В.В.Листопад, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Академія праці та соціальних відносин

Реалізація двоїстого симплекс-методу для розв'язання екстремальних задач лінійного програмування з допомогою Microsoft Excel.

Для продовження тематики, запропонованої в [1] – [3], розглянемо розв'язання оптимізаційних задач лінійного програмування двоїстим симплекс-методом за допомогою Ms Excel. Оскільки основним засобом реалізації цього методу розв'язання є симплекс-метод, то серед вагомих характеристик реалізації симплекс-методу з допомогою електронних таблиць MS Excel слід виділити:

– економію аудиторного часу на практичному занятті, дефіцит якого відчувається з переходом на Болонську систему;

– можливість отримати повну таблицю-результат та альтернативні розв'язки, що дає змогу провести повний аналіз задачі;

– реалізована можливість паралельного засвоєння теоретичного матеріалу цієї теми;

– зв'язок із темою «Метод Жордана-Гаусса» для розв'язування систем лінійних рівнянь та вдосконалення навичок роботи з MS Excel;

– значно спрощується механізм здійснення контролю виконання задачі;

– простота і доступність у роботі;

– можливість використовувати даний метод для підготовки системи вправ.

Двоїстий симплекс-метод застосовується при розв'язуванні задач лінійного програмування у випадку, коли вільні члени системи рівнянь можуть бути будь-якими числами (в симплекс-методі ці числа мали бути невід'ємними).

Розглянемо теоретичні аспекти [4] – [5] та схему реалізації двоїстого симплекс-методу. Для цього сформулюємо відповідну задачу лінійного програмування та проаналізуємо процес її розв'язання.

Нехай потрібно знайти

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \quad (1)$$

при умовах

$$x_1P_1 + x_2P_2 + ... + x_mP_m + x_{m+1}P_{m+1} + ... + x_nP_n = P_0 \quad (2)$$

$$x_j \ge 0 (j = \overline{1,n}), \quad (3)$$

де

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1(m+1)} \\ a_{2(m+1)} \\ \vdots \\ a_{n(m+1)} \end{pmatrix}, ..., P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

і серед чисел $b_i (i = \overline{1,m})$ є від'ємні.

В даному випадку $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ є розв'язком системи рівнянь (2). Але цей розв'язок не є планом задачі (1-3), оскільки серед його компонент є від'ємні і числа. Розв'язок X системи (2), який визначається базисом $P_1, P_2, ..., P_m$ називається <u>псевдопланом</u> задачі (1-3), якщо $\Delta_j \ge 0$ (нагадаємо, що $\Delta_j = Z_j - C_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j, (j = \overline{1,m}).$).

<u>Теорема 1</u>. Якщо в псевдоплані $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ...0)$, що визначається базисом $P_1, P_2, ..., P_m$ є хоча б одне число $b_i < 0$ таке, що всі $a_{ij} \ge 0 (j = \overline{1,n})$ то задача (1-3) взагалі не має розв'язків.

<u>Теорема 2</u>. Якщо в псевдоплані $X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ...0)$, що визначається базисом $P_1, P_2, ..., P_m$ є від'ємні числа $b_i < 0$ такі, що для кожного з них існують числа $a_{ij} < 0 (j = \overline{1,n})$ то можна перейти до нового псевдоплану при якому значення цільової функції (1-3) не зменшиться.

На основі теорем 1 та 2 можна сформулювати алгоритм двоїстого симплекс-методу. Отже розглянемо задачу (1-3) та її псевдоплан

$X = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ...0)$. На основі вихідних даних заповнюємо вихідну симплекс-таблицю

I	Базис	$C_б$	P_0	C_1	C_2	…	C_l	…	C_m	C_{m+1}	…	C_r	…	C_n
				P	P_2	…	P_l	…	P_m	P_{m+1}	…	P_r	…	P_n
1	P_1	C_1	b_1	1	0	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1r}	…	a_{1n}
2	P_2	C_2	b_2	0	1	…	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2r}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
L	P_l	C_l	b_l	0	0	…	1	…	0	a_{lm+1}	…	$\mathbf{a_{lr}}$	…	a_{ln}
…	…	…		…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
I	P_i	C_i	b_i	0	0	…	0	…	0	a_{im+1}	…	a_{ir}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
M	P_m	C_m	b_m	0	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mr}	…	a_{mn}
m+1				0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}				Δ_n

