для цього нами поетапно всі результати навчальних досягнень студентів з математики заносилися до електронного журналу, розробленого в табличному

процесорі Ms Excel. Досвід використання електронного журналу показав, що він надає можливість викладачеві здійснювати систематичне спостереження за виконанням кожним студентом окремих видів навчальної діяльності; забезпечує автоматизований підрахунок результатів успішності студентів за кожен змістовний модуль окремо та навчальної дисципліни загалом [4].

Крім того, протягом навчального року, проводячи різні контрольні заходи, отримані результати навчальних досягнень кожного студента групи заносилися до моніторингової картки, до складу якої входять наступні елементи: прізвище, ім'я, по-батькові студента; тема та дата проведення заняття; вид контролю; результат контролю (кількість набраних балів); допущені помилки; заходи корекції.

Систематичне використання моніторингової картки надавало можливість стежити за навчальними досягненнями кожного студента, аналізувати труднощі, які виникають у нього під час виконання певного виду діяльності, вчасно виявляти та здійснювати заходи корекції. Завдяки такому підходу до організації навчального процесу викладачі поетапно отримували інформацію про те, як засвоюють навчальний матеріал студенти, де вони не встигають та по яких причинах, виявляли труднощі, які виникають у них під час вивчення певної теми, розділу, модуля загалом; з'ясовували, яка допомога необхідна студентам, щоб усунути ці труднощі.

Крім того, кожен студент також мав можливість стежити за результатами власних навчальних досягнень з математики за допомогою моніторингової картки або електронного журналу, тим самим здійснюючи самоаналіз навчальної діяльності та бути активним учасником моніторингу.

Зі студентами, які мали низькі показники якості математичної підготовки, важливо проводити окрему роботу по її підвищенню, зокрема, необхідна інформація повідомлялася кураторам, в деканати, зі студентами та батьками проводилися бесіди на засіданнях кафедри. Завдяки такому підходу ми мали змогу систематично здійснювати спостереження за кожним студентом окремо, виявляти причини пропусків занять, переведення на заочну форму навчання чи закінчення навчання у ВАНЗ взагалі.

Для студентів систематично проводилися консультації, на яких кожен міг змогу вчасно отримати консультаційну допомогу та ліквідувати прогалини у своїх знаннях. Аналізуючи помилки, допущені студентами під час виконання тих або інших видів навчальної діяльності, надавалися рекомендації для покращення рівня навчальних досягнень, пропонувалися домашні індивідуальні завдання.

За рахунок проведення моніторингу навчальних досягнень студентів з математики на основі визначеного та розробленого методичного забезпечення відбулось суттєве підвищення самостійності та пізнавальної активності студентів, самоаналізу та самовдосконалення, посилення інтересу до вивчення циклу математичних дисциплін, покращення якості діяльності викладачів, і, як наслідок, підвищення рівнів навчальних досягнень з математики студентів ВАНЗ.

Висновки. Моніторинг навчальних досягнень студентів з математики є складовою освітнього моніторингу. Як показав власний досвід, його впровадження у практику вищих аграрних навчальних закладів під час вивчення

математичних дисциплін забезпечує відстеження стану навчальних досягнень студентів з математики, його підвищення та прогнозування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Національна доктрина розвитку освіти в Україні в XXI столітті. – К. : Шкільний світ, 2001. – 24 с.
2. Горда, І.М. Психолого-педагогічні передумови організації моніторингу навчальних досягнень з математики студентів вищих навчальних аграрних закладів / І. М. Горда // Вісник Черкаського університету. Серія : «Педагогічні науки». – 2009. – Вип. 150. – С. 123–130.
3. Ординський, В.Л. Педагогіка вищої школи: навч. посіб. [для студ. вищ. навч. закл.] / В.Л. Ординський – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 472 с.
4. Горда, І.М. Комп'ютерні технології як невід'ємна складова під час проведення моніторингу у вищих аграрних навчальних закладах / І.М. Горда // Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology. -2013. – Vol. 5. – С. 80-84.

21. ДЕЯКІ ПИТАННЯ ОРГАНІЗАЦІЇ ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

Лев Величко, Василь Кондрат, Богдан Сокіл
*Академія сухопутних військ імені гетьмана
Петра Сагайдачного*

Вступ. Система освіти є ключовою підсистемою сучасного суспільства. Саме вона найбільше сприяє формуванню громадянина і спеціаліста. Вона має здійснювати селекцію молодих людей за здібностями, підштовхуючи їх до найбільш відповідних їхнім природним даним спеціальностей, роблячи їх таким чином найбільш корисними суспільству. Система освіти формує обличчя суспільної еліти [2,3].

Перехід від суспільної організації Радянського Союзу до суспільної організації незалежної демократичної України не проходить безпроблемно. Викладачі ВНЗів (військових навчальних закладів) стикаються у своїй роботі з освітніми проблемами, у значній мірі зумовленими таким переходом. Мусимо сприяти позитивному їх вирішенню.

Виклад основного матеріалу. Одним з таких проблемних питань є часто недостатньо високий вхідний рівень знань студентів (чи курсантів) [2]. Це зумовлено найчастіше недостатньо високим теперішнім рівнем шкільної освіти. Іноді це може спричинюватися також значною часовою дистанцією між закінченням школи і вступом до ВНЗу. У математиці ця недостатність відчувається як у слабкості знань з алгебри, геометрії та тригонометрії, а іноді навіть з арифметики. Елементами математичного аналізу, з якими зараз знайомлять учнів середньої школи, переважна більшість з вчорашніх абітурієнтів практично не володіють. Можливо треба відновити зворотній корегуючий вплив вищої школи на середню, коли відомості про слабкість підготовки або навпаки, сильну підготовку її випускників від працівників ВНЗів могли впливати на якість

викладання в школі через вплив освітянської влади на роботу і добробут вчителів.

Викладач зобов'язаний добиватися успішного засвоєння студентами програмного матеріалу курсу, який він викладає. З огляду на сказане вище, принаймі для математики це стає проблематичним. Відповідальний викладач паралельно з викладом нового матеріалу вимушений повторювати зі студентами також шкільну програму з математики. Це потребує і додаткового часу, і певних зусиль. Якщо групи студентів невеликі (10-15 чоловік) це ще можна якось суміщати, додатково працюючи з найслабшими. Якщо групи більші, такий підхід практично неможливий. Питання треба вирішувати організаційно. ВНЗ мусить працювати з тими студентами, які поступили. У разі виявлення вказаних вище проблем із їхнім вхідним рівнем знань, потрібно при розробці робочих програм з вищої математики відводити певний час на повторення матеріалу шкільної програми. Принаймні окремих розділів алгебри, геометрії, тригонометрії. Як правило, поновлення або просто повторення потребують вміння розв'язувати алгебраїчні рівняння, використовувати формули скороченого множення, діяти з радикалами, логарифмами та степенями, тригонометричними функціями, знання поведінки цих функцій, формул для розрахунку площ та об'ємів геометричних фігур тощо. Деякі ВНЗи, стикаючись з такою проблемою, саме в такий спосіб її і розв'язували. Причому час повторення елементарної математики сягав двох місяців.

Ще однією з проблем, з якою стикаються не лише викладачі математики, а й інших предметів, є різнорівневість знань та можливостей студентів навчальних груп. Викладачі у навчальному процесі, як правило, орієнтуються на "середнього" студента. У цьому випадку студенти з недостатнім рівнем підготовки не завжди в стані засвоїти поданий матеріал, а найсильнішим буває просто нецікаво [1]. Ефективність роботи викладача виявляється не дуже високою. Мабуть доцільно ширше підтримати ініціативу формування навчальних груп за урахування рівня знань студентів, включаючи до складу груп студентів приблизно одного рівня. Таким чином виникає певна градація навчальних груп за рівнем підготовки студентів. Студента, який виділився серед одногрупників успішністю, переводять у вищу за успішністю групу. Студента, який перестав працювати і знизив успішність, переводять у нижчу за успішністю групу. Такі переводи мабуть доцільно практикувати після кожної сесії. При цьому зростає конкуренція за знання між студентами. Ріст успішності студента можна стимулювати, наприклад, через зміни величини стипендії чи в якийсь інший спосіб. Найуспішнішим групам (одній чи кільком) можна створити умови поглибленого вивчення спеціальних чи й загальних, або й додаткових предметів, формуючи таким чином професійну еліту.

Такий підхід, звичайно, потребував би дещо відмінних методичних засобів в різних групах. Але результат виправдовував би затрати.

В коротких тезах складно пропонувати конкретні зміни до програм навчання вищої математики, оскільки самі програми різні для різних спеціальностей. З огляду на новий закон про освіту, це може вирішуватися в межах конкретного вищого навчального закладу.

Однією з методологічних проблем, з якою також стикаються викладачі вищої математики, є різне сприйняття студентами різних складових курсу. Наприклад,

неважко зауважити, що курс аналітичної геометрії чи векторної алгебри вчорашнім школярам легше освоювати, ніж курс математичного аналізу. Це пов'язано напевно з тим, що понятійна база математичного аналізу (множини, границі, послідовності тощо) потребують певного часу для засвоєння. Колишні студенти теж з цим у свій час стикалися. З подібними труднощами стикаються також викладачі квантової механіки, понятійна база якої суттєво відрізняється від понятійної бази класичної фізики. Цей факт необхідно враховувати при складанні програм навчання та проведенні занять. Можливо доцільно змінювати баланс між обсягом лекцій та практичних занять в сторону збільшення обсягу останніх.

Висновки. Навіть такий доволі побіжний огляд окремих проблем викладання математики у вищій школі показує потребу подальшого його організаційного вдосконалення. Доцільно певно більш прискіпливо віднестися до формування програм курсу, враховуючи певні психологічні аспекти сприйняття різних його частин студентами. Потрібно налагодити зворотній корегуючий вплив вищої школи на середню. Особливо з огляду на певне зниження освітнього рівня останньої. Це повинно сприяти підвищенню вихідного рівня знань студентів, а значить і кращого засвоєння актуального навчального матеріалу. На початку курсу вищої математики на даному етапі доцільно проводити повторення елементарної математики. На нашу думку, все це сприятиме підвищенню рівня математичної освіти в Україні.

ЛІТЕРАТУРА

1. Величко, Л.Д. Метод інтенсифікації на практичному занятті /Л.Д. Величко // Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті», 2013 р.- К.: НТУУ «КПІ», 2013. - С. 245-247.
2. Житарюк, І.В. Проблеми математичної освіти в Україні на межі тисячоліть / І.В.Житарюк.-http://www.rusnauka.com/31_ONBG_2009/Pedagogica/53736.doc.htm
3. Триус, Ю. В. Проблеми і перспективи вищої математичної освіти / Ю.В. Триус, М.Л. Бакланова - http://ii.npu.edu.ua/files/Zbirnik_KOSN/10/32.pdf. - 27 с.

22. ПІДГОТОВКА МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

**Олег Баран, Лариса Васильєва,
Валентина Дармосюк, Антоніна Руда**
*Миколаївський національний університет імені
В.О.Сухомлинського*

Автори пропонують комплексний підхід до вивчення дисциплін геометричного спрямування, який враховує сучасні зміни всіх компонент освіти в контексті наступності і з урахуванням потреб підготовки майбутніх вчителів математики.

Вступ. Значення вищої педагогічної освіти останнім часом зростає у зв'язку з розширенням спектру соціального замовлення і значної варіативності навчальних закладів нового типу (ліцеїв, гімназій, коледжів тощо). У зв'язку з цим,

зростають вимоги до професійної підготовки вчителя. Разом з тим, за останні десятиліття значно зросли потреби суспільства у математичних, зокрема геометричних, знаннях. Протягом останнього півстоліття відбувається неперервна реформа середньої і вищої освіти. Неодноразово змінювалися парадигми і спрямування освіти в цілому і, зокрема, її математичної компоненти. Перебудова відбувалася в значній мірі за рахунок зменшення навчальних годин і відмови від пріоритету дисциплін природничо-математичного циклу. Все це призвело до відчутного зниження рівня природничо-математичної підготовки учнів і, як наслідок, майбутніх фахівців у відповідних галузях. При цьому особливо значних втрат зазнала математика, і, зокрема, геометрія, яка традиційно відноситься до найбільш складних і важких навчальних курсів. Разом з тим, роль і місце геометрії в сучасному суспільстві важко перебільшити.

Основною метою вивчення математики є вміння розв'язувати практичні задачі. А основними типами геометричних задач є наступні:

- метричні задачі (визначення відстаней, кутів, площ, об'ємів тощо),
- задачі на доведення (теореми, вивід формул тощо),
- конструктивні задачі (ефективні і уявні побудови шуканих фігур),
- геометричні перетворення (рухи, подібність, гомотетія тощо),
- координатний метод розв'язування геометричних задач (аналітична геометрія),
- застосування векторної алгебри до геометричних задач,
- побудова зображень геометричних фігур (паралельна і центральна проекція тощо),
- задачі на дослідження (доведення існування фігур, їх взаємне розташування тощо),
- геометричні задачі підвищеної складності (конкурсні, олімпіадні, турнірні) тощо,
- аналіз і розпізнання зображень (фотографії, тексти тощо),
- створення алгоритмів комп'ютерної графіки.

Після проведених реформ геометрія фактично була звужена до метричної, а конструктивна геометрія і методи зображень геометричних фігур, креслення і основи геометрії були спочатку зведені до інтегрованих курсів, а згодом взагалі вилучені навіть з програми підготовки майбутніх вчителів математики. Нормативними курсами залишились тільки аналітична геометрія і диференціальна геометрія з основами топології. Разом з тим, сучасно комп'ютерна графіка, яка розглядає методи растрового сканування, відтинання, видалення невидимих поверхонь, розфарбування, текстури і ефектів прозорості, впевнено займає важливе місце в сучасних навчальних планах ВНЗ [1-6].