В цій таблиці деякі елементи стовпчика вектора P_0 є від'ємні числа. Якщо таких чисел немає, то в симплекс-таблиці записано оптимальний план задачі (1-3), оскільки за припущенням всі $\Delta_j \geq 0$. Отже для визначення оптимального плану задачі, при умові, що він існує, слід здійснити впорядкований перехід від однієї симплекс-таблиці до іншої до того часу, поки із стовпчика P_0 не будуть виключені всі від'ємні елементи. При цьому мають залишатися невід'ємними всі елементи (m+1)-ї строчки, тобто $\Delta_j = Z_j - C_j (j = \overline{1,n})$.

Таким чином, після запису симплекс-таблиці, перевіряють чи є в стовпчику P_0 від'ємні числа. Якщо їх немає, то знайдено оптимальний план вихідної задачі. Якщо ж вони є, то вибирають найбільше за модулем від'ємне число. Якщо таких чисел декілька, то вибирають будь-яке з них: нехай це буде число b_l. В даному випадку з базису буде виключатися вектор P_l. Щоб визначити , який вектор слід ввести в базис, знаходимо $\min\left\{\frac{-\Delta_j}{a_{lj}}\right\}$, де $a_{lj} < 0$.

Нехай це мінімальне значення приймається при j=r. Тому в базис вводимо вектор P_r. Число a_{lr} буде розв'язувальним елементом. Перехід до нової симплекс-таблиці виконують за звичайними правилами симплекс-методу (за правилом прямокутника). Ітераційний процес продовжуємо до того часу, поки в стовпці вектора P_0 не залишиться від'ємних чисел. При цьому буде отримано оптимальний план як основної, так і двоїстої задачі. Якщо на деякому кроці виявиться, що в і-му рядкові симплекс-таблиці в стовпці P_0 стоїть від'ємне число b_i, а серед елементів цього ж оядка немає від'ємних, то вихідна задача не має розв'язку.

Таким чином, розв'язання задачі (1-3) двоїстим симплекс-методом включає такі етапи:

1. Знаходять псевдоплан задачі.
2. Перевіряють цей план на оптимальність. Якщо псевдоплан оптимальний, то знайдено розв'язок задачі. В протилежному випадку, або встановлюють нерозв'язність задачі, або переходять до іншого псевдоплану.
3. Вибирають напрямний рядок за допомогою визначення найбільшого по модулю від'ємного числа стовпчика P_0 та напрямний стовбець за допомогою найменшого за модулем відношення елементів (m+1)-го – рядка до відповідних від'ємних елементів напрямного стовпця.
4. Знаходять новий псевдоплан, та повторюють всі дії, починаючи з другого етапу.

Зауваження. При реалізації двоїстого симплекс-методу спочатку визначаємо напрямний рядок (тобто вектор, який виключається з базису), а потім – напрямний стовбець (тобто вектор, який замість виключеного ввійде до нового базису).

Розглянемо реалізацію двоїстого симплекс-методу з допомогою електронних таблиць Ms Excel на прикладах.

Приклад 1. Знайти

$$F = x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \min$$

при умовах

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 \ge 27, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \ge 24, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Розв'язання. Двоїста задача до основної матиме вигляд

$$Z = 27y_1 + 24y_2 \to \max$$

при умовах

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \le 1, \\ -y_1 + 3y_2 \le 3, \\ 4y_1 - y_2 \le 4, \\ 5y_1 + 4y_2 \le 2, \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \ge 0.$$

Запишемо вихідну задачу в формі основної (канонічної):

$$-F = -x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 \to \max$$

при умовах

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 + x_5 = -27, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 + x_6 = -24, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$$

У векторній формі обмеження задачі будуть такими:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_{0,}$$ де

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} -27 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

Вибираючи в якості базису P_5, P_6 заповнюємо початкову симплекс-таблицю.