Основні положення та результати. З метою підвищення рівня професійної підготовки і активізації пізнавальної і навчальної діяльності майбутніх вчителів математики на кафедрі математики МНУ було впроваджено наступні спецкурси з геометрії:

- теоретичні основи елементарної геометрії (перший курс, корекція і поглиблення залишкових знань з геометрії за середню школу),
- проєктивна геометрія і методи зображення геометричних фігур (четвертий курс, основи афінної і проєктивної геометрії, паралельна проєкція, аксонометрія, позиційні задачі і перерізи),

- основи геометрії (поняття про математичні структури, аксіоматичний метод, історичний огляд розвитку геометрії, нариси з неевклідових геометрій),
- практикум з розв'язування геометричних задач підвищеної складності (для спеціалістів і магістрантів),
- обчислювальна геометрія і комп'ютерна графіка (для магістрантів),

Для закріплення теоретичних знань і практичних навичок студенти виконують індивідуальні завдання: з елементарної геометрії, з конструктивної геометрії, з аналітичної геометрії (3), з диференційної геометрії і топології (2), з проєктивної геометрії і методів зображень (2). Також передбачаються семінарські заняття і написання рефератів з основ геометрії.

Для підтримки нормативних і спеціальних курсів геометрії на кафедрі математики створено комп'ютерні банки дидактичних матеріалів і завдань тощо. Колектив кафедри також працює над створенням елективних курсів геометрії для заочної і дистанційної освіти, що значною мірою сприяє підвищенню рівня математичної освіти на факультеті.

Висновки. Розроблена система підготовки майбутніх вчителів математики до вивчення геометрії і розв'язування відповідних задач різного рівня складності довела свою ефективність в процесі її реалізації на математичному відділенні механіко-математичного факультету Миколаївського національного університету ім. В.О.Сухомлинського. Результати цієї апробації представлені на міжнародних і всеукраїнських конференціях і в публікаціях [1-5].

ЛІТЕРАТУРА

1. Баран, О.І. Конструктивні задачі, як засіб активізації пізнавальної діяльності при вивченні математики / О.І. Баран, В.М. Дармосюк // Труды международного математического центра. – 2011. – Т. 4, № 2.

2. Баран, О.І. Алгебраїчний метод розв'язання конструктивних задач підвищеної складності / О.І. Баран, В.М. Дармосюк // Труды международного математического центра. – 2011. – Т. 4, № 4.

3. Баран, О.І. Конструктивні задачі, як інтегруючий розділ планіметрії. Збірник «Модернізація шкільної природничо-математичної освіти як стратегія її розвитку у ХХІ столітті / О.І. Баран // Тези доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції». – Миколаїв, 2012.

4. Баран О.І., Васильєва Л.Я., Руда А.М. Історія і досвід підготовки фахівців у галузі природничо-математичних дисциплін у Миколаївському національному університеті ім. В.О.Сухомлинського. Друга Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті». Матеріали конференції. 20-21 грудня 2013 року, Київ.

5. Baran, O. The contribution of scientists of Mykolayiv V. O. Suhomlynskyi National University to the development of mathematics education (dedicated to 100-year anniversary of the University) / Oleg Baran and Valentina Darmosiuk // International Conference dedicated to the 120-th anniversary of Stefan Banach. – Lviv, 2013.

6. <http://cyberleninka.ru/article/n/obuchenie-geometrii-studentov-pedagogicheskogo-vuza-v-usloviyah-preemstvennosti-mezhdu-sredney-i-vysshey-shkoloy#ixzz3YRrZWomw>

23. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ПЕРЕДУМОВИ ТА МЕТОДИЧНІ ВИМОГИ ДО НАВЧАННЯ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТІВ МАТЕМАТИЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ ПЕДАГОГІЧНИХ УНІВЕРСИТЕТІВ

Олександра Сушко

*Національний педагогічний університет імені
М.П. Драгоманова*

Вступ. На сьогодні для педагогічних та класичних університетів України традиційною є практика підготовки фахівців та спеціалістів подвійних, або навіть потрійних, спеціальностей (спеціалізацій). При цьому, одними з найпоширеніших є поєднання спеціальності «Математика» з такими спеціальностями або спеціалізаціями як економіка, фінансова та актуарна математика, прикладна математика. Метою математичної освіти студентів таких спеціальностей має бути не просто передача суми певних знань, вмінь та навичок, а формування спеціаліста, який сам здатен використовувати їх для розв'язання прикладних завдань, а також може навчити цьому інших.

В той же час, аналізуючи ситуацію, що склалась на сьогодні, можна констатувати, що існує певна невідповідність між фундаментальною та прикладною складовими математичної підготовки студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів. Прагматичні (практичні, прикладні) цілі навчання математики студентів, з одного боку, і певна «академічність» (відірваність від прикладних задач) навчання, з іншого, вказують на існуючі протиріччя у змісті та технологіях математичної освіти, які свідчать про необхідність її реформування. Наявний досвід та аналіз науково-методичної літератури, результатів педагогічних досліджень свідчать про те, що сучасні реалії вимагають нових підходів до освіти майбутніх вчителів.

Основні положення та результати. В доповіді представляються деякі результати дослідження автором проблеми методики навчання фінансової математики студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів, актуальність яких зумовлена наступними чинниками:

- питання методики навчання фінансової математики на сьогодні залишаються недостатньо дослідженими, немає робіт, присвячених питанням методики навчання фінансової математики як окремої навчальної дисципліни,
- не сформований цілісний системний погляд на фінансову математику та її методи як невід'ємну складову професійної підготовки майбутніх фахівців в галузі прикладної математики, економіки та фінансів;
- не досліджено роль, місце та значення фінансової математики в підготовці майбутніх вчителів (викладачів) математичних дисциплін.

Однією з основних передумов створення ефективної методичної системи навчання фінансової математики є виявлення та аналіз відповідних психолого-педагогічних передумов та формулювання методичних вимог.

Вивчення фінансової математики розраховане на студентів старших курсів (зазвичай, 4-5 курси). Таким чином, не виникає потреба додатково тлумачити

поняття «методи», «засоби», «форми» навчання. Навіть відповідь на питання, «чому людина ставить перед собою ту чи іншу навчальну мету, діє при цьому так, а не інакше», містить в собі певний самопереконаливий мотиваційний компонент, спрямований на подальшу професійну і практичну діяльність або майбутнє навчання в магістратурі.

Цьому сприяють психологічні особливості розвитку старшого студентського віку, які передбачають розвиток таких якостей як: відповідальність, почуття обов'язку, цілеспрямованість, наполегливість, самостійність, уміння регулювати свої почуття, бажання, схильності та потреби у майбутній професійній реалізації тощо.

У доповіді аналізуються такі психологічні якості особистості, як: сприйняття, увага, мислення, мотивація, емоційний стан тощо та наводяться рекомендації щодо їх формування у процесі вивчення фінансової математики студентами математичних спеціальностей педагогічних університетів.

Оскільки, психолого-педагогічні вимоги до методичної системи з необхідністю мають ґрунтуватись на загальних дидактичних принципах навчання, запропоновано наступну послідовність дидактичних принципів, яка відповідає логічній структурі діяльності викладача: від постановки цілей і завдань навчання до здійснення контролю його результатів та знаходить своє відображення у процесі навчання фінансової математики:

Принцип цілеспрямованості навчання → Принцип науковості → Принцип систематичності і послідовності → Принцип доступності → Принцип свідомості → Принцип зв'язку теорії з практикою → Принцип активності → Принцип індивідуального і диференційованого підходу у навчанні → Принцип емоційності.

Крім загальнодидактичних принципів у доповіді наводиться реалізація одного із таких видів навчання, як проблемне навчання, яке здійснюється на основі трьох методів: методу проблемного викладу знань, частково-пошукового або евристичного методу, дослідницького методу та особливості використання у процесі навчання фінансової математики таких основних форм організації навчання, як: лекції, практичні, лабораторні заняття, спецкурси, спецсемінари, консультації, колоквіуми контрольні, курсові й дипломні роботи та засобів навчання: підручники, навчальні посібники, дидактичні матеріали, тестовий матеріал, засоби наочності, технічні засоби навчання.

Висновки. На основі всього вищесказаного, сформульовано наступні вимоги до методичної системи навчання фінансової математики студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів:

1. Цілі навчання, взаємоузгоджені з результатами навчання, мають бути підпорядковані меті формування загальних та фахових (спеціальних) компетентностей фахівця.

2. Основними принципами відбору змісту навчального матеріалу має бути збалансованість науковості та доступності навчання, системний підхід, узгодженість із змістом навчання інших математичних та економічних дисциплін, професійна та прикладна спрямованість курсу.

3. Ефективно, цілеспрямовано, систематично враховувати міжпредметні зв'язки між циклами фундаментальних математичних, економічних та прикладних (економіко-математичних) міждисциплінарних курсів.

4. Широкопланово використовувати методи проблемного навчання, які сприяють формуванню творчого підходу, критичного ставлення до навчальної інформації, науково-дослідних навичок при побудові математичних моделей реальних процесів та явищ у прикладних галузях.

5. Застосовувати студентоцентризований підхід в організації навчання з врахуванням фундаменталізації, диференціації, індивідуалізації навчання.

6. Використовувати гнучку систему засобів навчання, яка включає методичні рекомендації, електронні ресурси, прикладні програмні засоби, дидактичні матеріали, засоби контролю та діагностики тощо.

24. КОМПЕТЕНТІСНО ОРІЄНТОВАНІ ЗАДАЧІ В НАВЧАННІ АЛГЕБРИ

Анна Гоменюк

*Національний педагогічний університет імені
М.П. Драгоманова*

Вступ. В нормативних державних документах про освіту, а саме Концепції середньої загальноосвітньої школи, Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти, Програмі з математики зазначено, що основним напрямом розвитку освіти України є впровадження компетентнісного підходу.

Перехід до компетентнісного підходу означає, з одного боку, переорієнтацію з процесу на результат освіти, а з другого – перенесення акценту з накопичування нормативно визначених знань, умінь і навичок на формування й розвиток в учнів здатності практично діяти, застосовувати досвід успішних дій у конкретних ситуаціях.

Основні положення та результати. Ми розуміємо компетентнісний підхід як спрямованість навчально-виховного процесу на формування і розвиток ключових і предметних компетентностей особистості. З огляду на проведений нами аналіз наукових джерел, узагальнюючи та систематизуючи дослідження науковців 9Аллагулова И.Н., Ачкан В.В., Бібік Н.М., Бондар С.П., Головань М. С., Зимняя И. А., Кайдалова Л.Г., Локшина О.І., Нагорна Н. В., Овчарук О.В., Пометун О.І., Прус А. В., Раков С.А., Савченко О.Я., Химинець В.В., Nager P., Nutmacher W.) вважаємо, що результатом, а отже й головною метою, такого підходу до навчання алгебри має бути формування математичної компетентності учня, яка є інтегрованою якістю особистості, що формується і розвивається в процесі навчання і поєднує в собі: усвідомлену потребу в математичних знаннях, мотивацію до здійснення навчальної математичної діяльності, математичні знання та вміння, володіння способами математичної діяльності, здатність до самоконтролю і самооцінки, готовність успішно розв'язувати проблеми і завдання в навчанні та життєвих ситуаціях, що потребують математичних знань і методів пізнання.

Змістовий компонент навчання алгебри основної школи на засадах компетентнісного підходу складається з двох частин – нормативної, яка визначена навчальною Програмою з математики для учнів 5-9 класів

загальноосвітніх навчальних закладів, та компетентнісно-орієнтованої, яку, на нашу думку, найкраще реалізувати у формі *системи компетентнісно-орієнтованих задач*.

Компетентнісно орієнтована (в деяких публікаціях – контекстна, комплексна, інтегрована) задача – це інноваційний компонент навчального процесу, який з'явився, власне, у зв'язку з розвитком ідей компетентнісного навчання. Таку задачу трактують як «форму організації навчального матеріалу, змодельовану у вигляді життєвої ситуації з метою формування предметних, надпредметних, ключових компетентностей». Використання компетентнісно-орієнтованих задач в навчальному процесі дозволяє розвивати узагальнені навчальні вміння, забезпечити застосування предметних знань та вмінь у нових, незнайомих для учнів ситуаціях, отримувати досвід розв'язування проблем соціального характеру.

У шкільних підручниках з алгебри є задачі, насамперед – текстові, які можна віднести до класу компетентнісно-орієнтованих задач. Розв'язування таких задач реалізує прикладну спрямованість навчання математики в школі, однак ці задачі не задовольняють у повній мірі провідні потреби розвитку сучасних школярів, зокрема підлітків, у соціалізації та пізнанні оточуючого світу.

Компетентнісно-орієнтована задача володіє певними специфічними властивостями, а саме: містить імітацію життєвої ситуації; має навчаючий характер; відповідає віковим особливостям учнів; зміст задачі виходить за межі однієї предметної області; частина даних, необхідних для отримання розв'язку, відсутня (учні мали б зрозуміти це і знайти необхідну інформацію з різних джерел).

Наведемо деякі приклади компетентнісно-орієнтованих задач з алгебри.

Задача 1. Чорноземний шар ґрунту утворюється в процесі перегнивання залишків рослин. Визначте, скільки років триває процес утворення шару чорнозему товщиною 2,5 см, якщо для утворення шару товщиною 4 см потрібно 1200 років. (Запишіть розв'язок задачі у вигляді формули, яка задає функцію.)

Задача 2. Тарас стояв на тротуарі й побачив вантажівку, яка повільно рухалась. Відстань до вантажівки була 100 м, ширина вулиці – 16 м, швидкість вантажівки – 45 км/год. Швидкість Тараса – 120 м/хв. Скільки часу потрібно Тарасу, щоб перейти вулицю? Чи встигне Тарас перейти вулицю до того, як вантажівка подолає 100 м? Якими можуть бути наслідки для Тараса, якщо він не помітить таксі, яке об'їжджає вантажівку на швидкості 80 км/год? (Накресліть в одній системі координат графіки руху Тараса, вантажівки й таксі.)

Задача 3. Аркуш паперу розривають навпіл. Одну з отриманих половинок знову ділять навпіл і т. д. Скільки потрібно зробити таких поділів, щоб отримати шматочок паперу, маса якого дорівнює масі атома води. Маса аркуша паперу становить 2 г.

Задача 4. (Задача з "Арифметики" Л.Ф. Магницького) Біля мосту через річку зустрілися ледар і чорт. Ледар поскаржився на свою бідність. У відповідь чорт запропонував: "Я можу допомогти тобі. Щоразу, як ти перейдеш цей міст, у тебе гроші подвоюються. Але щоразу, перейшовши міст, ти маєш віддати мені 24 коп.". Тричі проходив ледар міст, а коли заглянув у гаманець, там було порожньо. Скільки грошей було в ледаря?

Висновки. Систему компетентнісно-орієнтованих задач, як засіб формування математичної компетентності учнів 7-9 класів у процесі навчання алгебри, на нашу думку, потрібно будувати так, щоб вона містила задачі до кожної теми шкільного курсу алгебри, які можна розв'язувати безпосередньо на уроках в процесі навчання. Крім того, до неї мають увійти такі завдання, які задовольняють наступну класифікацію: задачі, що забезпечують інтеграцію з іншими навчальними предметами; історичні математичні задачі; професійно орієнтовані задачі; задачі, які моделюють різноманітні ситуації повсякденного життя.

Збірник таких задач може також бути основою елективного курсу «Математика для життя».

ЛІТЕРАТУРА

1. Ачкан, В.В. Математичні компетентності учнів, напрями їх набуття та шляхи формування в старшій школі / В.В. Ачкан // Педагогічні науки. – 2010. - № 56. – С. 5-6.
2. Овчарук, О. Компетентності як ключ до оновлення змісту освіти /О. Овчарук // Стратегія реформування освіти в Україні: Рекомендації з освітньої політики.– К.: "К.І.С.", 2003.– С. 13–43.
3. Раков, С.А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій: дис. ... д-ра. Пед. наук: 13.00.02 / Сергій Анатолійович Раков. – К., 2005. – 381 с.
4. Hutmacher, W. Key Competencies in Europe / Walo Hutmacher // Report # DECS/SE/Sec-(96)-43 of the Symposium „A Secondary Education for Europe Project”. Berne, Switzerland, 27—30 March, 1996. — Strasbourg : Council for Cultural Cooperation, 1997. — 72 p., 4

25. ОКРЕМІ ПИТАННЯ ОРГАНІЗАЦІЇ ТА ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИК У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ БАКАЛАВРІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 040201 – «МАТЕМАТИКА»

Наталія Манько, Ігор Зіновєєв

Запорізький національний університет

Вступ. Педагогічна діяльність характеризується низкою специфічних особливостей, які відрізняють її від інших видів сучасних професій. Одна з них – це специфіка професійної взаємодії та інтеракції між вчителем та учнем, викладачем та студентом. На відміну від взаємозв'язків суб'єкт – об'єкт, характерних для більшості професій, у сфері навчання домінують взаємозв'язки особистість – особистість (суб'єкт – суб'єкт) з високим рівнем довіри зі сторони учня. Робота вчителя – це робота з дітьми, які кардинально різняться за психотипом, рівнем інтелекту, інтересами, станом здоров'я тощо. Тому від вчителя і зокрема вчителя математики, як з боку органів освіти, так із боку учнів та їх батьків, вимагається високий рівень сформованості комунікативних, пізнавальних, організаторських, рефлексивних, креативних умінь, навичок саморегуляції тощо. У свою чергу, це передбачає ґрунтовну теоретичну

підготовку, закріплену у практичній діяльності та реальній взаємодії з учнівським та педагогічним колективами.

Постановка проблеми та мета дослідження. В провідних країнах Європи практична підготовка фахівців в основному проводиться за однією з трьох схем: постійна («дуальна» схема) практична підготовка триває протягом усього навчального року паралельно з навчальними заняттями (Німеччина), а навчальні плани розробляються виробничими асоціаціями; практика здійснюється у середині навчального року (Великобританія); щотижнева зміна теоретичної та практичної підготовки (Швеція), що дозволяє уникнути абстрактного викладання під час тривалого навчання. Але жодна з цих моделей не знайшла нормативно закріпленого практичного втілення у процесі підготовки фахівців математики в Україні.

Варто зазначити, що до аналізу проблем організації і проведення практик вітчизняні й зарубіжні науковці (Г. Аніловська, Ю. Бабанський, В. Бондар, С. Гончаренко, Н. Кузьміна, З. Курлянд, В. Майборода та ін.) зверталися неодноразово. Всі вони доходять висновку про надзвичайну ефективність кожної з зазначених форм такої організації практик окремо та пропонують їх поєднання для формування особистісних, соціальних та професійних компонентів готовності до професійної діяльності. Мета даного дослідження – висвітлення на основі власного практичного досвіду окремих питань організації та проведення практик у процесі навчання бакалаврів напряму підготовки 040201 – «Математика».

Виклад основного матеріалу дослідження. Організація практик вітчизняних бакалаврів з математики здійснюється відповідно до існуючого Положення про проведення практик студентів вищих навчальних закладів України та проекту його нової редакції [1, 2], проектів Галузевого стандарту вищої освіти за напрямом підготовки 040201 – Математика. Сумарний навчальний час, який відводиться проектом стандарту на проведення практик визначається галужевими стандартами підготовки фахівців (або проектами), що відображається відповідно в навчальних планах і графіках навчального процесу, зокрема для напряму 040201 цей час складає 10 – 12 кредитів ЄКТС (1 кредит ЄКТС = 30 годин), що становить 4 – 5 % від загального навчального часу 240 кредитів підготовки за освітньо-кваліфікаційним рівнем (ОКР) «бакалавр». Нажаль, тенденції останніх років – скорочення аудиторного навантаження та «оптимізація» навчального процесу, призводить до свідомої відмови ВНЗ від ознайомчої (ознайомлювальної) педагогічної практики, що не іде на користь підготовці фахівця.

Згідно з [1, 2] такі питання як перелік видів практик, їх форми, тривалість і терміни проведення, зміст і послідовність визначається навчальними закладами, у проекті стандарту наголошується на тому, що нормативними видами практик для ОКР «бакалавр» напряму підготовки «Математика» є навчальна, виробнича та переддипломна практики (за умови виконання дипломної роботи). Невід'ємним складником ОПП за ОКР «бакалавр» є типові програми практик, затверджені Науково-методичною радою вищого навчального закладу.

При підготовці бакалавра-математика оптимальним варіантом є створення єдиної наскрізної програми практик, заснованої на моделі вертикальної

організаційної структури, за якої всі працівники групуються за відповідним ОКР. Логіка такої організації навчального процесу передбачає наступну послідовність практик: ознайомлювальна $\Rightarrow$ навчальна $\Rightarrow$ виробнича $\Rightarrow$ переддипломна, зокрема, при підготовці математиків із присвоєнням кваліфікації «вчитель»: ознайомлювальна $\Rightarrow$ навчальна $\Rightarrow$ педагогічна $\Rightarrow$ переддипломна. Тобто у процесі проходження практик студент спочатку ознайомлюється зі своєю майбутньою професійною діяльністю, поступово заглиблюється у виробничий процес: спочатку як активний спостерігач, а потім – виконавець і, нарешті, аналізує, осмислює окремі аспекти майбутньої професії на науковому рівні. Найбільша доля часу практичної підготовки припадає на виробничу практику (50 - 60 % від загального часу практик), яка при підготовці математиків із присвоєнням кваліфікації «вчитель» проводиться у формі педагогічної.

Педагогічна практика має за мету розв'язати наступні основні задачі: поглибити та закріпити теоретичні знання, отримані студентами в університеті, зокрема, з методики викладання математики; навчити застосовувати ці знання на практиці в навчально-виховній роботі з учнями із використанням різноманітних прийомів та методів; навчити студентів самостійно планувати і проводити навчально-виховну роботу в середніх навчальних закладах, працювати з батьками учнів; навчити студентів планувати і проводити уроки різного типу з використанням різноманітних методів навчання, що активізують пізнавальну діяльність учнів, а також проводити позаурочну роботу з учнями з математики; навчити студентів спостерігати, аналізувати, узагальнювати і використовувати передовий досвід навчально-виховної роботи, що накопичений педагогічним колективом баз практики; розвивати і закріплювати у студентів любов до педагогічної професії; стимулювати до вивчення математики і педагогічних дисциплін; вдосконалювати свої педагогічні здібності; навчити студентів виконувати обов'язки класного керівника, працювати з окремими учнями і з колективом; прищепити студентам навички уважного відношення до охорони здоров'я учнів; розвивати у студентів зацікавленість до науково-дослідницької праці.

Для успішної реалізації завдань практичної підготовки фахівця – вчителя математики, в умовах відсутності ознайомчої навчально-педагогічної практики, необхідно, на наш погляд, забезпечити високий рівень організації та навчально-виховної роботи студента-практиканта, що передбачає наступні дії.

Організаційна робота: 1) участь в установчій та підсумковій конференціях з педагогічної практики на факультеті; 2) ознайомлення з розкладом дзвінків, занять вчителя математики, класного керівника і класу, за яким закріплений студент; 3) ознайомлення з робочими планами організатора з позакласної роботи, вивчення плану роботи класного керівника; 4) ознайомлення з робочими планами заступника декана з профорієнтаційної роботи; 5) складання (на першому тижні проходження практики) індивідуального плану роботи студента-практиканта на весь період педагогічної практики з розрахунку шестигодинного робочого дня.

Навчально-виховна робота: 1) відвідування занять за всіма предметами в закріпленому класі з метою вивчення учнів та ознайомлення з педагогічним колективом; 2) відвідування, аналіз, обговорення занять інших практикантів, а також занять, проведених вчителями; 3) вивчення навчальної програми з

математики; 4) ознайомлення із підручниками й посібниками з математики, що безпосередньо використовуються у навчальному процесі за місцем практики; 5) ознайомлення з матеріалами методичного кабінету школи (методичних розробок кафедри); 6) підготовка до кожного заняття (підбір матеріалу, вибір методів проведення занять, складання конспектів занять, підготовка наочних посібників і технічних засобів навчання); 7) дослідження вікових та індивідуальних особливостей учнів, складання психолого-педагогічної характеристики окремого учня, колективу; 8) вивчення роботи вчителя з учнями різного рівня підготовки; 9) перевірка зошитів, контрольних, самостійних, лабораторних, типових (за наявності) робіт учнів; 10) надання допомоги в оформленні кабінету математики (кафедри), виготовлення наочних посібників та обладнання; 11) участь в організації навчальних екскурсій, вечорів, тематичних бесід; 12) вивчення досвіду роботи вчителя з батьками учнів; 13) отримання досвіду планування виховної роботи з класом (за необхідності з окремою групою); 14) виконання обов'язків помічника класного керівника; 15) виконання завдання з педагогіки, запропонованого відповідальним за це викладачем кафедри педагогіки та психології.

Важливою ланкою в організації практики є формування індивідуальної програми проходження практики для кожного студента. При побудові такої програми доцільно враховувати як задачі традиційної практики, так і ті, які необхідно розв'язати при формуванні у студентів професійної мобільності. Внаслідок цього доцільно виділити блоки, присвячені професійному саморозвитку, особистісному розвитку та набуття професійного досвіду, що набуває реального вмісту в індивідуальному завданні студента для проходження практики.

Індивідуальні завдання: Кожен студент-практикант отримує індивідуальне завдання, що містить повну і вичерпну інформацію про місце проходження практики, займану на час практики посаду, завдання з методики викладання математики, педагогіки та психології.

Підсумком проходження педагогічної практики є науково-практична конференція, на якій аналізуються питання щодо рівнів сформованості основних компонентів професійної діяльності, обміну набутим досвідом.

Висновки. Незважаючи на недосконалість нормативної бази щодо питань практики та працевлаштування, ВНЗ намагаються вирішити дані проблеми, спираючись на рекомендаційні документи [4]. З метою вдосконалення проведення практик та поліпшення підготовки студентів до майбутньої професійної діяльності необхідно: підтримувати зв'язки між ВНЗ та керівними закладами освіти регіонів для проведення постійних досліджень з метою вивчення потреби у фахівцях – математиках, для забезпечення належного рівня здобуття студентами професійних навичок під час проходження виробничої практики; розробити і запровадити систему ранньої адаптації випускників на первинних посадах; нормативно закріпити комплекси заходів, необхідних для забезпечення набуття відповідних навичок та закріплення здобутих знань; налагодження співпраці між викладачами – керівниками практики від кафедр та керівниками практики від шкіл, як щодо підготовки наскрізних програм практики, так і щодо покращення підготовки студентів до практик за допомогою

залучення до процесу навчання в періоди між практиками провідних фахівців, вчителів-методистів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Положення про проведення практик студентів вищих навчальних закладів України [Електронний ресурс]: Наказ Міністерства освіти України від 8 квітня 1993 р. № 93 / Кабінет Міністрів України. – [Зі змінами від 20. 12. 94 № 351]. – Режим доступу : <http://zakon4.rada.gov.ua/laws/show/z0035-93>.

2. Проект "Положення про проведення практик студентів вищих навчальних закладів України" [Електронний ресурс]: ДНУ ІТЗО МОН України. К.: 2010 – Режим доступу : <http://vzvo.gov.ua/projects/118-the-provisions-of-the-practice-of-studentv-vischih-navchalnih-zakladv-ukraine.html>.

3. Зіновієв, І.В. Математика: Навчально-методичний посібник з педагогічної та педагогіко-асистентської практики для студентів IV, V курсів та магістрів / І.В. Зіновієв, Н. І.–В. Манько, О.Г. Спиця О.Г. та ін. – 3.: ЗНУ, 2011. – 84 с.

4. Про практичну підготовку студентів [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://osvita.ua/legislation/Vishya_osvita/2728 – (Нормативний документ МОН молоді та спорту України. Лист від 07.02.09 року №1/9-93).

26. ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОБЛЕМАТИКИ ЗАСТОСУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ І КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ У НАВЧАЛЬНОМУ ПРОЦЕСІ

Емма Динис

Свялявський технічний коледж

Вступ. Предметом дослідження є використання сучасних інформаційних комп'ютерних технологій у навчальному процесі у вищих навчальних закладах, впровадження методів навчання із застосуванням інформаційних комунікаційних технологій.

Інформаційні технології (ІТ) еволюційно змінюють спосіб мислення та методи навчання. Актуальність даного дослідження обумовлена необхідністю оволодіння сучасними інформаційними комп'ютерними технологіями, які створюють для ділового життя більш придатні умови функціонування у зовнішньому середовищі, сприяють виробленню системного підходу до розв'язування прикладних задач. В цілому, комунікаційні технології Інтернету трансформують способи збору джерел інформації, аналізу масиву даних, технології прийняття управлінських рішень.

Основні положення та результати. В умовах глобально залежного світу, коли учасниками міжнародного Інтернет-спілкування є представники різних культур і світів, означена вище проблема обумовлює створення універсальних технологій і технологічних знань для цивілізаційного сприйняття джерел інформації. Практично, предметом Інтернет-технологій є цілісна система міжнародних відносин. «Комунікаційні технології Інтернету обумовлюють зміну прийняття управлінських рішень включаючи створення характерних правових механізмів регулювання міжнародних відносин» [1]. Аналіз різних комунікаційних джерел свідчить про наявність різних тлумачень предмету даного дослідження. Існування

різних тлумачень методів навчання, освітніх технологій на сучасному етапі обумовлено стрімким розвитком інструментів, за допомогою яких здійснюється обробка інформації – комп'ютерної техніки та програмного забезпечення.

Особливої актуальності набуває наукова тематика, пов'язана з інформаційними та комунікаційними технологіями (ІКТ). Питання проблем визначення методів застосування ІТ, ІКТ для навчання у вищій школі недостатньо досліджені.

«Освітні технології – це ефективне використання технологічних засобів, інструментів у навчанні. Електронні освітні технології стали важливою частиною функціонування інформаційного суспільства. Сучасна освітня технологія включає в себе електронне навчання (e-learning), навчальні технології, інформаційні і комунікаційні технології (ІКТ), EdTech, технології навчання за інструкціями, мультимедійні засоби навчання, технології розвитку навчання, навчання на основі комп'ютерних інструкцій (навчальні програми - прим. автора), інструкції для навчання керувати комп'ютером (computer managed instruction), комп'ютерні тренажери, навчання типу «комп'ютер в якості помічника» або навчання типу «комп'ютер в якості навчального посібника». Інтернет-навчання, гнучке навчання, веб-навчання, онлайн навчання, віртуальну освіту, персональне середовище навчання, мережеве навчання, віртуальне навчальне середовище, м-навчання, і цифрову освіту (наприклад, оцифровані підручники-прим.автора) (digital education). Ця термінологія по-різному використовується і тлумачиться і об'єднується в широке поняття освітніх технологій та електронного навчання. Ці альтернативні описові терміни відрізняються від терміну "педагогічна технологія". Наприклад, м-навчання (m-learning – мобільне навчання) підкреслює мобільність, але в іншому не відрізняється від освітньої технології.» [5].

Комп'ютерні науки використовують результати досліджень інших наук, які також розвиваються і спричиняють зміни предмету вивчення комп'ютерних наук і освітніх технологій. Комп'ютерні науки - це міждисциплінарні науки. Для ефективного навчання з використанням інформаційних комп'ютерних технологій студентам необхідно володіти системними знаннями з комп'ютерних наук. З метою уникнення непорозумінь необхідні знання термінологічного апарату інформатики, а також знання предмету, який вивчають, використовуючи ІКТ. Так, наприклад, програма MathCad є автоматизованою системою, що дозволяє обробляти дані динамічно у числовому та аналітичному (символьному, формульному) вигляді. Вона надає можливість проводити математичні розрахунки та виконувати науково-технічні роботи. Є можливість використовувати сотні потужних математичних функцій, які дозволяють ефективно розв'язувати будь-які математичні, інженерні та науково-технічні обчислення. Умовами успішного використання програми Mathcad для вивчення математичних дисциплін серед інших чинників рекомендовано наступне:

1. Читати лекції для студентів на основі використання програми Power Point з застосуванням відповідного програмного забезпечення та сучасної комп'ютерної техніки.

2. Студенти повинні оволодіти системними знаннями та термінологічним апаратом інформатики, наприклад, такими поняттями як інтерфейс вікна, інтерфейс користувача, контекстне меню, об'єкти Windows, меню, директиви меню, текстове поле конкретного діалогового вікна, опції і т.д;

3. На початку першого заняття необхідно акцентувати увагу слухачів на системні об'єкти Mathcad (інтерфейс вікна програми Mathcad, назви панелей та їх призначення, можливість їх підключення та виключення в залежності від характеру задачі, яку потрібно розв'язати і т.д);

4. На заняттях в комп'ютерних класах повинна бути обмежена кількість студентів (із збільшенням кількості студентів ефективність знижується); для викладача необхідно спілкуватися індивідуально з кожним студентом, які з різною швидкістю вчаться працювати з певною програмою.

5. Вивчення програми Mathcad у навчальному процесі вимагає значної уваги до самостійної роботи студентів з виконання завдань з вивчення математичних дисциплін та іноземної мови.

Впровадження вказаних позицій стосується також іншого програмного забезпечення, яке використовується для вивчення математичних дисциплін, включаючи Microsoft Excel, Microsoft Access. Майже будь-яку роботу по обробці інформації за допомогою комп'ютера можна дуже часто виконати декількома способами. Мова йде про ефективне використання комп'ютерних технологій та системні знання. В інформатиці все жорстко орієнтовано на ефективність [2]. В науці і на практиці відсутні єдині підходи.

Надзвичайно важливою є проблема розрахунку кількості годин, які необхідні для гармонійного одночасного вивчення кількох дисциплін. «Більшість видів діяльності в галузі освіти не може витримати невизначеного поглинання ресурсів без важливого зменшення граничної кількості ресурсів. Одна година індивідуальних занять щодня може бути досить ефективною, 2 години можуть бути вдвічі ефективнішими, 4 години, ймовірно, не будуть ефективнішими в 4 рази, а 8 годин можуть бути зовсім непродуктивними.

При здійсненні розподілу ресурсів (прим.автора) необхідно розглянути спадаюче граничне значення більшості ресурсів - час вчителя, час учня, гроші, книги, приміщення, (типи комп'ютерів, схильність учнів до навчання по даному предмету, рівень викладання додає автор) тощо» [3]. Який взаємозв'язок між кількістю використаних ресурсів і глобальною ефективністю? Ці питання можуть бути темою окремого дослідження.

Висновки.

1. Навчання студентів, в тому числі самостійна робота, повинне базуватись на отриманні системних знань з комп'ютерних наук.

2. Інформаційні комунікаційні технології створюють для ділового життя більш придатні умови до зовнішнього середовища, виробляють системний підхід до розв'язування прикладних задач. Комунікаційні технології Інтернету обумовлюють зміну збору джерел інформації, аналізу масиву даних, технологій прийняття управлінських рішень.

3. Комп'ютерна техніка та ринок програмного забезпечення стрімко змінюються, тому навчальний процес повинен бути безперервним для користувачів комп'ютерних інформаційних технологій. Цього вимагає конкурентоспроможність майбутніх спеціалістів.

4. Використання інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) в навчальному процесі, на відміну від традиційних аудиторних занять, дозволяє використовувати навчальні ресурси за межами аудиторій, навчальних закладів, з використанням

способів дистанційного навчання, здійснювати обмін інформацією між навчальними закладами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Динис, Г.Г. Міжнародно-правові концепції глобального права, права Інтернету або Кіберправа / Г.Г. Динис // Часопис Київського університету права. – 2011. - № 4. - С. 320-332.
2. Динис, Е.Г. Дослідження проблематики термінологічного апарату основ інформатики / Е.Г. Динис //Збірник наукових праць. Національна академія наук України. – 2013. – Вип.66. – С. 156-169. – 196 с.
3. Тейлор, Р. Прийняття рішень в державному секторі/ Тейлор Раймонд, Вереш Марія // Підручник для працівників державних установ з прикладами з практики./ - Видавництво Felicity Press, 80 East River Road, Whitefield, Maine USA, 1997. – 192 р.
4. <http://www.yourdictionary.com/assistance#americanheritage> American Heritage Dictionary.
5. http://en.wikipedia.org/wiki/Educational_technology (переклад автора)

27. ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ ПЛОСКОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО ТІЛА В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ПЛАНІМЕТРІЇ

Тетяна Снігур

*Національний педагогічний університет імені
М.П. Драгоманова*

Вступ. Спроби дати означення поняття плоского многокутника можна знайти в підручниках з геометрії [1], [2], [3] та інших. Воно пропонувалося в курсі планіметрії загальноосвітньої школи. У даній статті ми пропонуємо визначення поняття плоского геометричного тіла, яке можна, на наш погляд, включити в шкільний курс планіметрії середньої школи на поглибленому рівні вивчення даного предмета.

Для цього задіяні такі необхідні математичні поняття, як: площа; геометрична фігура; круг, коло та окіл точки; відрізок; ламана; обмежена фігура; внутрішня точка і внутрішність; межева точка і межа геометричної фігури.

Виклад основного матеріалу. У планіметрії під *геометричною фігурою*, або плоскою фігурою, або просто фігурою розуміють довільну множину (сукупність) Φ точок площини. Тоді довільну точку площини стосовно фігури Φ називають:

1) *внутрішньою* точкою фігури Φ , коли існує окіл цієї точки, усі точки якого належать фігурі Φ ;

2) *зовнішньою* точкою фігури Φ , коли існує окіл цієї точки, у якому немає жодної точки фігури Φ ;

3) *межевою* точкою фігури Φ , коли будь-який окіл цієї точки містить у собі як точки фігури Φ , так і точки, що не належать фігурі Φ ;

4) *граничною* точкою фігури Φ , коли будь-який окіл цієї точки містить у собі безліч точок фігури Φ ;

5) *ізолюваною* точкою фігури Φ , коли існує окіл цієї точки, у якому лише ця точка належить фігурі Φ .

Множину $G(\Phi)$ усіх внутрішніх точок фігури Φ називають *внутрішністю* фігури Φ , а множину $S(\Phi)$ усіх межових точок фігури Φ називають *межею* фігури Φ .

Об'єднання фігури Φ з її межею називають *замиканням* даної фігури і позначають $\overline{\Phi}$.

Стосовно межі $S(\Phi)$ даної фігури Φ можливий один і лише один з трьох випадків:

1) $S(\Phi) \subset \Phi$, тобто кожна точка межі $S(\Phi)$ є також точкою фігури Φ і тоді фігуру Φ називають *замкненою*;

2) $S(\Phi) \cap \Phi = \emptyset$, тобто кожна точка межі $S(\Phi)$ не є точкою фігури Φ , і тоді фігуру Φ називають *відкритою*;

3) $S(\Phi) \cap \Phi \neq \emptyset$ і $S(\Phi) \not\subset \Phi$ тобто деякі точки межі $S(\Phi)$ є точками фігури Φ , а деякі ні, і тоді фігура Φ не є замкненою, а також не є відкритою.

Відкрити фігуру Φ називають *областю*, коли будь-які дві точки цієї фігури можна сполучити ламаною, що цілком міститься у цій фігурі. При цьому, відкрити фігуру Φ називають також *лінійно зв'язною*.

Геометричну фігуру Φ площини називають *плоским геометричним тілом*, якщо вона є замиканням деякої області G , тобто $\Phi = \overline{G} = G \cup S(G)$. При цьому обов'язково внутрішність Φ співпадає з G , межа $S(\Phi) = S(G)$ і цю межу називають *периметром тіла* Φ .

Плоскі геометричні тіла можуть бути *обмеженими* і *необмеженими*. В шкільному курсі геометрії розглядаються лише обмежені плоскі геометричні тіла.

Плоска фігура (зокрема тіло) називається *опуклою*, якщо будь-які дві її точки можна з'єднати відрізком, який цілком міститься у цій фігурі.

З означення плоского геометричного тіла випливає, що геометрична фігура Φ є тілом тоді й тільки тоді, коли виконуються умови:

- межа фігури Φ співпадає з межею її внутрішності та міститься у Φ ;
- будь-які дві внутрішні точки фігури Φ можна сполучити ламаною, усі точки якої є внутрішніми точками Φ .

Це твердження також можна вважати означенням плоского геометричного тіла і воно є еквівалентним наведеному вище.

На основі даного твердження можна скласти алгоритм перевірки, чи є дана геометрична фігура Φ плоским тілом, чи ні:

1. Знайти межу $S(\Phi)$ та внутрішність $G(\Phi)$ даної геометричної фігури Φ .
2. Якщо межа $S(\Phi)$ не міститься у фігурі Φ , перейти на пункт 7.
3. Якщо $G(\Phi) = \emptyset$, тобто фігура Φ не має внутрішніх точок, перейти на пункт 7.
4. Якщо внутрішність $G(\Phi)$ фігури Φ не є лінійно зв'язною, перейти на пункт 7.
5. Якщо межа внутрішності $G(\Phi)$ не співпадає з межею фігури Φ , перейти на пункт 7.

6. Якщо межа внутрішності $G(\Phi)$ співпадає з межею фігури Φ , зафіксувати, що фігура Φ є геометричним тілом з поверхнею $S(\Phi)$ і перейти на пункт 8.

7. Зафіксувати, що фігура Φ не є геометричним тілом.

8. Якщо існує круг, що містить фігуру Φ , то зафіксувати, що фігура Φ обмежена і перейти на пункт 10, якщо ні, то перейти до пункту 9.

9. Зафіксувати, що фігура Φ необмежена.

10. Якщо відрізок AB міститься у фігурі Φ для будь-яких точок A і B цієї фігури, то зафіксувати, що фігура Φ опукла і перейти на пункт 12, якщо ні, то перейти до пункту 9.