I	Базис	$С_б$	P_0	-1	-3	-4	-2	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6

1	P_5	0	-27	-1	1	-4	-5	1	0
2	P_6	0	-24	-2	-3	1	-4	0	1
3	$\Delta_j = Z_j - C_j$		0	1	3	4	2	0	0

Запишемо симплекс-таблицю в Ms Excel.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				-1	-3	-4	-2	0	0
2	Базис	Сбаз	Ро	P1	P2	P3	P4	P5	P6
3	←P5	0	-27	-1	1	-4	-5	1	0
4	P6	0	-24	-2	-3	1	-4	0	1
5	$\Delta_j = Z_j - C_j$		0	1	3	4	2	0	0
6		$-\Delta_j / a_{ij}$		1		1	↑0,4		

Обчислимо елементи п'ятого рядка першої симплекс-таблиці.

D5=СУММПРОИЗВ($C$3:$C$4;D3:D4);

E5= СУММПРОИЗВ($C$3:$C$4;E3:E4)-E1, та розповсюдимо на всі комірки п'ятої строчки.

Оскільки в стовпці P_0 є два від'ємні елементи (-27 та -24), а в п'ятому рядку немає від'ємних чисел то у відповідності до алгоритму двоїстого симплекс-методу, переходимо до нової симплекс-таблиці. Це можна зробити, оскільки в рядках P_5 та P_6 є від'ємні числа. Якби їх не було, то задача не мала б розв'язку.

Вектор, який потрібно виключити з базису визначається найбільшим за модулем від'ємним числом, що стоїть в стовпці вектора P_0. В розглядуваній задачі це $\max\{|-27|;|-24|\} = 27$, а отже з базису треба вивести вектор P_5. Щоб знайти , який вектор потрібно ввести в базис в шостому рядку знаходимо

$\min\left\{\frac{-\Delta_j^{(0)}}{a_{1j}^{(0)}}\right\}$, де $a_{1j}^{(0)} < 0,$ (у верхніх індексах будемо писати номер ітерації).

В розглядуваному випадку

$\min\left\{\frac{-\Delta_j^{(0)}}{a_{1j}^{(0)}}\right\} = \min\left\{\frac{-1}{-1}; \frac{-4}{-4}; \frac{-2}{-5}\right\} = \frac{2}{5} = 0{,}4$, а отже в базис вводимо вектор P_4, а розв'язним елементом буде $a_{14}^{(0)} = -5$ (H3). Переходимо до наступної таблиці. Для цього задамо формули для обчислення елементів стовпця P_0 нової таблиці користуючись методом Жордана-Гаусса [1]-[3].

$$b_1^{(1)} = \frac{b_1^{(0)}}{a_{14}^{(0)}}, \qquad b_2^{(1)} = \frac{a_{14}^{(0)} \cdot b_2^{(0)} - a_{24}^{(0)} \cdot b_1^{(0)}}{a_{14}^{(0)}}.$$

Задаємо формули для обчислення елементів стовпця P_0 таким чином, щоб розповсюдити їх на всі комірки нової таблиці.

D7=D3/$H$3; D8=($H$3*D4-$H$4*D3)/$H$3.

Виділяємо значення отримані в стовпці $P_0^{(1)}$ та розповсюджуємо формули (вправо) на всю таблицю. Перехід до нової симплекс-таблиці виконано. Елементи 9 строчки знайдемо аналогічно до першої таблиці.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
				-1	-3	-4	-2	0	0
	Базис	Сбаз	Po	P1	P2	P3	P4	P5	P6
7	P4	-2	5,4	0,2	-0,2	0,8	1	-0,2	0
8	P6←	0	-2,4	-1,2	-3,8	4,2	0	-0,8	1
9	$\Delta_j = Z_j - C_j$		-10,8	0,6	3,4	2,4	0	0,4	0
10		$-\Delta_j / a_{ij}$		↑0,5	8/9			1/2	

Оскільки всі $\Delta_j \geq 0$, і стовпець P_0 містить лише один від'ємний елемент (-2,4), а в другому рядку є від'ємні числа, то можна перейти до нової симплекс-таблиці. Другий рядок, в якому знаходиться число -2,4 вибираємо напрямною, тому з базису вилучаємо вектор P_6.