11. Зафіксувати, що фігура Φ не є опуклою.

12. Завершити роботу.

Висновки. Запропонований спосіб введення в планіметрії чіткого означення поняття плоского геометричного тіла та пов'язаний з ним алгоритм дослідження геометричної фігури, на нашу думку, цілком доступний і може бути корисним більшості учнів школи, оскільки розкриває сутність простих і водночас важливих і в теорії, і в житті таких математичних понять, як:

- внутрішня точка та внутрішність фігури;
- межева точка та межа фігури;
- лінійна зв'язність фігури.

Його можна реалізувати вже в основній школі на початку вивчення теми «Многокутники. Площі многокутників». Зміст такого матеріалу є певним узагальненням змістової лінії «Геометричні фігури і їх властивості» та основою для вивчення нової змістової лінії «Геометричні величини, їх вимірювання та обчислення».

Для математично обдарованих учнів цей спосіб можна поглибити і розширити на заняттях гуртка, факультативу чи окремо вибраного елективного курсу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бевз, Г.П. Геометрія: Підручник для 8 кл. середніх загальноосвітніх закладів / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. – К.: Вежа, 2008. – 256 с.

2. Колмогоров, А.Н. Геометрия: Учебное пособие для 6-8 кл. сред. шк. / А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов. – М.: Просвещение, 1979. – 383 с.

3. Погорелов, А.В. Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. сред. шк. / А.В. Погорелов. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 1993. – 383 с.

28. МАТЕМАТИКА – МОВА НАУКИ

Олена Радзієвська

Національний університет харчових технологій

Вступ. Для спілкування і для висловлювання своїх думок людство створило блискучий засіб – живу розмовну мову і письмовий запис її. Сучасні мови протягом часу не залишалися незмінними, вони збагачували свій словниковий запас, створювали нові засоби для відображення витончених відтінків думки та людських емоцій. Однак, незважаючи на всю багатогранність та гнучкість, в багатьох випадках мова сучасної людини є недостатнім засобом для передачі інформації. Тому в різноманітних галузях людської діяльності створюється

власні мови, які здатні точно і стисло передавати сутність цієї діяльності. Використання ж математичної мови в цих сферах дозволило отримати революційні результати і відкрило нові горизонти для досягнень.

Основні положення та результати. Застосування математичної символіки для стислої передачі інформації в різноманітних галузях людської діяльності, вміння сприймати інформацію, яка передається математичними символами, побудова математичних моделей і розв'язання їх за допомогою комп'ютерних програм.

Розглянемо задачу про приріст капіталу з «Математики» видатного індійського математика і астронома Аріабхати :

«Нехай капітал (сума грошей) віддано в зростання (тобто в позику під відсотки). Через місяць отриманий приріст віддано знов в зростання на декілька місяців. Якщо відомо остаточний приріст, встановити приріст за місяць.»

Тепер наведемо розв'язок цієї задачі запропоноване в цій книзі:

«Потрібно помножити капітал на загальний приріст і на час додати квадрат половини капіталу, добути корінь, відняти половину капіталу і різницю поділити на кількість місяців.»

Якщо б цю задачу розв'язували би сучасними методами. Спочатку ввели би позначення. Нехай: K – капітал, x – місячний приріст, P – загальний приріст, t – час (додаткового приросту). Тоді з умови задачі одержується рівняння:

$$x + t \frac{x}{K} x = P.$$

Або
$$tx^2 + Kx - PK = 0.$$

Звідки
$$x = \frac{-K + \sqrt{K^2 + 4PKt}}{2t}, \text{ тобто } x = \frac{\sqrt{KPt + \left(\frac{K}{2}\right)^2} - \frac{K}{2}}{t}.$$

Зрозуміло, що математичні формули дозволяють отримати розв'язок цієї задачі і учню школи. А якщо б ці формули були невідомі? Як розв'язати цю задачу? Для багатьох відповідей залишалась би відкритою. Навіть використовуючи розв'язок Аріабхати, можна отримати невірний результат, якщо пропустити коми.

Цей простий приклад показує як важливо вміти володіти формулами наскільки це спрощує можливість отримати бажаний результат!

При сучасних швидкостях технологічних процесів людська психіка не здібна вчасно приймати рішення про подальший їх розвиток і на підставі отриманої інформації здійснювати необхідне керування. Для цього потрібно автоматичний пристрій. Але автоматичний пристрій сам по собі не здатний розв'язати логічну задачу, він не розуміє вказівок «роби краще», «роби точніше» - йому потрібні строгі кількості вказівки. Але для того щоб їх надати, необхідно описати якісну математичну модель процесу керування.

Висновки. Математична символіка дозволяє стискати запис інформації, що робить її зручною для подальшого аналізу і приводить до можливості застосування математичних методів, результатами цього є значна економія часу і коштів.

Важливо, щоб студенти навчилися розуміти інформацію, записану за допомогою формул, і застосовувати математичні формули, а також отриману інформацію для прийняття оптимальних рішень в своїй фаховій діяльності.

29. РОЛЬ МОТИВАЦІЙНОЇ КОМПОНЕНТИ ПРОЦЕСУ ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ

Олексій Зінкевич, Володимир Сафонов

Національний університет харчових технологій

Олександр Нещадим

*Національний університет біоресурсів і
природокористування України*

Вступ. Вивчення математики повинно сприяти виявленню у студентів живої зацікавленості до того, як математика «працює» в економічних дисциплінах і безпосередній професійній діяльності, тоді сама по собі буде розв'язана проблема подолання розриву між теорією та практикою.

Механізмом учбової мотивації є вдале формулювання викладачем цілей і завдань навчальної діяльності в умовах професійної спрямованості, які мають прийняти студенти і спрямувати свою діяльність на їх досягнення. В цій роботі важливе значення має правильна організація педагогічної взаємодії між викладачами і студентами.

Основні положення та результати. Мотивація у вивченні математичного матеріалу повинна здійснюватися у всіх формах навчання: лекції, практичні завдання, самостійна робота; в цілеспрямованому поєднанні цілей, змісту, методів, засобів, форм організації навчальної діяльності студентів та форм контролю.

Мотивація може бути як зовнішньою, так і внутрішньою. Внутрішня мотивація – це виконання певної роботи через інтерес до неї, відчуття її внутрішньої цінності, тобто студент відчуває задоволення, спокій, зникає все зайве, залишається лише прагнення до вирішення поставленої цілі. Зовнішня ж мотивація не пов'язана з якоюсь визначеною діяльністю, але зумовлюється зовнішніми обставинами.

Часто стверджується, що математика – суто логічна структура. Крім того, громадська думка не ігнорує і естетичні аспекти цієї науки, що пов'язані з гармонією та узгоджуваністю її складових. В окремих випадках математику розглядають і як цікаву інтелектуальну гру. Більше того, щоб зрозуміти математику, необхідно досягти повної прозорості на кожному етапі. Але саме в цьому відношенні математика не відрізняється від інших галузей науки. В той же час неможливо вивчити математику, не маючи уявлення про те, для чого вона потрібна. Як відомо, в процесі розуміння ціль є суттєвою потребою. Студенти навчаються швидше і краще, якщо вони вчаться з визначеною ціллю. Особливо це стосується математики. Наявність більш-менш визначеної цілі вказує на вірний шлях, підсилює інтерес, допомагає виділити головне і відкласти до найкращих часів другорядне. Якщо ціль відсутня, то вивчаються випадкові теми, матеріал здається нудним та одноманітним – саме таким чином в студентів складається враження про математику як про нагромадження важких і нудних міркувань. Не даремно кажуть, що чітка постановка задачі – найважливіша частина її рішення.

Отже, при викладанні математики дуже важливо ставити перед студентами близькі і віддалені цілі з максимально можливою чіткістю. Іншими словами, учням потрібна мотивація. Через ці причини оволодіння методами і розуміння

того, до чого їх можна застосувати, більш важливе, ніж накопичення знань: методи, на відміну від ізольованих теорем і результатів, володіють динамікою.

Методи – це робочий інструмент, і так само, як неможливо опанувати ремесло, вивчаючи каталоги та відвідуючи виставки, так неможливо вивчати математику, перебуваючи стороннім спостерігачем. Методами потрібно користуватися. Саме з цих причин так важливо розв'язувати задачі. Рішення задач збагачує учня цікавим досвідом; він зустрічається з труднощами і вчиться їх оцінювати; він пізнає можливості і обмеження свого математичного інструментарію. Розв'язання задач дає нам можливість відкрити нові істини, про існування яких ми навіть і здогадувались.

Викладач повинен намагатися продемонструвати учням те, що зветься незбагненною ефективністю математики, чарівністю математики, що являє собою одне з її чудес. Якщо викладач встановив вподобання, до яких схильний студент, та цього здібності, визначив, що вподобання студента дуже цікаві, ідеї креативні та й знання з цього напрямку дуже стійкі, то він може запропонувати студенту науково-дослідну роботу.

Повертаючись до методів, зауважимо, що вивчаючи будь-яке твердження, слід надати учням можливість спробувати його довести самостійно. Якщо після серйозних зусиль нічого не виходить, слід переглянути підручник або вислухати пораду викладача і знову намагатися самостійно довести це твердження, поки не вийде. Дуже корисно робити це, якщо не разом з усіма, то хоча б з деякими ствердженнями. Природно, що навчання при цьому йде дуже повільно, але такий підхід набагато корисніший в порівнянні з пасивним вивченням докладів. Крім того, що відгадувати загадки приємно, розв'язання задач дає студенту ще й можливість відчути радість творчості, у нього виникає почуття, що доведені кимось твердження ним хоча б частково відкриті. Крім того, студент починає відчувати структуру даного розділу математики. Іншим шляхом це почуття розвинути неможливо. Ця думка підтверджує важливість цього методу із суто педагогічної точки зору.

Завдяки такій методиці викладання можна побачити нові аспекти уже відомих фактів і навіть закласти основу нових розділів математики. Іншими словами, таке викладання математики дає і активні динамічні знання (і це головне). Саме знання такого типу відрізняє розум від книги. Доки йдеться про накопичення інформації, наш розум не може змагатися з папером. Але знання, зафіксовані на папері, – це закам'янілі знання. Зайве накопичення «мертвих» знань іде врозріз з нормальною роботою нашого розуму.

Накопичувальний підхід до навчання шкодить найціннішому з того, чим усі в тій або іншій мірі володіють – безпосередністю, оригінальністю, творчими здібностями. Цікаво, що дуже часто запас знань обернено пропорційний здібностям відкривати щось нове, і вчені набагато більше цікавляться відкриттями, ніж знаннями.

Висновки. Мотиваційний компонент відіграє на всіх етапах процесу навчання велику роль. Тому, викладачам вищої школи треба враховувати, що мотиви у всіх студентів різні і необхідно використовувати щонайбільшу кількість мотивів, щоб мотивація була комплексною при видачі навчальних завдань (внутрішня і зовнішня, вступна і поточна) і зокрема оптимальною; треба враховувати також

складність навчальних завдань для всіх рівнів засвоєння знань. Все це тільки сприятиме підвищенню успішності навчальної діяльності студентів вищої школи.

Саме у навчальному закладі розвивається особистість, а завдання викладачів математики – підтримати її, дати поштовх до пізнання нових знань, сформулювати організованість, активність та стійкість, здатність студента задовольняти свої потреби через соціально схвалювану діяльність, допомогти отримати гарну освіту, а в подальшому цікаву роботу.

30. ОРГАНІЗАЦІЯ КОНТРОЛЮ ЯКОСТІ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Оксана Ніколаєва

Національний університет харчових технологій

Наталія Чинкуляк

Донецький державний університет управління

Вступ. Важливим компонентом навчального процесу є контроль знань студентів, мета якого полягає в оцінюванні навчальних досягнень і успіхів студентів, у вказівці шляхів вдосконалення, поглиблення, систематизації знань, умінь і навичок. Ця мета пов'язана з визначенням якості засвоєння студентами навчального матеріалу, передбаченого навчальним планом.

Мета даної роботи – розробити форми контролю знань студентів з вищої математики з використанням різних видів тестових завдань.

Основні положення і результати. Наведемо приклад модульної контрольної роботи «Диференціальне числення функції однієї змінної». Вона складається з 9 завдань, різних за рівнем складності та формою. Серед них: 6 тестових завдань закритого типу, що передбачають вибір однієї правильної відповіді з п'яти запропонованих; 3 відкритих завдання, виконання яких вимагає запису повного обґрунтованого розв'язання і відповіді. Закриті тестові завдання поділяються на два рівня складності: 2 завдання типу А, що відповідають базовому рівню; 4 завдання типу В, які є більш складними завданнями базового рівня. Включення в модульний контроль завдань відкритого типу (завдань типу С) дозволяє не звужувати поняття тесту («test» – перевірка, випробування), не зводити його до спроби «вгадати» правильну відповідь.

Модульний контроль. Диференціальне числення функції однієї змінної

A1. Чому дорівнює область визначення $D(y)$ функції $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-3x}$?

- а) $[2; +\infty)$; б) $(3; +\infty)$; в) $(2; +\infty)$;
г) $[2; 3) \cup (3; +\infty)$; д) $(-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$.

A2. Чому дорівнює похідна функції $y(x) = x + \sqrt{5}$?

- а) $y' = 1$; б) $y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{5}}$; в) $y' = x + \frac{1}{2\sqrt{5}}$; г) $y' = \sqrt{5}$; д) $y' = 1 + \sqrt{5}$.