Обчисливши $\min\left\{\frac{-\Delta_j^{(1)}}{a_{2j}^{(0)}}\right\} = \min\left\{\frac{-0{,}6}{-1{,}2}; \frac{-3{,}4}{-0{,}2}; \frac{-0{,}4}{-0{,}8}\right\} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ ми бачимо що до базису можна ввести вектори P_1 або P_5, оскільки в цих стовпцях відповідні відношення однакові. Цей факт підказує, що можуть бути альтернативні розв'язки. Введемо в базис вектор P_1 (для P_5 аналогічно), тому розв'язувальним елементом буде $a_{21}^{(1)} = -1{,}2$ (E8). Задамо формули для обчислення елементів стовпця $P_0^{(2)}$ нової таблиці та відповідні формули для переходу в Ms Excel

$b_2^{(2)} = \frac{b_2^{(1)}}{a_{21}^{(1)}}$, $b_1^{(2)} = \frac{a_{21}^{(1)} \cdot b_1^{(1)} - a_{11}^{(1)} \cdot b_2^{(1)}}{a_{21}^{(1)}}$. D12=D8/$E$8, D11=($E$8*D7-$E$7*D8)/$E$8. Отримаємо наступну таблицю.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
				-1	-3	-4	-2	0	0
	Базис	Сбаз	Po	P1	P2	P3	P4	P5	P6
11	P4	-2	5	0	- 5/6	1 1/2	1	- 1/3	1/6
12	P1←	-1	2	1	3 1/6	-3 1/2	0	2/3	- 5/6
13	$\Delta_j = Z_j - C_j$		-12	0	1,5	4,5	0	↑0	0,5

Оскільки в стовпці P_0 відсутні від'ємні числа, і всі $\Delta_j \geq 0$, то одержаний план $X = (2;0;0;5)$ буде оптимальним і $F_{\min} = 12$.

Оскільки в стовпці P_5 $\Delta_5 = 0$ і даний стовбець не базисний, то існує альтернативний розв'язок. Розв'язувальним буде елемент $a_{25}^{(2)} = \frac{2}{3}$ (I12). В базис ввійде P_5 замість вектора P_1.

Задамо формули та перейдемо до нової таблиці.

$b_2^{(3)} = \frac{b_2^{(2)}}{a_{25}^{(2)}}$, $b_1^{(3)} = \frac{a_{25}^{(2)} \cdot b_1^{(2)} - a_{15}^{(2)} \cdot b_2^{(2)}}{a_{25}^{(2)}}$.D15=D12/$I$12; D14=($I$12*D11-$I$11*D12)/$I$12.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
				-1	-3	-4	-2	0	0
14	Базис	Сбаз	Po	P1	P2	P3	P4	P5	P6
15	P4	-2	6	1/2	3/4	- 1/4	1	0	- 1/4
16	P5	0	3	1 1/2	4 3/4	-5 1/4	0	1	-1 1/4
17	$\Delta_j = Z_j - C_j$		-12	0	1,5	4,5	0	0	0,5

Отже, ми отримали альтернативний розв'язок $X_1 = (0;0;0;6)$ для якого $F_{\min} = 12$. Оскільки вектори P_5 та P_6 утворювали початковий базис вихідної задачі, то в останньому рядкові ми отримали розв'язок двоїстої задачі $Y = (0;6)$ і $F_{\min} = Z_{\max} = 12$.

Приклад 2. Знайти

$$F = 2x_1 + 3x_2 + 5x_5 \to \max$$

при виконанні умов

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_5 = 18, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,5}.$$

Розв'язання. Двоїста задача матиме вигляд

$$Z = 12y_1 + 10y_2 + 18y_3 \to \min$$

при умовах

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 - 3y_3 \ge 2, \\ y_1 + 2y_2 - 2y_3 \ge 3, \\ -3y_1 \ge 0, \\ 4y_2 \ge 5, \\ -y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Помножимо перше та третє рівняння основної задачі системи на (-1) для того, щоб отримати у вказаних рівняннях базисні вектори. Отримаємо задачу в канонічному вигляді:

$$F = 2x_1 + 3x_2 + 5x_4 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -12, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_5 = -18, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,5}.$$

У векторній формі обмеження задачі будуть такими:

$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 = P_{0,}$ де

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} -12 \\ 10 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

Вибираючи в якості базису P_3, P_4, P_5 заповнюємо початкову симплекс-таблицю.

I	Базис	$C_б$	P_0	2	3	0	5	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	P_3	0	-12	2	-1	1	0	0
2	P_4	5	10	1	2	0	1	0
3	P_5	0	-18	-3	2	0	0	1
	$\Delta_j = Z_j - C_j$		50	3	7	0	0	0

Запишемо симплекс-таблицю в Ms Excel.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				2	3	0	5	0
2	Базис	Сбаз	P0	P1	P2	P3	P4	P5
3	P3	0	-12	2	-1	1	0	0
4	P4	5	10	1	2	0	1	0
5	←P5	0	-18	-3	2	0	0	1
6	$\Delta_j = Z_j - C_j$		50	↑3	7	0	0	0

Оскільки в стовпці P_0 є два від'ємні числа (-12 та -18), а в шостому рядку нема від'ємних чисел, то у відповідності з алгоритмом двоїстого симплекс-методу, переходимо до нової симплекс-таблиці.

$\max\{|-12|;|-18|\} = 18$, тому з базису виключимо вектор P_5. Оскільки $\min\left\{\frac{-\Delta_j^{(0)}}{a_{3j}^{(0)}}\right\} = \frac{-\Delta_1}{a_{31}^{(0)}} = \frac{-3}{-3} = 1$ то в базис ввійде вектор P_1, а розв'язувальним буде $a_{31}^{(0)} = -3$ (E5). Задамо формули переходу до наступної симплекс-таблиці та виконаємо перехід.

$b_3^{(1)} = \frac{b_3^{(0)}}{a_{31}^{(0)}}$, $b_2^{(1)} = \frac{a_{31}^{(0)} \cdot b_2^{(0)} - a_{21}^{(0)} \cdot b_3^{(0)}}{a_{31}^{(0)}}$, $b_1^{(1)} = \frac{a_{31}^{(0)} \cdot b_1^{(0)} - a_{11}^{(0)} \cdot b_3^{(0)}}{a_{31}^{(0)}}$. D9=D5/$E$5; D8=($E$5*D4-$E$4*D5)/$E$5; D7=($E$5*D3-$E$3*D5)/$E$5.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
				2	3	0	5	0
	Базис	Сбаз	P0	P1	P2	P3	P4	P5
7	P3	0	-24	0	1/3	1	0	2/3
8	P4	5	4	0	2 2/3	0	1	1/3
9	P1	2	6	1	- 2/3	0	0	- 1/3
10	$\Delta_j = Z_j - C_j$		32	0	9	0	0	1

Оскільки в рядку де є від'ємний елемент (-24) немає від'ємних a_{1j} то задача не має розв'язків.

Приклад 3.([6], с.80) Фірма займається складанням дієти, що містить принаймні 20 одиниць білків, 30 одиниць вуглеводів, 10 од. жирів і 40 од. вітамінів. Яка дієта буде найдешевшою, якщо є п'ять продуктів, дані про які наведені в таблиці?

Корисні речовини	Вміст корисних речовин в 1 кг(л) продукту				
	Хліб	Соя	Сушена риба	Фрукти	Молоко
Білки	2	12	10	1	2
Вуглеводи	12	0	0	4	3
Жири	1	8	3	0	4
Вітаміни	2	2	4	6	2
Ціна	12	36	32	18	10

Розв'язання. Побудуємо математичну модель задачі. Позначимо x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 обсяги хліба, сої, сушеної риби, фруктів та молока відповідно, які потрібно включити у вказану дієту, а через F.-. витрати (у.о.) на придбання продуктів для відповідної дієти.

Тоді математична модель задачі буде такою:

$$F = 12x_1 36x_2 + 32x_3 + 18x_4 + 10x_5 \to \min$$

при умовах

$$\begin{cases} 2x_1 + 12x_2 + 10x_3 + x_4 + 2x_5 \ge 20, \\ 12x_1 + 4x_4 + 3x_5 = 30, \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 40, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$

Перейдемо до канонічної задачі на максимум

$$-F = -12x_1 - 36x_2 - 32x_3 - 18x_4 - 10x_5 - Mx_7 - Mx_8 - Mx_9 \to \max$$

при умовах

$$\begin{cases} -2x_1 - 12x_2 - 10x_3 - x_4 - 2x_5 + x_6 = -20, \\ 12x_1 + 4x_4 + 3x_5 + x_7 = 30, \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_5 + x_8 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 2x_5 + x_9 = 40, \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,9},$ де M – деяке досить велике додатне число.