B1. Чому дорівнює границя $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 - 7x^2 + 4}{5x^3 - 2x + 9}$? а) 0 ; б) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{4}{9}$; г) $\frac{5}{3}$; д) ∞ .		
B2. Чому дорівнює границя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 7x}$? а) 0 ; б) ∞ ; в) 1 ; г) $\frac{5}{7}$; д) $\frac{7}{5}$.		
B3. Чому дорівнює похідна функції $y(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$? а) $y' = \frac{1}{2\sqrt[3]{x^2 + 1}}$; б) $y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$; в) $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$; г) $y' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^4}}$; д) $y' = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}$.		
B4. Скільки точок перегину має графік функції $y(x) = x^5 + x^4 + 13x - 12$? а) 0 ; б) 1 ; в) 2 ; г) 3 ; д) 4 .		
C1. Обчислити границі:		
1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x}$;	2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{\sqrt{x+1} - 2}$;	3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+4} \right)^{3x+2}$.
C2. Обчислити похідні функцій:		
1) $y = x^3 \sqrt{x^2 + 2}$;	2) $y = \log_3 \cos^4 x$;	3) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$.
C3. Знайти асимптоти графіка функції $y = \frac{2x^2}{x+1}$.		

Критерії оцінювання модульної контрольної роботи. Правильна відповідь кожного з завдань A1 і A2 оцінюється 1 балом, B1 - B4 – 2 балами. Повне правильне розв’язання завдання C1 оцінюється 4 балами, C2 – 5 балами, C3 – 6 балами. Максимальний бал за виконання всієї роботи – 25.

Завдання типу А і В вважаються правильно виконаними, якщо студент вибрав одну правильну відповідь із п’яти запропонованих.

Оцінки завдань типу С залежать від повноти розв’язання і правильності відповіді. Правильна відповідь за відсутності тексту розв’язку оцінюється в 0 балів.

Загальна кількість набраних за модульну контрольну роботу балів дозволяє оцінити успішність її виконання та рівень засвоєння навчального матеріалу модуля «Диференціальне числення функції однієї змінної» (табл. 1).

Таблиця 1

Загальна кількість набраних балів	Визначення рівня виконання роботи
23 – 25	Відмінно – відмінне виконання роботи, відповіді без помилок.
19 – 22	Добре – взагалі правильна робота, відповідь з кількома незначними помилками (до 25%).
15 – 18	Задовільно – виконання роботи задовольняє мінімальні критерії для позитивної оцінки (помилки до 40%).

За допомогою певного коефіцієнта пропорційності можна зробити перерахунок загальної кількості набраних балів в бали, зазначені в програмі дисципліни.

Висновки. Ефективність і результативність навчального процесу багато в чому визначається наявністю різноманітних форм контролю. Наведена модульна контрольна робота дозволяє об'єктивно оцінити якість засвоєння навчального матеріалу студентами, сприяє дотриманню індивідуального підходу до навчання. Конструкція модульної контрольної роботи досить універсальна і може бути використана при складанні інших модульних контрольних робіт. Запропонований авторами підхід до оцінювання модульної контрольної роботи дозволяє легко перерахувати набрані бали в бали, передбачені програмою.

31. ВИКОРИСТАННЯ ПРОМЕНІВ ПРИ ПОБУДОВІ КРИВИХ

Віталій Бородін

Національний університет харчових технологій

Вступ. Традиційно при побудові графіків (після проведення повного дослідження функції) використовують характерні точки кривої та промені в якості асимптот кривої. Основні криві студент бачить в ідеальному вигляді і не має орієнтирів при побудові графіків в конспекті.

Основні положення та результати. Наближення складної функції більш простою привело до диференціала, многочлена Тейлора. Доцільно показати студентам як елементарна функція локально може бути наближена лінійною функцією. Додаткові характерні точки кривої визначаються при перетині кривої з променем $y = kx$.

Розглянемо побудову графіка функції $y = \sin x$. Із співвідношення $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$ випливає, що графік $y = \sin x$ та $y = x$ близькі в околі точки $x = 0$.

Оцінимо величину відносної похибки $\delta(x) = \frac{x - \sin x}{x} \cdot 100\%$ при заміні функції

$y = \sin x$ на $y = x$. Оскільки $\delta'(x) > 0$, то $\delta(x)$ при $x \in (0; a]$ досягає найбільшого значення в точці $x = a$. Відносна похибка $\delta(x)$ при заміні $\sin x$ на x при

$x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ не перевищує $\delta\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4,7\%$, а при $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ не перевищує

$\delta\left(\frac{\pi}{4}\right) = 11\%$. Графік $y = \sin x$ будуюмо по схемі. Відмітимо характерні точки

$O(0;0)$, $A_1\left(\frac{\pi}{2};1\right)$, $A_2(\pi;0)$, $A_3\left(\frac{3\pi}{2};-1\right)$, $A_4(2\pi;0)$. Будуюмо бісектрису $y = x$,

$x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ в точці $x = 0$. Аналогічні бісектриси будуюмо в точках $x = \pi$, $x = 2\pi$

(див. Рис.1). Завершити побудову графіка функції $y = \sin x$ просто.

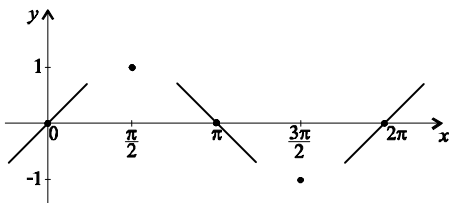


Рис.1.

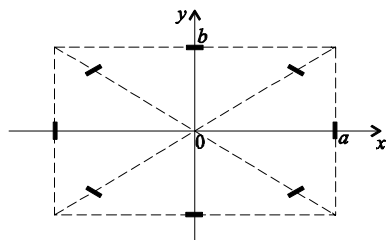


Рис.2.

Для побудови графіка $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ використовуємо лінійну функцію $y = x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$. При такій заміні відносна похибка $\delta(x) = \frac{\operatorname{tg} x - x}{\operatorname{tg} x} \cdot 100\%$ не перевищує $\delta\left(\frac{\pi}{6}\right) = 9,3\%$.

Для побудови еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ крім вершин еліпса доцільно використовувати точки перетину еліпса з променями $y = \pm \frac{b}{a}x$, які є діагоналями осьового прямокутника. В першій чверті діагональ перетинає еліпс в точці $M_1(x_1, y_1)$, де $x_1 = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7a$; $y_1 = b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7b$. Дотична до еліпса в точці M_1 паралельна іншій діагоналі (див.Рис.2).

Параболу $y = ax^2$ в школі будують стисканням (розтягуванням) параболу $y = x^2$ вздовж однієї з осей. В університеті студент вивчає, що всі параболу $y^2 = 2px$ мають однаковий ексцентриситет $\varepsilon = 1$, тобто всі такі параболу повинні бути гомотетичними з центром в початку координат. Жодна з осей координат не перетинає параболу в інших точках крім спільної вершини усіх парабол, тому важко прослідкувати, що всі параболу є подібними з центром в точці $O(0;0)$. При побудові параболу $y^2 = 2px$ доцільно провести промені $y = x$, $y = 2x$, які перетинають параболу в точках $A_1(2p; 2p)$, $A_2\left(\frac{p}{2}; p\right)$. Якщо на одному рисунку побудувати дві різні параболу $y^2 = 2px$, $y^2 = 2p_1x$, то допоміжні промені дозволяють прослідкувати вплив параметра p на розтягування параболу при гомотетії з центром в точці O . Довільний промінь $y = kx$ перетинає будь-яку параболу виду $y^2 = 2px$ під таким самим кутом, оскільки кутові коефіцієнти дотичних до параболу в точках перетину рівні $k_1 = \frac{k}{2}$ (див.Рис.3).

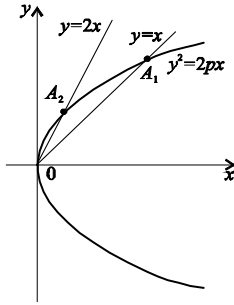


Рис.3.

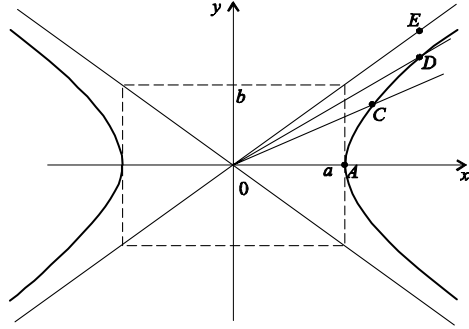


Рис.4.

Гіперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ будують за осьовим прямокутником та асимптотами

$y = \pm \frac{b}{a}x$, які є продовженням діагоналей осьового прямокутника. Наближення

гіперболи до асимптот є достатньо повільним. Щоб в цьому переконатися достатньо ввести дві додаткові стандартні точки C і D , які лежать в першій

чверті. Точка $C(D)$ утворюється при перетині променя $y = \frac{3}{5}\frac{b}{a}x$ $\left(y = \frac{4}{5}\frac{b}{a}x \right)$ з

гіперболою. Маємо $C\left(\frac{5}{4}a; \frac{3}{4}b\right)$, $D\left(\frac{5}{3}a; \frac{4}{3}b\right)$. Точка $E\left(\frac{5}{3}a; \frac{5}{3}b\right)$ лежить на

асимптоті над точкою D . Відстань $DE = \frac{1}{3}b$, що складає 20 % ординати точки

E . Таким чином, гіперболу має зміст будувати тільки в межах прямокутника зі сторонами більшими ніж $4a$ та $4b$ (див.Рис.4).

Висновки. В роботі запропонована методика більш точної побудови відомих графіків, зокрема кривих другого порядку. Ця методика може бути застосована для побудови довільних кривих.

32. ПРО СУЧАСНУ МАТЕМАТИЧНУ ПІДГОТОВКУ ФАХІВЦІВ

Олексій Зінкевич, Володимир Сафонов

Національний університет харчових технологій

Олександр Нещадим

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Вступ. Інтенсивна математизація сучасних галузей знань, потреби практики та бурхливий розвиток комп'ютерних технологій вимагають постійного вдосконалення математичних методів досліджень, розробки питань математичного забезпечення. В цих умовах майбутні фахівці потребують значної математичної підготовки.

Основні положення та результати. Якісна математична підготовка фахівців залежить від вибору обсягу та змісту математичних дисциплін, визначення мети навчання, правильного поєднання ширини і глибини викладання, строгості і наочності. Найбільш ефективні і раціональні шляхи навчання, правильна методика викладання – запорука успіху.

Освіта в Україні має відповідати світовим стандартам. Це передбачає, перш за все, ступеневу систему вищої освіти, узгодження та зближення навчальних планів з відповідними планами провідних університетів Європи і США, забезпечення якості освіти та міжнародне визнання дипломів.

На вивчення математичних дисциплін впливає широке використання математики в різних галузях науки і техніки. Тому спеціалісти в цих галузях разом з математиками мають визначити відповідну систему математичних знань, яку сьогодення вимагає від професіоналів.

Фахова спрямованість викладання математичних дисциплін дозволяє не тільки встановити спадкоємність між математичними і спеціальними дисциплінами, забезпечити неперервне нарощування і поглиблення знань, але й підвищити ерудицію студентів і сприяти стійкій зацікавленості до математики. Формування переліку прикладних питань може проводитись різними шляхами: методичні контакти із спеціальними кафедрами; відображення питань, пов'язаних з профілем університету; залучення студентів до науково-дослідної роботи. Вважається за доцільне відводити на висвітлення прикладних задач до 5% від загального обсягу часу, передбаченого на вивчення дисципліни, для того, щоб не порушити внутрішніх зв'язків і цілісності самої дисципліни. Зокрема, на лекції прикладні питання потрібно розглядати в процесі подачі матеріалу так, щоб не втрачалась строгість викладок. Доцільно на початку лекції розглядати задачі фахового спрямування, пов'язані із поточним теоретичним матеріалом, або відвести цілу лекцію на практичні застосування в кінці відповідного змістовного модуля. На практичних заняттях можуть розв'язуватись задачі прикладного спрямування з відповідними поясненнями і висновками. Для цього на кафедрі розроблено достатньо методичних вказівок, навчальних посібників і підручників.

Важливою умовою для отримання студентом університету справжніх знань є наявність достатнього часу для того, щоб він мав можливість осмислити та засвоїти одержану інформацію.

Ефективність навчання в певній мірі залежить від його організації. Правильна організація навчання передбачає регулярний контроль за роботою студентів. Контроль знань – одна із основних складових навчального процесу. Методично обґрунтований і об'єктивний модульний контроль дає реальну картину засвоєння студентами навчального матеріалу і є стимулом для активізації їхньої самостійної роботи. Кредитно-модульна система організації навчального процесу вимагає від студентів внутрішньої дисципліни, дотримання відведених термінів виконання передбачених видів робіт. Для якісного та об'єктивного оцінювання знань потрібно, щоб студенти завчасно були поінформовані про види робіт по кожному із змістовних модулів, про терміни на їх виконання і передбачені залікові бали.

Завершальним етапом навчання є іспит. Студенти завчасно повинні бути проінформовані викладачем про екзаменаційні питання та джерела, в яких з ними можна ознайомитись. Такими джерелами, наприклад, можуть бути конспекти лекцій

на електронних носіях з відповідної дисципліни чи інтернет-джерела. Вважаємо за доцільне включення теоретичних питань до екзаменаційних завдань. Надзвичайно важливо, щоб студент усвідомив наступне: систематична і наполеглива праця впродовж семестру відображається високими набраними балами, суттєво полегшує підготовку до іспиту і гарантує успішне його складання.

Теперішній розвиток науки і техніки практично унеможливорює систему освіти, яка давала б готові відповіді на всі запитання, що можуть зустрітись у процесі роботи фахівця. Відповідаючи сучасним вимогам, кожний випускник університету має набути необхідну математичну культуру та повинен вміти при необхідності поповнити свої знання з математики. В цьому важливими є набуті студентом навички для самостійної роботи з літературою.

Найцінніша якість фахівця – це творчий підхід до вирішення проблем, які виникають в його роботі. Важливим прикладом застосування математичних методів тут є побудова необхідної математичної моделі та її вивчення за допомогою математичного апарата.

Творчий підхід до розв'язування практичних задач, виховання творчої ініціативи – важливі аспекти процесу навчання. Посилення цієї направленості навчання можна досягти завдяки покращенню загальної освіти в області фундаментальних наук, серед яких одне з перших місць тримає математика.

Впровадження комп'ютерних технологій підвищило вимоги до прикладної спрямованості курсу математики, спонукало необхідність вивчення таких математичних дисциплін як теорія ймовірностей, математична статистика, дискретна математика, математичне програмування, дослідження операцій. Важливість і необхідність цих дисциплін вимагає включення відповідних розділів до програми з математики у вищих навчальних закладах, а їх вивчення можливе лише за умов загальної математичної освіти.

Сучасна математична освіта висококваліфікованих інженерів, економістів, технологів, соціологів та інших фахівців потребує глибоких знань як класичних так і спеціальних розділів математики. Високий рівень фундаментальної математичної підготовки фахівців передбачає відповідний рівень математичної культури для самостійного вивчення наукової літератури з математики та її застосувань, вміння будувати і аналізувати математичні моделі та формувати математичні задачі і вибирати методи їх розв'язування із використанням комп'ютера.

Висновки. Якщо фахівці ґрунтовно засвоїли фундаментальні та спеціальні математичні дисципліни, то їх чекає успіх на сучасному ринку праці. За таких умов, освіта в державі буде якісною і дипломи українських університетів будуть визнані в Європі і світі.

33. ДЕЯКІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ВИКЛАДАННЯ СУЧАСНОГО КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ.

Іван Юрик, Ольга Островська

Національний університет харчових технологій

Вступ. Роль математики в науковому і технічному прогресі незаперечна. Тепер вже неможливо знайти таку область техніки, де можна б обійтись без математики.

Поява обчислювальних машин привели до широкого використання математичних методів.

Виключна роль математики в науці і техніці природно повинна була знайти і знайшла відповідне вираження в постановці математичної освіти в технічних вузах.

Перед кафедрами математики виникли великі і важливі задачі. Програми були розширені новими розділами. Зробити це легко, але набагато важче реалізувати нову програму на практиці. Труднощі, які переживають кафедри вищої математики, виникають в результаті загального перевантаження студентів при низькій підготовці абітурієнтів, а також невідповідності об'єму нової програми і реального часу на її виконання. Що робити? Педагогічний досвід підказує, що при цих обставинах потрібно поступово підвищувати продуктивність всіх форм учбового процесу. В першу чергу необхідно переглянути зміст лекційного курсу. Всі розділи курсу потребують ґрунтовної методичної обробки. Очевидно, для цього виникає потреба виключити деякі питання курсу, переглянути питому вагу окремих розділів програми, посиливши ті з них, які мають особливе значення для технічних дисциплін кожної спеціальності. Ті питання курсу, які мають для даної спеціальності лише пізнавальний зміст, слід відвести на другий план. Такий перерозподіл акцентів по окремих розділах програми дасть не тільки економію часу, але має і прямий практичний зміст.

Основні положення та результати Для підвищення продуктивності учбових занять має велике значення педагогічна якість занять викладача із студентами. Найважливіше в умінні викладача захопити студентів під час лекцій і практичних занять в процес активної роботи, думати і аналізувати. Як це можна зробити? Часто на лекціях переповідають відомі факти, турбуючись лиш про те, щоб все було гладко з формально-логічної сторони. Для багатьох студентів такі лекції виявляються мало продуктивними. Справа в тому, що педагогічні якості лекції не вичерпуються бездоганною подачею матеріалу. Ефективність лекції буде низькою, якщо лектор турбується тільки за її формальну сторону, забуваючи при цьому, що його лекція не реферат, не наукова доповідь і не популярна лекція в клубі, а лекція, яка має учбове призначення. Як і кожна лекція, вона повинна бути перш за все цікавою. Основну роль при цьому повинні мати зміст матеріалу, оригінальні ідеї, нові поняття, логічна побудова, якими так багата вища математика. Цю цікавість потрібно підтримати активним відношенням студентів до предмету. Очевидно, від лектора вимагаються свідомі зусилля подавати імпульси, які пробуджують у студентів не до простого інтересу, а до активного мислення протягом всієї лекції.

Визначення правил і прийомів, які б підтримували активний інтерес студентів до лекції є важливою проблемою і, мабуть, дати вичерпні інструкції неможливо.

Розмірковуючи про якість лекції по математиці в технічному вузі необхідно зупинитись на специфічних особливостях самого змісту курсу математики і особливе місце при цьому займає питання про степінь формалізації і наукової строгості цього курсу. Дехто вважає, що втрата часу і сил на логічні обговорення приводить до того, що у студентів – майбутніх інженерів – не розвивається відчуття до чисел, до практичного застосування математики, губиться живий зв'язок з дійсністю. Ми вважаємо, що значення логічних міркувань, доведень дуже велике для майбутнього інженера, для його розвитку, і рівень наукової строгості

повинен витримуватись. Звичайно потрібно пам'ятати те призначення, яке має математика для майбутнього спеціаліста-математика і для майбутнього інженера, але це не означає, що існує якась особлива інженерна математика при викладанні якої можна нехтувати формально-логічною стороною справжньої математики.

Велике значення для підвищення продуктивного учбового процесу мають практичні заняття по курсу математики. Потрібно рішуче критикувати таку форму їх проведення, коли робота викладача зводиться до розв'язання задач з почерговим викликом студентів до дошки. Основною, суттєвою частиною практичної роботи кожного студента, дати кожному працювати з його власною швидкістю.

Але поставлена мета не може бути досягнута простим самоусуненням викладача. Навпаки, від нього вимагається значні інтенсивні і кваліфіковані зусилля. Підготовка студентів до самостійної роботи на кожній парі починається співбесідою по ключовим питанням теми. Це дуже важливо. При цьому повинні проявитись педагогічні здібності викладача в умінні правильно і влучно внести питання для обговорення, що дасть основу для подальшого самостійного виконання студентами відповідних прикладів.

Висновки. До підбору типових прикладів потрібно віднестись з великою увагою. Вони повинні бути навчальними за змістом і їх виконати може сам викладач або один із здібних студентів, з яким можна б було вести діалог. Далі студенти виконують завдання самостійно, а деякі продовжують дома. Не слід відокремлювати домашнє завдання від аудиторного. Отримавши завдання, в цілому, більшість студентів намагаються старанно виконати більшу частину в аудиторії, що і потрібно.

І нарешті, треба пам'ятати, що засвоєння математичних знань полягає в тому, що їх неможливо просто запам'ятати. Потрібне чітке розуміння не тільки змісту понять, але і тих логічних зв'язків, які існують між ними.

Наприклад, інтеграл для інженера, це просто сума диференціалів. Складання диференціального рівняння, для них по суті, не відрізняється від складання звичайного рівняння. Отже, поняття визначеного інтегралу, як границі інтегральної суми, повинно бути зв'язано з поняттям диференціала функції, як її умовного приросту. Крім того, потрібно закріпити у студентів погляд на визначений інтеграл не тільки як на число, але і як на певну первісну підінтегральної функції. Що стосується розділу диференціальних рівнянь, то крім чисто практичної сторони, поняття інтеграла має особливе значення для теоретичного розвитку студентів. Тут об'єднуються і узагальнюються багато понять попередніх розділів і в повній мірі розкривається суть методу нескінченно малих. Тому на лекціях і практичних заняттях потрібно показати, що основна ідея інтегрального числення, на основі якої за заданою функцією точки, яка визначає локальну характеристику явища, отримують його інтегральну характеристику, узагальнюють в розділі диференціальних рівнянь, залишаючись незмінною по суті.

Особливу увагу треба звернути на різні інтерпретації понять, фактів і в першу чергу, на геометричну інтерпретацію. Потрібно використовувати теорію диференціальних рівнянь для розвитку у студентів уявлення про спеціальні функції. Дати студентам початкові навички в складанні диференціальних рівнянь. Природно, що формальним підходом до питання про виникнення диференціального рівняння в технічному вузі обмежитись неможна.

34. ВИКЛАДАННЯ КУРСУ «ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ» ЗА ДОПОМОГОЮ ПРОГРАМИ MATHCAD

Світлана Гузенко

Національний університет харчових технологій

Вступ. У наш високотехнологічний час викладачам вищих навчальних закладів потрібно якомога ширше використовувати комп'ютерні технології, для зацікавлення студентів своїми дисциплінами. Для викладачів вищої математики зручним та сучасним є програмний пакет MathCAD. Даний пакет програм являє собою математичний редактор, який дозволяє проводити різні математичні та інженерні розрахунки, починаючи з елементарних обчислень та закінчуючи складними реалізаціями чисельних методів.

У Національному університеті харчових технологій для студентів факультету АКС, напряму «Комп'ютерні науки» разом з лекціями та практичними заняттями проводяться також і лабораторні заняття з дисципліни «Вища математика». На лабораторних заняттях студенти мають можливість отримати практичні навички роботи з математичним редактором, та перевіряти за його допомогою результати, отримані аналітичним методом.

Основні положення та результати. Програмний пакет MathCAD складається з декількох інтегрованих між собою компонент: текстовий редактор, обчислювальний процесор, символний процесор та велике сховище довідникової інформації, представлена у вигляді інтерактивної електронної книги.

Головне меню MathCAD має практично стандартний вигляд. Назвемо деякі панелі інструментів, які найчастіше застосовуються при роботі студентами:

- 1) Math (Математика) – призначена для вставки математичних символів і операторів;
- 2) Formatting (Форматування) – призначена для форматування (зміни типу і розміру шрифту і т.д.) тексту та формул;
- 3) Symbolic (Символи) – призначена для виконання команд швидких аналітичних перетворень.

Панель інструментів Math (Математика) призначена для виклику на екран ще декількох панелей MathCAD:

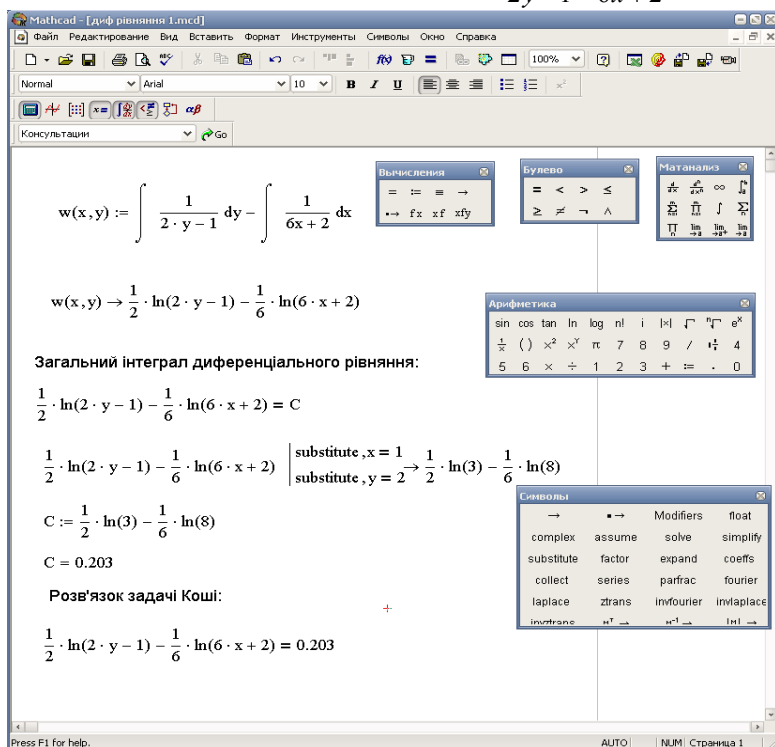
- 1) Calculator (Калькулятор) – для вставки основних математичних операцій;
- 2) Calculus (Обчислення) – для вставки елементів математичного аналізу;
- 3) Matrix (Матриця) – для вставки матриць і матричних операторів;
- 4) Graph (Графік) – для вставки графіків;
- 5) Boolean (Булеві оператори) – для вставки логічних (булевих) операторів;
- 6) Greek (Грецькі символи) – для вставки грецьких символів;
- 7) Symbolic (Символіка) – для вставки символічних операторів;
- 8) Programming (Програмування) – для програмування засобами MathCAD;
- 9) Modifier (Модифікатор) – для вставки деяких операторів (наприклад, перетворення числа);
- 10) Custom Characters (Спеціальні символи) – для вставки спеціальних символів (одиниць виміру температури і т.п.) та інші.

Отже, як ми бачимо, що можливості MathCAD повністю охоплюють весь курс «Вищої математики», який вивчають студенти.

Для того, щоб розв'язати диференціальне рівняння з відокремленими змінними потрібно представити його у вигляді $f(x)dx - g(y)dy = 0$. Оператором присвоєння ввести нову функцію $w(x, y) := \int f(x)dx - \int g(y)dy$. Знайдена функція буде визначати загальний інтеграл диференціального рівняння. Для розв'язання задачі Коші потрібно використовувати символічну операцію `substitute` (подстановка), яка знаходиться у підпанелі `Symbolically` (Символьный).

$$y' \cdot (6x + 2) = 2y - 1, \quad y(1) = 2.$$

Представимо диференціальне рівняння у вигляді $\frac{dy}{2y-1} - \frac{dx}{6x+2} = 0$.



Література

1. Кирьянов, Д «Mathcad 12». – СПб.:БХВ – Петербург, 2005. – 576 с.
2. Вища математика: Лабораторний практикум для студентів напряму підготовки 6.050101 «Комп'ютерні науки» ден. форми навч./Уклад.: Ю.О. Васютинська, С.В. Гузенко, Н.Л. Кузьмінська, А.М. Палагута, А.М. Ткачук. – К.: НУХТ, 2013. – 179 с.