Спочатку двоїстим симплекс-методом побавимося від'ємних b_i, а далі вилучимо штучні змінні (див.[2]), тобто застосуємо "штучно-двоїстий" (комбінований) метод . Всі симплекс-таблиці будемо послідовно розташовувати одна за одною.

			-12	-36	-32	-18	-10	0	-1	-1	-1
Базис	Сбаз	P0	P	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9
P6	0←	-20	-2	-12	-10	-1	-2	1	0	0	0
P7	-1	30	12	0	0	4	3	0	1	0	0
P8	-1	10	1	8	3	0	4	0	0	1	0
P9	-1	40	2	2	4	6	2	0	0	0	1
$\Delta_j = Z_j - C_j$		0	12	36	32	18	10	0	1	1	0
	$-\Delta_j / a_{ij}$		6	3	3 1/5	18	5				
P2	-36	1 2/3	1/6	1	5/6	0	1/6	-0	0	0	0
P7	-1	30	12	0	0	4	3	0	1	0	0
P8	←-1	-3 1/3	- 1/3	0	-3 2/3	- 2/3	2 2/3	2/3	0	1	0
P9	-1	36 2/3	1 2/3	0	2 1/3	5 5/6	1 2/3	1/6	0	0	1
$\Delta_j = Z_j - C_j$		-126 2/3	-7 2/3	0	- 1/3	5 1/6	- 2/3	2 5/6	0	1	0
	$-\Delta_j / a_{ij}$				↑0	7 3/4	1/4				
P2	-36	1	0	1	0	-0	7/9	0	0		0
P7	-1	30	12	0	0	4	3	0	1		0
P3	-32	1	0	0	1	1/5	- 5/7	- 1/5	0		0
P9	-1	34 5/9	1 1/2	0	0	5 2/5	3 1/3	3/5	0		1
$\Delta_j = Z_j - C_j$		-61 4/5	5 5/6	0	0	14 2/3	5 4/9	3 1/3	1		0
	-M	-64 5/9	-13 1/2	0	0	-9 2/5	-6 1/3	- 3/5	-1		
P2	-36	2/3	0	1	0	-0	3/4	0			0
P1	-12	2 1/2	1	0	0	1/3	1/4	0			0
P3	-32	2/3	0	0	1	1/7	- 3/4	- 1/6			0
P9	-1	31	0	0	0	5	3	3/5			1
$\Delta_j = Z_j - C_j$		-76 1/3	0	0	0	12 2/3	4	3 1/3			1
	-M	-31	0	0	0	-5	-3	- 3/5			-1
P2	-36	1 1/3	0	1	0	0	4/5	0			
P1	-12	2/5	1	0	0	0	0	-0			
P3	-32	- 1/4	0	0	1	0	- 5/6	- 1/5			
P4	-18	6 2/7	0	0	0	1	3/5	1/8			
$\Delta_j = Z_j - C_j$		-156	-12	-36	-32	-18	-13 3/4	1 5/6			
	$-\Delta_j / a_{ij}$							9 1/5			

			-12	-36	-32	-18	-10	0			
Базис	Сбаз	P0	P	P2	P3	P4	P5	P6	$\boxed{\theta_i}$		
P2	-36	1 1/5	0	1	2/5	0	1/2	0	2 1/2		
P1	-12	1/2	1	0	- 1/5	0	2/9	0	2 1/7		
P6	0	1 1/3	0	0	-5	0	4 1/5	1	1/3		
P4	-18	6 1/9	0	0	3/5	1	1/9	0	58 8/9		
$\boxed{\Delta_j = Z_j - C_j}$		-158 1/2	0	0	9 1/5	0	-11 1/2	0			
P2	-36	1	0	1	1	0	0	- 1/9	1		
P1	-12	2/5	1	0	0	0	0	-0			
P5	-10	1/3	0	0	-1 1/5	0	1	1/4			
P4	-18	6	0	0	5/7	1	0	-0	8 2/5		
$\boxed{\Delta_j = Z_j - C_j}$		-154 7/8	0	0	-4 3/7	0	0	2 5/7			
P3	-32	1	0	1	1	0	0	- 1/9			
P1	-12	1/3	1	-0	0	0	0	-0			
P5	-10	1 3/5	0	1 1/4	0	0	1	0			
P4	-18	5 2/7	0	- 3/4	0	1	0	0			
$\boxed{\Delta_j = Z_j - C_j}$		-150	0	4 3/5	0	0	0	2 1/5			

З останньої симплекс-таблиці отримуємо $X_{опт} = \left(\frac{1}{3};0:1;5\frac{2}{7};1\frac{3}{5}\right)$, і $F_{\min} = 150$.

Отже оптимальний раціон (необхідна дієта) вартістю в 150 у.о. складатиметься із 0,33 од. хліба, 1 одиниці сушеної риби, 5,3 од. фруктів та 1,6 од. молока та не міститиме сої.

Таким чином для розв’язання оптимізаційної задачі двоїстим симплекс-методом спочатку визначаємо напрямний рядок, а потім – стовпець в канонічній задачі. Далі виконуємо перехід до нових таблиць до тих пір, поки знайдемо розв’язок або встановимо, що задача розв’язку не має. При розв’язуванні за комбінованим методом (двоїстий та штучного базису) спочатку застосовуємо двоїстий симплекс-метод (до виключення з умови всіх від’ємних b_i), а потім завершуємо виключення штучних змінних (див. приклад 3). Між змінними обох задач (прямої та двоїстої) у останній симплекс-таблиці (як і в попередніх таблицях) існує така відповідність:

Змінні прямої задачі	
Основні	Додаткові
$x_1 \quad x_2 \quad \cdots x_j \quad \cdots x_n$ $\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$ $y_{m+1}\ y_{m+2} \cdots y_{m+j} \cdots y_{m+n}$	$x_{n+1}\ x_{n+2} \cdots x_{n+i} \cdots x_{n+m}$ $\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$ $y_1 \quad y_2 \quad \cdots y_i \quad \cdots y_m$

Додаткові	Основні
Змінні двоїстої задачі	

З цієї відповідності випливає, що оцінки в останній симплекс-таблиці, які відповідають основним змінним прямої задачі, є значеннями додаткових змінних двоїстої задачі і мають відповідний економічний зміст.

Задачі для самостійного виконання.

До задач 1 та 2 записати двоїсті задачі лінійного програмування. Розв'язати одну із них за симплекс-методом і визначити оптимальний план другої задачі.

Задача 1. Знайти

$$F = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min$$

при виконанні умов

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,3}.$$

Задача 2. Знайти

$$F = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 50, \\ 3x_1 + + x_3 \geq 15, \\ x_1 + 4x_2 \leq 40, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,3}.$$

Задача 3.Арматурний цех заводу залізобетонних виробів одержує прути довжиною 7 м. З них потрібно виготовити не менше ніж 200 заготовок довжиною 3,2 м, не менше ніж 400 заготовок довжиною 2,8 м, і не менше ніж 600 заготовок довжиною 2,1 м. Яку кількість прутів треба використати і яким способом треба нарізати заготовки, щоб відходи були мінімальними?

Література

1. Листопад В.В.Розв’язування задач лінійного програмування засобами MICROSOFT EXCEL.//Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання математики:матеріали Всеукр. наук.-метод. конф. (3-4 грудня 2009 р., м. Суми:Вид-во СумДПУ імені А.С.Макаренка, 2009 .- с.214 - 216.
2. Листопад В.В. Реалізація симплекс-методу для розв’язання економічних задач оптимізації з допомогою Microsoft Excel.//Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія №5.Педагогічні науки:реалії та перспективи.-Випуск 19:збірник наукових праць/за ред.. В.Д.Сиротюка.-К.:Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 2009. - с.211-215.
3. Листопад В.В. Реалізація методу штучного базису для розв’язку екстремальних задач лінійного програмування засобами Microsoft Excel.// Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія № .Педагогічні науки:реалії та перспективи. - Випуск :збірник наукових праць/за ред. .-К.:Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2009. -с. .
4. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування.:Навчальний посібник.-К.:КНЕУ, 2005 - 452с.
5. Лавер О.Г. Застосування методів лінійного програмування до розв’язання прикладних задач економіки.//Методичний посібник для студентів економічного факультету. - Ужгород., 1998. - с.68.
6. Методичний посібник з курсу «Математичне програмування»,/Укл. С.П. Круглова.-К., 2001. -с.127.