ЗМІСТ

СЕКЦІЯ 1. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИВ ІНЖЕНЕРНИХ ЗАДАЧАХ	7
<i>Михайло Мартиненко</i> Славетний шлях кафедри вищої математики НУХТ	9
<i>Андрій Улітко, Михайло Мартиненко</i> Мішані просторові задачі математичної теорії пружності	14
<i>Юрій Трохимчук</i> Теорема о средних значениях	16
<i>Михайло Мартиненко</i> Узагальнений метод побудови розв'язків дуальних інтегральних і суматорних рівнянь	18
<i>Микола Працьовитий</i> Фрактальні властивості функцій, мір і динамічних систем, визначених у термінах двійкового кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом	20
<i>Юрій Зелінський, Ірина Виговська, Ольга Сафонова</i> Про многозначні відображення областей на многовидах	23
<i>Алексей Николаев, Евгений Танчик</i> Упругое пространство с периодической системой сферических полостей под действием внешней нагрузки	25
<i>Василь Попович, Ірина Ракоча</i> Математичне моделювання та дослідження термопружного стану шарового термомучливого порожнистого циліндра	27
<i>Ольга Свинчук, Микола Працьовитий</i> Інтегральні властивості ніді не монотонних функцій однієї скінченно-параметричної сім'ї	30
<i>Георгій Сулим, Ярослав Пастернак</i> Використання узагальнених інтегральних співвідношень типу Сомільяни при розрахунку анізотропних конструкційних елементів за дії комплексу фізико-механічних полів	32
<i>Микола Працьовитий, Юлія Маслова</i> Про одне з узагальнень системи функцій Радемахера та Уолта	34
<i>Ivan Tsyfra</i> Group of equivalence transformations and solution of mathematical physics equations in nonhomogeneous media	37
<i>Ярослав Жук</i> Вплив початкових напружень на швидкість поширення плоскої поздовжньої хвилі в шаруватому нанокompозиті	39
<i>Oleh Nykyforchyn, Dušan Repovš</i> Ambiguous representations	42
<i>Микола Працьовитий, Яніна Гончаренко, Наталія Василенко, Олексій Панасенко</i> Про один клас неперервних ніді не монотонних функцій з фрактальними властивостями	43
<i>Наталія Ярецька, В'ячеслав Рудницький</i> Дослідження впливу початкових напружень на контактну взаємодію попередньо напружених циліндра і шару без врахування сил тертя	46
<i>Євген Янютін, Павло Єгоров</i> Ідентифікація нестационарного навантаження, яке діє на шарнірно-обперту оболонку, підкріплену концентричними ребрами жорсткості	48
<i>Олексій Капустян, Олена Капустян, Олег Мазур</i> Про умови розв'язності задачі оптимального керування параболічним процесом в круговому секторі	50
<i>Dmytro Legeza, Viktor Legeza</i> , Модель процесу придушення танців проводів з використанням роликового віброгасника	52
<i>Анатолій Богатирчук, Євген Сторожук, Іван Чернишенко, Світлана Харенко</i> Взаємовплив двох кругових отворів на бічний поверхні пружнопластичної конічної оболонки	58
<i>Анатолій Богатирчук, Ірина Руденко, Євген Сторожук, Іван Чернишенко</i> Чисельне моделювання пружнопластичного стану сферичної оболонки з декількома отворами	60
<i>Анатолій Богатирчук, Владимир Мейш, Юлія Мейш</i> К решению динамических задач взаимодействия цилиндрических оболочек с грунтовой средой периодической структуры	62
<i>Анатолій Богатирчук, Владимир Мейш, Юлія Мейш</i> Динамическое поведение цилиндрической оболочки на упругом основании переменной структуры	64
<i>Олександр Багно</i> Дисперсія нормальних хвиль у системі: стисливий пружний шар з початковими напруженнями – шар ідеальної рідини	65
<i>Анатолій Богатирчук, Кузьма Шнеренко</i> Визначення концентрації напружень навколо отвору в оболонці	67
<i>Юрій Абрсов, Володимир Максимюк, Анатолій Богатирчук</i> Про особливості деформування довгої тонкої циліндричної оболонки еліптичного	69
<i>Олександр Савченко, Олена Лобода</i> Моделювання та ідентифікація динамічних об'єктів при різних апріорній інформації	71
<i>Валерій Яциук, Ірина Лебедева, Олена Ващіліна</i> Спектрофотометричний та люмінесцентний аналіз у харчовій промисловості та фармакології	74
<i>Татьяна Бобылева</i> Собственные колебания полых шаров	77
<i>Оксана Лагода</i> Різницеви рівняння з крайовими умовами інтерполяційного типу	79
<i>Катерина Божонок</i> Варіаційний функціонал в просторах Соболева $W^{1,p}$ над багатовимірною областю: огляд результатів	81
<i>Владислав Богданов</i> Визначення в'язкості руйнування матеріалу з використанням чисельного розрахування просторового пружнопластичного деформування компактних зразків при ударному навантаженні з урахуванням розвантаження матеріалу	83

<i>Valeriy Kovalenko</i> Probability measures on the one fractal curves	85
<i>Тетяна Ісаєва</i> Нормальні властивості дійсних чисел у їх Δ^u -зображенні	88
<i>Ivan Yuryk</i> Exact Solution of the Multidimensional Liouville Equation	90
<i>Ольга Гуцул</i> Математичне моделювання реологічних кривих структурованих рідинних систем	92
<i>Віктор Опанасович, Микола Слободян, Василь Бедрий</i> Згин ізотропної пластини з еліптичним отвором і двома прямолінійними наскрізними тріщиною з урахуванням ширини області контакту їх берегів	95
<i>Юрій Глухов</i> Моделювання напружено-деформованого стану багат шарових конструкцій з початковими напруженнями	97
<i>Артем Чуйков</i> Геометрія зображення чисел канонічними ланцюговими дробами та її застосування	99
<i>Яніна Гончаренко, Ірина Лисенко</i> Нескінченно-символьне q_0^∞ -зображення дійсних чисел, його геометрія та застосування	101
<i>Оксана Требенко, Наталія Цибульська</i> Про прості елементи кілець $Z[\sqrt{d}]$	103
<i>Oxana Trebenko</i> On groups with some finite supercomplemented subgroup	105
<i>Богдан Кушлик</i> Адекватність математичної моделі задачі оптимального керування в технологіях поліграфічного виробництва	107
<i>Ольга Кушлик-Дивульська</i> Математичне моделювання виробничих задач в поліграфії	109
<i>Ігор Савченко</i> Множина неповних сум збіжних рядів одного класу	110
<i>Микола Діхтярук</i> Контактна взаємодія двох смуг з початковими (залишковими) напруженнями з нескінченним стрингером	111
<i>Володимир Андрущенко, Олександр Борисейко, Ігор Улітко</i> Струм провідності в електродних покриттях дискового п'єзоперетворювача на резонансних коливаннях	114
<i>Kostiantyn Iusenko</i> Some remarks on Hall algebra of bound quiver	116
<i>Олег Жабровець, Ірина Лисенко</i> Фрактальні властивості рівнів одного класу неперервних ніде не монотонних функцій, пов'язаних з двійковим зображенням чисел	117
<i>Софія Ратушняк</i> Розподіл значень однієї фрактальної функції, пов'язаної з двійковим зображенням дійсних чисел	119
<i>Tetiana Zasadko</i> Superintegrable systems with position dependent mass	122
<i>Alla Tkachuk, Iryna Semenishina</i> Importance of Lyapunov's function for the existence of invariant sets of systems of differential and corresponding difference equations	124
<i>Світлана Кушніренко</i> Асимптотична поведінка інтегральних функціоналів мартингального типу від нестійких розв'язків одновимірних неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь Іто	127
<i>Вікторія Романенко</i> Апроксимація обмеженого на $\mathbf{Z}$ розв'язку різницевого рівняння, що відповідає рівнянню теплопровідності, розв'язками відповідних різницьових	130
<i>Ганна Циганкова</i> Фізичний підхід до пошуку частинного розв'язку неоднорідного диференціального рівняння	132
<i>Віктор Гуць, Сергій Резніков</i> Особливості використання диференціальних рівнянь другого порядку в інженерних розрахунках	134
<i>Олексій Зінкевич, Володимир Сафонов, Олександр Нецадим</i> Неізотермічні моделі процесу витягування волоконних світловодів	136
<i>Микола Медведєв, Оксана Ніколаєва</i> Математичне моделювання та прогнозування фінансових показників комерційного банку	138
<i>Ольга Седих, Світлана Маковецька</i> Застосування методу Монте-Карло для рішення крайових задач	140
<i>Микола Медведєв, Володимир Листопад, Оксана Мулява</i> Математичне моделювання та оптимізація параметрів деяких біохімічних процесів у харчовій промисловості	143
<i>Тетяна Зінченко</i> Визначення коефіцієнтів функції нелінійної множинної регресії з довільною кількістю кодованих змінних	145
<i>Любов Олещенко</i> Моделі оптимального використання рухомого складу автотранспортного підприємства на міжміському маршруті	147
<i>Оксана Мулява</i> Про належність цілих функцій багатьох змінних до класів збіжності	149
<i>Наталія Кузьмінська</i> Застосування когнітивного моделювання до управління надскладними системами	152
<i>Володимир Шиха</i> Ортопротези та їх застосування	154
СЕКЦІЯ 2. МЕТОДИЧНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ	157
<i>Наталія Шаповалова, Лариса Панченко, Людмила Процак</i> Організація науково-дослідницької діяльності студентів фізико-математичних спеціальностей ВНЗ	159
<i>Ольга Пыжкова, Инна Борковская</i> О преподавании специальных математических дисциплин на основе урвневой образовательной технологи	162

<i>Маріян Ілієв</i> Модель електронного обучения по прикладной статистике для инженеров и экономистов	165
<i>Олександр Гририк</i> Проблеми вивчення вищої математики в університеті однієї з країн, що розвиваються	168
<i>Василь Горбачук</i> Методика розв'язання задач з математичної статистики з використанням інформаційно-комунікаційних технологій	170
<i>Оксана Петрученко, Лев Величко, Ольга Хитряк</i> Вплив відбору і формування груп у ВНЗ на методику викладання математики	173
<i>Світлана Шевченко, Юлія Жданова</i> Застосування технології розвитку аналітичного мислення в умовах дистанційного навчання	177
<i>Галина Тулущенко, Наталія Старун, Тетяна Селуянова</i> Застосування евристичних прийомів при вивченні властивостей невизначеного інтеграла зі студентами інженерних спеціальностей	179
<i>Олександр Школьній</i> Про методику навчання майбутніх учителів математики створенню якісних тестових завдань	181
<i>Галина Тулущенко, Інна Вигоднер, Анастасія Лукашова</i> Досвід застосування тестових завдань при перевірці навичок обчислення деяких невизначених інтегралів	183
<i>Анжеліка Мотайло, Світлана Моїсєнко, Тетяна Ляхович</i> Використання кратних інтегралів в області теоретичної механіки	185
<i>Станіслав Безердян, Тетяна Білоусова, Галина Тулущенко</i> Практична перевірка прогнозованих властивостей модифікованих базисів трикутного скінченного елемента II порядку	188
<i>Ірина Семенішина, Алла Ткачук</i> Особливості впровадження комп'ютерної техніки на заняттях математики у вищому навчальному закладі	190
<i>Андрій Мозолюк, Тетяна Мозолюк</i> Організація самостійної роботи студентів з використанням електронного підручника	193
<i>Віктор Легеца</i> Узагальнення методу окремих значень аргументу на випадок комплексних коренів	195
<i>Інна Мерліч, Ганна Одноріг</i> Розробка та застосування проекту «Предмет за вибором»	197
<i>Костянтин Сокол, Ігор Астіоненко, Петро Гучек</i> Геометричний метод побудови модифікованих базисів скінченних елементів	199
<i>Владислав Науменко, Олена Литвиненко, Наталія Колесникова</i> Модифікована інтерполяційна процедура Тейлора для побудови базисів серендипових скінченних елементів	201
<i>Марія Парчук</i> Реалізація міжпредметних зв'язків з курсом «Теорія ймовірностей та математична статистика» в процесі навчання теоретичної фізики студентів фізичних спеціальностей	203
<i>Ірина Гора</i> Про досвід проведення моніторингу навчальних досягнень з математики студентів вищих аграрних навчальних закладах	206
<i>Лев Величко, Василь Кондрат, Богдан Сокіл</i> Деякі питання організації вивчення математики у вищій школі	208
<i>Олег Баран, Лариса Васильєва, Валентина Дармосюк, Антоніна Руда</i> Підготовка майбутніх вчителів математики до розв'язування геометричних задач	210
<i>Олександра Сушко</i> Психолого-педагогічні передумови та методичні вимоги до навчання фінансової математики студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів	213
<i>Анна Гоменюк</i> Компетентісно орієнтовані задачі в навчанні алгебри	215
<i>Наталія Манько, Ігор Зіновєєв</i> Окремі питання організації та проведення практик у процесі навчання бакалаврів напряму підготовки 04.02.01 – «Математика»	217
<i>Емма Динис</i> Дослідження проблематики застосування інформаційних і комунікаційних технологій у навчальному процесі	221
<i>Тетяна Снігур</i> Формування поняття плоского геометричного тіла в шкільному курсі планіметрії	224
<i>Олена Радзівська</i> Математика – мова науки	226
<i>Олексій Зінкевич, Володимир Сафонов, Олександр Нецадим</i> Роль мотиваційної компоненти процесу вивчення математики	228
<i>Оксана Ніколаєва, Наталія Чинчуляк</i> Організація контролю якості знань студентів з використанням тестових завдань	230
<i>Віталій Бородін</i> Використання променів при побудові кривих	232
<i>Олексій Зінкевич, Володимир Сафонов, Олександр Нецадим</i> Про сучасну математичну підготовку фахівців	234
<i>Іван Юрик, Ольга Островська</i> Деякі рекомендації викладання сучасного курсу вищої математики	236
<i>Світлана Гузенко</i> Викладання курсу «Вищої математики» за допомогою програми MathCAD	239

Наукове видання

**МІЖНАРОДНА
НАУКОВО–МЕТОДИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ**

**«СУЧАСНІ НАУКОВО–МЕТОДИЧНІ
ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ
У ВИЩІЙ ШКОЛІ»**

25 – 26 червня 2015 р.

Відповідальний за випуск *М.А. Мартиненко*

Комп'ютерна верстка **М.О. Кремньова**